



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

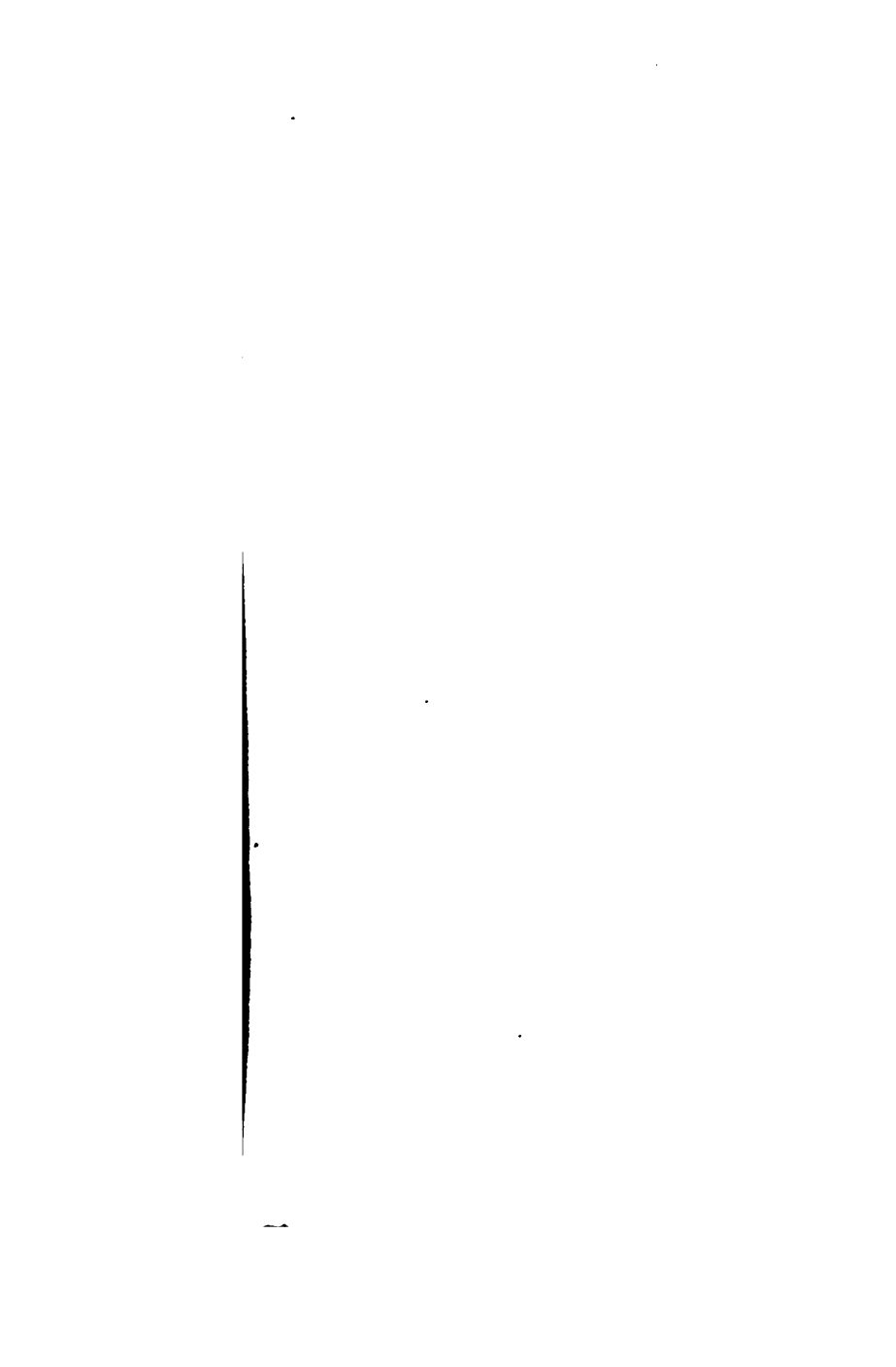
- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>









4817

BIBLIOTHÈQUE DU CONDUCTEUR

MÉCANIQUE HYDRAULIQUE THERMODYNAMIQUE

PAR

GEORGES D

INGÉNIEUR DE LA VI

INSPECTEUR ADJOINT DE LA I

DEUXIÈME ÉDITION

ENTIÈREMENT REMANIÉE

PRIX : 15 FR.

PARIS

H. DUNOD ET E. PICHON

SUCCESSIONS DE V^{os}

49, Quai des Grands

1906



Prq. 1
qt.
12-2

BIBLIOTHÈQUE DU CONDUCTEUR

PUBLIÉE SOUS L'AUTORITÉ

DE MESSIEURS LES MINISTRES
DE L'AGRICULTURE, DU COMMERCE
DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE
DE L'INTÉRIEUR, DE LA JUSTICE

Comité de rédaction

BARTHOU	Ancien Ministre, Ministre de l'Intérieur, Mes
BECHMANN	Ancien Directeur de la ville de Paris et Chaussées
BERTEAUX	Ministre de l'Intérieur
BOREUX	Directeur de la ville de Paris
BOSRAMIER	Sous-ingénieur
BOUQUET	Directeur du Service au Ministère
BOURRAT	Membre de l'Académie
BOUVARD	Directeur des Promotions
COLSON	Conseiller des Chaussées
COMTE (J.)	Ancien directeur national.
DEBAUVE	Inspecteur général
DEFRANCE	Directeur de l'Enseignement
DELECROIX	Docteur en législation
Le Directeur de l'Ecole nationale des Ponts et Chaussées	
Le Directeur de l'Ecole nationale supérieure des Ponts et Chaussées	
DONIOL	Inspecteur général
BOUSQUET (du)	Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées
EYROLLES	Directeur de l'Enseignement
FLAMANT	Inspecteur général
D ^r GAUTHIER (de l'Aude)	Ministre des Ponts et Chaussées
GERVAIS	Membre de l'Académie
GRILLOT	Président du Comité de travaux
GUILLAIN	Ancien Ministre des députés

g. a. Ziwet

- 21-1922

n° 100 8-22-27

GUYOT-DESSAIGNE	Ancien Ministre de la Justice et des Travaux publics, Membre de la Chambre des députés.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE	Membre de l'Institut, Inspecteur général des Mines en retraite.
HENRY (E.)	Inspecteur général des Ponts et Chaussées, Président du Conseil de la vicinalité au Ministère de l'Intérieur.
HUET	Inspecteur général des Ponts et Chaussées en retraite.
LAUSSE DAT (le Colonel)	Membre de l'Institut, Directeur honoraire du Conservatoire national des Arts et Métiers.
M^r LE BERQUIER	Avocat à la Cour d'appel de Paris.
LOUIS MARTIN	Avocat, Professeur libre de droit, Membre de la Chambre des députés.
MAGNIN	Ancien Ministre de l'Agriculture, du Commerce et des Finances, Sénateur inamovible.
MARTINIE	Contrôleur général de l'Administration de l'Armée.
PHILIPPE	Directeur honoraire de l'Hydraulique agricole au Ministère de l'Agriculture.
PILLET	Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers.
PIOT	Sénateur, ancien Entrepreneur de Travaux publics.
PONTICH (de)	Directeur des Travaux de Paris.
Le Président de l'Association philotechnique.	
Le Président de l'Association polytechnique.	
Le Président de la Société des Anciens Elèves des Ecoles d'Arts et Métiers.	
Le Président de l'Association des personnels de travaux publics.	
Le Président de la Société des Ingénieurs civils de France.	
Le Président de la Société des Ingénieurs coloniaux.	
Le Président de la Société de Topographie de France.	
Le Président de la Société de Topographie parcellaire de France.	
QUENNEC	Directeur de l'Octroi de Paris.
RESAL	Professeur à l'Ecole des Ponts et Chaussées.
ROUCHÉ	Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers.
TISSERAND	Conseiller-maire à la Cour des Comptes.

PATRONAGE

Ministre de la Justice et des Travaux
Membre de la Chambre des députés.
de l'Institut, Inspecteur général des Mines
uite.

r général des Ponts et Chaussées, Président
seil de la vicinalité au Ministère de l'Inté-

ar général des Ponts et Chaussées en retraite.

de l'Institut, Directeur honoraire du Con-
oire national des Arts et Métiers.

à la Cour d'appel de Paris.

Professeur libre de droit, Membre de la
bre des députés.

Ministre de l'Agriculture, du Commerce et
inances, Sénateur inamovible.

ur général de l'Administration de l'Armée.

ar honoraire de l'Hydraulique agricole au
lère de l'Agriculture.

eur au Conservatoire des Arts et Métiers.

ir, ancien Entrepreneur de Travaux publics.

ur des Travaux de Paris.

achnique.

achnique.

nciens Elèves des Ecoles d'Arts et Métiers.

ersonnels de travaux publics.

bnieurs civils de France.

énieurs coloniaux.

ographie de France.

ographie parcellaire de France.

eur de l'Octroi de Paris.

seur à l'Ecole des Ponts et Chaussées.

seur au Conservatoire des Arts et Métiers.

illier-maitre à la Cour des Comptes.

BIBLIOTHÈQUE DU CONDUCTEUR DE

Comité de rédaction

SIÈGE : 7, RUE DU BE

Bureau

PRÉSIDENT :

Conseiller municipal de Pa
Seine, ancien Président de
travaux publics, Rédacteur
Travaux Publics " et de

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL :

Ingénieur civil, Secrétaire
Tramways à vapeur du dé
la Société des Ingénieurs
ciation philotechnique.

VICE-PRÉSIDENTS :

Ingénieur des Ponts et Chaussées
Sous-ingénieur des Ponts et
Chef du Secrétariat des
menades et plantations.
Inspecteur particulier de
Chemins de fer de P.-L.-M.

SECRÉTAIRES :

Commissaire de surveillance
fer (P.-L.-M.).
Ingénieur de la Ville de Pa
des Arts et Manufactures
Sous-Inspecteur de l'Assain
Surveillant technique des
revision).

JOLIBOIS

BONNAL

DACREMONT
DARDART
FALCOU

VIDAL

BONDU

DEJUST

DIÉBOLD
LEMARCHAND.

Membres du Comité :

AUCAMUS	Ingénieur des Arts et Manufactures, chef d'atelier aux chemins de fer du Nord.
CANAL	Contrôleur des comptes des Chemins de fer (Orléans).
CHABAGNY	Ingénieur municipal (contrôle et révision).
COLAS	Sous-ingénieur aux Chemins de fer de l'Etat, Président de l'Association des personnels de travaux publics.
DARIÈS	Ingénieur de la Ville de Paris, Licencié ès Sciences, Professeur à l'Association philotechnique et à l'Ecole spéciale des Travaux publics.
DECRESSAIN	Sous-ingénieur des Mines (Service des appareils à vapeur), Professeur à l'Ecole d'Horlogerie.
DUFOUR	Commis principal des Ponts et Chaussées (Contrôle P.-L.-M.) ; Lauréat de l'Académie française.
GRIMAUD	Ingénieur chef du service des Travaux publics de la Martinique.
HALLOUIN	Inspecteur principal de l'Exploitation commerciale des Chemins de fer de l'Etat.
LANAVE	Sous-ingénieur des Ponts et Chaussées, C ^o du Métropolitain, ancien Président de l'Association des personnels de travaux publics.
LÉVY-SALVADOR	Ingénieur du Service technique de l'Hydraulique agricole au Ministère de l'Agriculture.
MALETTE (G.)	Sous-ingénieur des Ponts et Chaussées, Agent voyer cantonal (Service ordinaire et vicinal de la Seine).
PRADÈS	Sous-chef de bureau au Ministère de l'Agriculture, Membre du Conseil d'administration de l'Association philotechnique.
PRÉVOT	Conducteur faisant fonctions d'Ingénieur des Ponts et Chaussées (Service du nivellement général de la France).
REBOUL	Sous-ingénieur des Mines (Service des appareils à vapeur).
ROUSSEAU (Ph.)	Secrétaire général de la Société des Ingénieurs coloniaux.
ROUX	Sous-ingénieur faisant fonctions d'Ingénieur des Ponts et Chaussées (Service ordinaire et vicinal).
SAINT-PAUL	Conducteur principal du service municipal des Eaux.
SIMONET	Conducteur principal des Ponts et Chaussées, Service municipal (Métropolitain).

E RÉDACTION

du Comité :

Arts et Manufactures, chef d'atelier aux
fer du Nord.

comptes des Chemins de fer (Orléans).

municipal (contrôle et révision).

ur aux Chemins de fer de l'Etat, Président de
on des personnels de travaux publics.

la Ville de Paris, Licencié ès Sciences, Pro-
l'Association philotechnique et à l'Ecole spé-
Travaux publics.

ur des Mines (Service des appareils à vapeur),
r à l'Ecole d'Horlogerie.

icipal des Ponts et Chaussées (Contrôle P.-L.-M.);
e l'Académie française.

chef du service des Travaux publics de la
e.

principal de l'Exploitation commerciale des
de fer de l'Etat.

ieur des Ponts et Chaussées, C^o du Métropoli-
en Président de l'Association des personnels de
publics.

du Service technique de l'Hydraulique agricole
ière de l'Agriculture.

ieur des Ponts et Chaussées, Agent voyer can-
service ordinaire et vicinal de la Seine).

de bureau au Ministère de l'Agriculture, Membre
eil d'administration de l'Association philotech-

r faisant fonctions d'Ingénieur des Ponts et
es (Service du nivellement général de la France).

nieur des Mines (Service des appareils à vapeur).
général de la Société des Ingénieurs coloniaux.

nieur faisant fonctions d'Ingénieur des Ponts et
es (Service ordinaire et vicinal).

ur principal du service municipal des Eaux.

ur principal des Ponts et Chaussées, Service muni-
Métropolitain).

AVANT-PRO

Cette seconde édition de *no-
nique, Hydraulique, Thermodyn-*
avec soin et considérablement

Dans la mécanique notamme
duit la théorie des mécanismes
loppé plusieurs chapitres de l
dynamique du point matériel,
problèmes d'application.

Dans l'hydraulique, deux cha-
été consacrés à l'écoulement sou-
vements ondulatoires. Nous av-
loppé diverses applications prat-
distributions d'eau et le calcul

Nous nous sommes inspiré d
sinesq, dont nous avons jadis
l'Université de Paris, mais en
par trop abstraites et purement
nous plaçant de préférence au
applications à l'art de l'ingénie-

Paris, le 1^{er} juillet 1905.



MÉCANIQUE, THERMODYNAMIQUE

PREMIÈRE PARTIE

MÉCANIQUE

CHAPITRE PREMIER

CINÉMATIQUE

§ 1. — PRÉLIMINAIRES. — NOTIONS GÉNÉRALES.

1. **Objet et divisions de la mécanique.** — La mécanique est un point géométrique au point de vue de la matière ; un grain de sable est un point matériel.

Un *système invariable* est un ensemble quelconques de ses points matériels dont les distances sont restées éternellement égales, quelles que soient les positions relatives auxquelles ce solide peut être porté. La mécanique est un être de raison, une science créée pour les besoins de la physique, la nature où tous les corps, aussi bien les solides que les fluides, sont ou moins déformables.

En mécanique, on admet que le point matériel, et par suite tout corps matériel, ne peut modifier par lui-même son mouvement. Toute cause capable de modifier le mouvement d'un corps s'appelle une force. On suppose d'abord d'hypothétique ; des exemples sont tirés du mouvement musculaire de l'homme ou du mouvement des animaux pour constater l'existence.

La mécanique a pour objet l'étude du mouvement.

ment des corps ; elle se divise en deux : la *mécanique rationnelle* et la *mécanique*

La première branche, que nous étudions, propose de résoudre les deux problèmes :

- 1° Étant donné un corps, ou un système de forces qui agissent sur lui, trouver son mouvement ;
- 2° Déterminer les forces auxquelles un système de corps pour qu'il prenne un mouvement à l'avance.

La mécanique appliquée étudie des systèmes non pour des systèmes invariables, mais pour des systèmes variables, tels qu'ils se présentent dans la pratique, compte des résistances passives qu'ils rencontrent, et ses conclusions sont d'une application directe au calcul des pièces solides employées.

À vrai dire, la mécanique se compose de deux parties : la *dynamique*, qui étudie à la fois le mouvement et les forces qui agissent sur le système ; et la *statique*, qui étudie seulement l'équilibre. C'est-à-dire se font équilibre sous le nom de *cinématique* le mouvement et les forces qui le produisent.

2. Définition des vecteurs. —

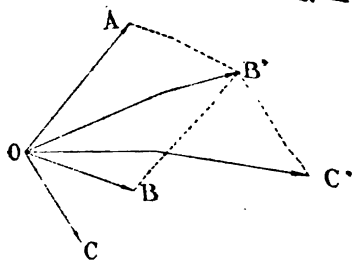


FIG. 1.

et OB ; on exprime cette dépendance ainsi :

$$(OB') = (OA) + (AB')$$

deux grandes branches :
cinématique appliquée.

Nous étudierons d'abord, se-
lon les problèmes suivants :

1. Un système de corps, et les
mouvements de son mouvement;

2. Les conditions auxquelles il faut soumettre un
corps pour qu'il ait un mouvement donné

Il y a des problèmes analogues,
comme dans la nature; elle tient
à ce que développe le mouve-
ment d'une grande utilité pour le
calcul dans les constructions.

La cinématique compose uniquement de la
statique et le mouvement. On
étudie de *statique*, le cas spécial où
un système ne produisent aucun
effet libre. On étudie aussi sous le
nom de mouvement des systèmes indépen-
dants.

— On appelle vecteur un seg-
ment OA porté sur une di-
rection donnée et ayant un
sens déterminé; le point O
est l'origine du vecteur et
A son extrémité.

Soit OB un second vec-
teur; par le point A menons
AB' égal et parallèle à OB et
de même sens; le vecteur
OB' est, par définition, la
somme géométrique ou la
résultante des vecteurs OA
et OB. On écrit la dépendance en écrivant symbo-

$OB = OA + OB$.

Si OC est un troisième vecteur
parallèle à OC, le vecteur OC' es-
t la somme des trois vecteurs OA, OB, OC; on é-
crit la dépendance par l'égalité symbolique :

$$OC' = OA + OB + OC$$

et ainsi de suite.

Si les vecteurs sont quelconques
OA, OB, OC, ..., leur somme géométrique

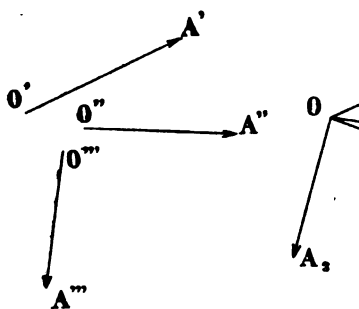


FIG. 2.

est la résultante des vecteurs OA
et OB menant par le point O des seg-
ments OA' et OB' égaux et parallèles
aux vecteurs proposés, c'est-à-dire é-
gaux et parallèles à eux-mêmes de
sens en O.

On définit pareillement la di-
vision de deux vecteurs OB' et OA
(fig. 2). On dit que B'B soit égal à OA, parallèle

Il résulte d'un théorème bien
connu que :

La projection de la résultante sur
une droite est égale à la somme des pro-
jections des vecteurs sur la même droite.

Quand la projection est ortho-

angles de OA , OB , OC , OC' , avec la direction des projections positives, on a (fig. 1) :

$$OC' \cos \lambda = OA \cos \alpha + OB \cos \beta + OC \cos \gamma.$$

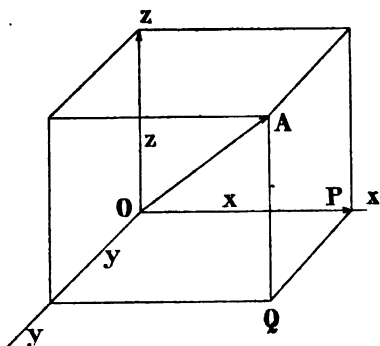


FIG. 3.

En particulier, par rapport à trois axes rectangulaires OX , OY , OZ , un vecteur OA sera défini par les coordonnées X , Y , Z , de son extrémité A , c'est-à-dire par les projections orthogonales de OA sur les axes. Ces projections sont les composantes du vecteur suivant les axes coordonnés, car on peut obtenir

ce vecteur en composant X , Y , Z , suivant le contour $OPQA$.

3. Trajectoire. — Loi du mouvement. — Courbe des espaces. — Un point matériel en mouvement décrit dans l'espace une certaine courbe que l'on nomme sa *trajectoire*.

Soient M_0 la position du point à un instant donné pris pour origine des temps, M sa position à une époque quelconque t ; le mouvement du point est déterminé si l'arc $MM_0 = s$ est exprimé par une fonction connue du temps :

$$s = f(t); \quad (1)$$

cette relation est la *loi du mouvement* ou l'*équation des espaces*. Il va sans dire que le temps t et l'arc s sont deux quantités susceptibles de prendre toute l'échelle des grandeurs depuis $-\infty$ à $+\infty$.

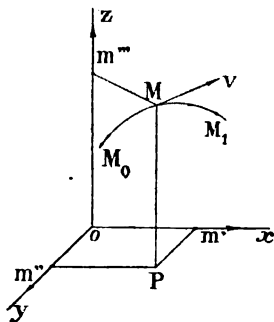


FIG. 4.

avec la direction des projections

$$x + OB \cos \beta + OC \cos \gamma.$$



En particulier, par rapport à trois axes rectangulaires OX , OY, OZ , un vecteur OA sera défini par les coordonnées X, Y, Z , de son extrémité A , c'est-à-dire par les projections orthogonales de OA sur les axes. Ces projections sont les composantes du vecteur suivant les axes coordonnés, car on peut obtenir X, Y, Z , suivant le contour $OPQA$.

mouvement. — Courbe des en mouvement décrit dans

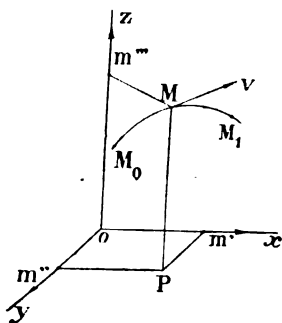


Fig. 2

ités susceptibles de prendre
uis — ∞ à $+\infty$.

Si l'on prend deux axes courbe représentative de l' des espaces; le temps t est indépendante, et l'arc s est tion.

EXEMPLE. — La loi du mouve point est :

$$s = 3t^2,$$

et les équations de la trajectoir

$$x = at + p, \quad y = bt$$

La trajectoire est une droite e vement du point est rectiligne des espaces est une parabole pe

4. Mouvement projeté. — l'espace est encore détermin données x, y, z s'expriment temps :

$$x = f(t), \quad y =$$

Chacune de ces équations mouvement rectiligne de la p de coordonnées correspond est la loi du mouvement rec point M sur ox .

Cette façon de remplacer trois mouvements rectiligne est d'un usage constant en n

EXEMPLE. — Le mouvement équations :

$$x = 3t, \quad y = 2$$

on obtient les équations de l deux quelconques de ces équ

$$x = 3z + 3,$$

Le mouvement est donc rect

tient en exprimant l'arc s en fonction de t ; on trouve, en observant que $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$:

$$ds^2 = 14dt^2, \quad \text{d'où} \quad s = \sqrt{14}t + b;$$

b désigne une constante d'intégration.

5. Vitesse moyenne. — Vitesse à un instant donné. — Soient M et M_1 les positions successives d'un point en mouvement aux époques t et $t + \Delta t$; le rapport $\frac{\text{arc } MM_1}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ est, par définition, la *vitesse moyenne* du mobile dans l'intervalle de temps Δt ; si cet intervalle diminue indéfiniment, le rapport

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ tend vers la limite $\frac{ds}{dt}$, et la vitesse moyenne devient la *vitesse* V du point matériel à l'instant t ; on a donc, d'après l'équation des espaces,

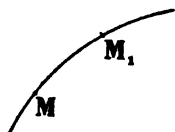


FIG. 6.

$$V = \frac{ds}{dt} = f(t).$$

La vitesse du point matériel à l'instant t est égale à la dérivée par rapport au temps de l'équation des espaces.

On admet que cette vitesse est dirigée suivant la tangente à la trajectoire au point M dans le sens du mouvement; si donc on porte à partir de ce point sur la direction de la tangente, dans le sens des arcs croissants, un vecteur MV représentant à une échelle déterminée la valeur de $\frac{ds}{dt}$, ce vecteur représentera, en grandeur et en direction, la vitesse du point M à l'instant considéré (fig. 7).

L'équation $V = f(t)$ est l'équation des vitesses, sa courbe représentative est la *courbe des vitesses*. Dans le mouvement $s = 3t^2$, on a $V = 6t$; la courbe des vitesses est une droite issue de l'origine.

6. Composantes de la vitesse. — Il est intéressant pour les applications de connaître les composantes de la vitesse suivant les axes de coordonnées, c'est-à-dire les projections sur ces axes du vecteur MV .

s en fonction de t ; on trouve, en obser-
vant $ds = v dt$:

$$d'où \quad s = \sqrt{14} t + b;$$

l'intégration.

Vitesse à un instant donné. — Soient
successives d'un point en mouvement
en t ; le rapport $\frac{\text{arc } MM_1}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ est, par
suite du mobile dans l'intervalle de
temps Δt , et diminue indéfiniment, le rapport
tend vers la limite $\frac{ds}{dt}$, et la vitesse
instantanée devient la *vitesse* V du point
en l'instant t ; on a donc, d'après
la relation des espaces,

$$V = \frac{ds}{dt} = f(t).$$

La vitesse à l'instant t est égale à la dérivée
de l'équation des espaces.

La vitesse est dirigée suivant la tangente
à la courbe dans le sens du mouvement; si
on porte un point sur la direction de la tan-
gente, et que les angles croissants, un vecteur MV re-
présente la valeur de $\frac{ds}{dt}$, ce vec-
teur et en direction, la vitesse du
mobile (fig. 7).

Équation des vitesses. sa courbe
des vitesses. Dans le mouvement
rectiligne des vitesses est une droite

e. — Il est intéressant pour les
composantes de la vitesse sui-
vant c'est-à-dire les projections sur

1° *Coordonnées rectilignes.* —
composantes; α, β, γ , les angles
trajectoire au point M ; on a

$$V_x = V \cos \alpha = \frac{ds}{dt} \cos \alpha,$$

$$V_y = \frac{ds}{dt} \cos \beta, \quad V_z = \frac{ds}{dt} \cos \gamma$$

mais on démontre en analysant
que :

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds},$$

$$\cos \gamma = \frac{dz}{ds};$$

par suite, on peut écrire :

$$V_x = \frac{ds}{dt} \frac{dx}{ds}, \quad V_y = \frac{ds}{dt} \frac{dy}{ds},$$

ou en simplifiant :

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}$$

Si l'on considère les mou-
vements m', m'', m''' , du point M
composantes V_x, V_y, V_z ne

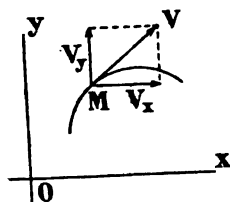


FIG. 8.

Dans le cas où le mouven-
t est rectiligne, on a :

$$z =$$

par suite :

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = 0, \quad V$$

2° Coordonnées polaires. — Le rapporté aux coordonnées polaires

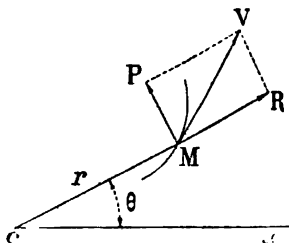


FIG. 9.

Mais on démontre en analyse

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{\dot{r}}$$

d'où l'on déduit :

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} =$$

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} =$$

par suite on peut écrire, en obse

$$\cos \varphi = \frac{dr}{ds},$$

Ainsi on a :

$$V_r = \frac{ds}{dt} \frac{dr}{ds},$$

ou en simplifiant :

$$V_r = \frac{dr}{dt},$$

$$V = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}. \quad (2)$$

Lorsque le mouvement est dans un plan, il est utile de considérer les composantes de la vitesse suivant le rayon vecteur OM et la perpendiculaire MP à ce rayon, menée dans le sens du mouvement. Soient $V_r = MR$ et $V_m = MP$ ces composantes; on a, en appelant φ l'angle VMR :

$$V_r = MV \cos \varphi,$$

$$V_m = MV \sin \varphi.$$

que :

$$\frac{rd\theta}{dr},$$

$$= \frac{dr}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}},$$

$$= \frac{rd\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}};$$

$$\text{d'où } dr^2 + r^2 d\theta^2 = ds^2;$$

$$\sin \varphi = \frac{rd\theta}{ds}.$$

$$V_m = \frac{ds}{dt} \frac{rd\theta}{ds},$$

$$V_m = \frac{rd\theta}{dt}. \quad (3)$$

V_r est la composante d'entraînement
 V_m la composante de circulation.

Enfin la vitesse a pour expression :

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_m^2}.$$

Dans le cas des coordonnées polaires, le point M est déterminé à chaque instant par le rayon vecteur r , l'azimut φ et la colatitude θ ; les variables r , φ , θ sont des fonctions du temps.

On peut d'abord projeter le vecteur MV sur le plan azimutal ZMH et sur la perpendiculaire à ce plan, dans le sens où φ augmente, ce qui donne les composantes V_a et V_p de la vitesse; puis projeter V_a sur le rayon vecteur OM et sur la perpendiculaire à ce rayon, ce qui donne les composantes V_r et V_m . Dans ce cas, V_r , V_m , V_p sont les composantes de la vitesse, lesquelles sont rectangulaires. Le tétraèdre $MV_r V_m V_p$ est trirectangle en V.

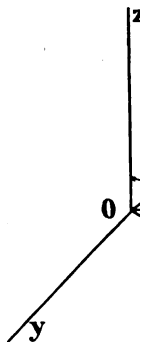
Des formules de transformation :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi.$$

On déduit en différentiant et observant que $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} + r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi^2}{dt^2}$$

et l'on peut voir, en faisant $\varphi = \text{const.}$, que le premier terme du second membre



ment V_r^2 . De même le second représente V_m^2 , le troisième V_p^2 .

Ainsi on a :

$$V_r = \frac{dr}{dt}, \quad V_m = r \frac{d\theta}{dt}, \quad V_p = r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt};$$

puis

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_m^2 + V_p^2}.$$

7. Mouvement uniforme. — Dans ce mouvement, la *vitesse* du point matériel *est constante*; on a par conséquent :

$$\frac{ds}{dt} = a, \quad \text{d'où en intégrant :} \quad s = at + b,$$

b désignant une autre constante. Si à l'origine du mouvement le point M occupe sur sa trajectoire une position M_0 pour laquelle l'arc s a une valeur s_0 , ce qui revient à compter les arcs à partir d'un certain point A , on doit avoir, en faisant $t = 0$ dans la formule précédente :

$$s_0 = \text{arc } M_0 A = b;$$

par suite :

$$s = at + s_0.$$

FIG. 11.

Ainsi, dans le mouvement uniforme, la *courbe des espaces* est une ligne droite.

On a d'autre part :

$$a = \frac{s - s_0}{t},$$

ce qui montre que la *vitesse* dans le mouvement uniforme est égale au quotient de l'espace parcouru par le temps employé à le parcourir.

8. Accélération. — Soient M la position d'un mobile sur sa trajectoire à l'instant t et $MV = V$ sa vitesse; soient de même M_1 et $M_1V_1 = V + \Delta V$ la position et la vitesse du mobile à l'instant voisin $t + \Delta t$; du point M menons MV_2 égal et parallèle à M_1V_1 , et joignons VV_2 . Par définition, VV_2 pris à la limite lorsque Δt tend vers zéro est l'*accélération élémentaire* du mobile à l'instant t ; comme on le voit, cette accélération élémentaire se compose avec la vitesse MV pour

NOTE

nd représente v_m , le troi-

$$\frac{10}{12}, \quad v_p = r \sin \theta \frac{d\theta}{dt};$$

$$\sqrt{v_m^2 + v_p^2}.$$

ns ce mouvement, la vitesse du
par conséquent :

$$\text{égrant :} \quad s = at + b,$$

Si à l'origine du mouvement le
upe sur sa trajectoire une posi-
r laquelle l'arc s a une valeur s_0 ,
it à compter les arcs à partir d'un
at A, on doit avoir, en faisant
la formule précédente :

$$s_0 = \text{arc } M_0 A = b;$$

$$s = at + s_0.$$

orme, la courbe des espaces est

$$\frac{-s_0}{t},$$

le mouvement uniforme est égale
r le temps employé à le parcou-

la position d'un mobile sur
dV = v sa vitesse ; soient de
la position et la vitesse du
 Δt ; du point M menons MV_1
ons VV_2 . Par définition, VV_2
l vers zéro est l'accélération
t ; comme on le voit, cette
pose avec la vitesse MV pour

CINÉMATIQUE

produire la vitesse MV_2 à l'instant t -
port $\frac{VV_2}{\Delta t}$, lorsque Δt tend vers zéro,
tion la grandeur de l'accélération tot
plement l'accélération à l'instant t . Q
le point M, se rapproche indé-
finiment du point M, et VV_2 tend
vers une position limite MJ qui
est la direction de l'accélération ;
en prenant sur cette direction,
à une échelle quelconque, un
vecteur :

$$MJ = \lim \frac{VV_2}{\Delta t},$$

ce vecteur représente en gran-
deur et en direction l'accéléra-
tion du mobile.

Si l'on se reporte à la défini-
tion du plan osculateur en un
point d'une courbe gauche, on
voit que l'accélération MJ est
située dans le plan osculateur de la

Déviation. — On définit quelque-
mobile en introduisant la notion de

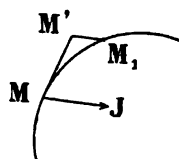


FIG. 13.

tion revient à l
nous le verrons
Soient M et M
tives du mobile
Si, à partir de
s'était déplacé
de sa vitesse V,
du temps Δt en
Le vecteur $M'M_1$
par le point dans l'intervalle Δt , et la
 Δt tend vers zéro, est par définition l'
l'instant t ; c'est un vecteur MJ ayan

sens que $M'M_1$. Cette seconde définition montre aussi que l'accélération est située dans le plan osculateur au point M .

9. Composantes de l'accélération. — 1° La tangente et la normale principale en un point quelconque de la trajectoire du mobile étant situées dans le plan osculateur, il est facile d'obtenir les composantes de l'accélération suivant ces deux directions rectangulaires. Désignons par J_t et J_n ces composantes, et du point V_2 abaissons la perpendiculaire V_2V_3 sur MV ; VV_3 a toujours la direction de la tangente, mais à la limite V_2V_3 à la direction de la normale principale; les composantes de VV_2 sont donc VV_3 et V_2V_3 . Or, au second ordre près, on a :

$$MV_3 = V + \Delta V; \quad \text{et} \quad VV_3 = \Delta V;$$

par suite :

$$J_t = \lim \frac{VV_3}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}.$$

D'autre part :

$$V_2V_3 = MV_2 \sin \Delta \alpha = MV_2 \Delta \alpha \frac{\sin \Delta \alpha}{\Delta \alpha};$$

mais, si R désigne le rayon de courbure de la trajectoire en M , on a d'après une relation connue :

$$R d\alpha = ds, \quad \text{et} \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{V}{R};$$

par conséquent :

$$J_n = \lim \frac{V_2V_3}{\Delta t} = \lim MV_2 \frac{\Delta \alpha \sin \Delta \alpha}{\Delta t \Delta \alpha} = \lim (V + \Delta V) \frac{\Delta \alpha \sin \Delta \alpha}{\Delta t \Delta \alpha} = V \frac{d\alpha}{dt}.$$

ou enfin, en observant que $\lim \frac{\sin \Delta \alpha}{\Delta \alpha} = 1$, lorsque $\Delta \alpha$ tend vers zéro :

$$J_n = \frac{V^2}{R}.$$

On a donc en résumé :

$$J_t = \frac{dV}{dt}, \quad J_n = \frac{V^2}{R}. \quad (1)$$

definition montre aussi que l'ac-
an osculateur au point M.

tion. — 1° La tangente et la
quelconque de la trajectoire
plan osculateur, il est facile
accélération suivant ces deux
gnons par J_t et J_n ces compo-
ons la perpendiculaire V_2V_3
ection de la tangente, mais à
le la normale principale; les
VV₃ et V_2V_3 . Or, au second

$$\text{et} \quad VV_3 = \Delta V;$$

$$\lim \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}.$$

$$= MV_2 \Delta \alpha \frac{\sin \Delta \alpha}{\Delta \alpha};$$

ourbure de la trajectoire en
ue :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{V}{R};$$

$$= \lim (V + \Delta V) \frac{\Delta \alpha \sin \Delta \alpha}{\Delta t \Delta \alpha} = V \frac{d\alpha}{dt}.$$

$$\frac{\sin \Delta \alpha}{\Delta \alpha} = 1, \text{ lorsque } \Delta \alpha \text{ tend}$$

$$\frac{V^2}{R}.$$

$$J_n = \frac{V^2}{R}. \quad (1)$$

J_t est la composante tangentielle, J_n
ou centripète. J_n est toujours dirigée
bure de la trajectoire.

2° Coordonnées rectilignes. — Qu
point est projeté sur trois axes cart
utile de connaître les
composantes J_x , J_y ,
 J_z de l'accélération
suivant ces axes. Les
projections de la vi-
tesse MV sont (6) :

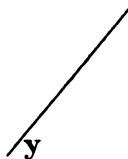
$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt};$$

celles de la vitesse
 M_1V_1 ou MV_2 sont de
même :

$$\Delta \frac{dx}{dt} + \Delta \frac{dx}{dt},$$

$$\Delta \frac{dy}{dt} + \Delta \frac{dy}{dt},$$

$$\Delta \frac{dz}{dt} + \Delta \frac{dz}{dt};$$



par conséquent, puisque VV_2 est l
des deux vecteurs MV_2 et MV , ses p

$$\Delta \frac{dx}{dt}, \quad \Delta \frac{dy}{dt},$$

Si l'on divise ces expressions par
à la limite, il vient :

$$J_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad J_y = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

avec

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2}$$

Dans le cas où le mouvement

plan des xy , on a constamme

suite : $J_x = \frac{d^2x}{dt^2}$, $J_y =$

REMARQUE. — Pour montrer l'id
l'accélération (8), cherchons les co
vant les axes.

A cet effet, soient $x = f(t)$, $y =$
de la trajectoire, M et M_1 les pos

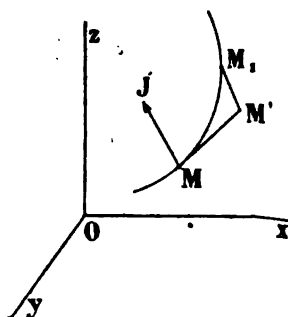


Fig. 15.

ment uniforme avec la vitesse acc
temps Δt . Si l'on appelle x' , y' , z
on a par exemple :

$$x' - x = \text{proj. ve}$$

mais le vecteur MM' est égal à la
sa projection sur OX est égale à $\frac{dx}{dt}$
par suite

$$x = x +$$

Cela posé, la composante de la
dire la projection du vecteur MM_1

$$(x + \Delta x$$

et, si l'on ne retient que les infini
voit qu'elle est égale à :

$$\frac{\Delta t^2}{2} f$$

Mais, d'après ce que nous avons

E

$$z = \frac{dz}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0; \text{ par } \frac{y}{a^2}, \quad J_z = 0. \quad (3)$$

ité des deux définitions de osantes de la déviation sui-

(t), $z = \psi(t)$, les équations ns du mobile aux instants $t + \Delta t$. Si l'on appelle x, y, z , coordonnées du point M , $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ celles du point M_1 , on a en particulier :

$$x = f(t), \quad x + \Delta x = f(t + \Delta t),$$

c'est-à-dire en développant $f(t)$ près la formule de Taylor :

$$x + \Delta x = f(t) +$$

$$\frac{\Delta t}{1} f'(t) + \frac{\Delta t^2}{1.2} f''(t) + \dots$$

D'autre part, soit M' la position qu'occuperait le mobile sur la tangente en M , s'il se déplaçait le long de cette tangente d'un mouvement uniforme au temps t , et pendant le même temps Δt , les coordonnées de ce point,

MM' sur OX ;

distance multipliée par Δt , donc $MM' = f'(t) \Delta t$; on a

$$MM' = f'(t) \Delta t.$$

La déviation suivant OX , c'est-à-dire la distance MM' sur cet axe, a pour expression :

$\Delta x - x'$, on néglige les termes du second ordre, on

on a :

$$\Delta x - x' = \frac{d^2x}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2} \text{ est}$$

la composante de l'accélération suivant l'axe OZ de la déviation suivant le même axe est l'accélération multipliée par $\frac{\Delta t^2}{2}$. La composante de l'accélération suivant OY et OZ .

Ainsi on peut écrire :

$$MM_1 = \frac{\Delta t^2}{2} J,$$

d'où l'on tire :

$$J = \frac{2MM_1}{\Delta t^2}.$$

Donc J n'est autre chose que l'accélération de la déviation.

3° *Coordonnées polaires.* — Des for- mules des composantes polaires J_r et J_m suivant le rayon et la perpendiculaire à ce rayon dans le sens des arcs croissants.

Projetons successivement sur OM et MP les composantes J_x et J_y , on obtient :

$$J_r = J_x \cos \theta + J_y \sin \theta,$$

$$J_m = J_x \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + J_y \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right).$$

Mais, si l'on différentie deux fois les expressions obtenues de $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, et si l'on remplace $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$ par leurs expressions en J_r et J_m , on obtient :

$$J_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$J_m = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right)$$

J_r est la composante radiale, J_m la composante tangentielle. On a ensuite :

$$J = \sqrt{J_r^2 + J_m^2}$$

Dans l'espace, on considère les composantes J_r, J_m, J_p suivant le rayon vecteur, la perpendiculaire au rayon vecteur dans le plan de la déviation, et la perpendiculaire à ce plan.

MÉCANIQUE.

ce rayon dans le plan azimutal, et la normale à ce dernier plan dans le sens où φ augmente.

Projetant successivement sur ces directions les compo-

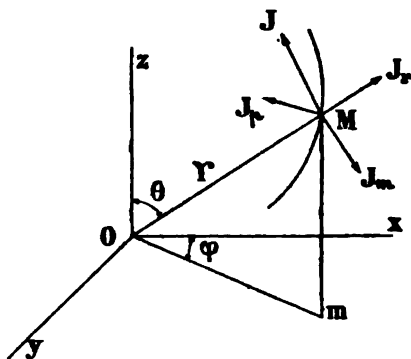


FIG. 17.

santes rectilignes J_x, J_y, J_z , on obtient d'après le théorème des projections :

$$J_r = J_x \cos \varphi \sin \theta + J_y \sin \varphi \sin \theta + J_z \cos \theta,$$

$$J_m = J_x \cos \varphi \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + J_y \sin \varphi \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + J_z \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right),$$

$$J_p = J_x \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) + J_y \sin \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right).$$

D'autre part, si l'on différencie deux fois par rapport à t les formules de transformation :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta;$$

et si l'on remplace J_x, J_y, J_z par les expressions obtenues de $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$, on obtient après réductions :

$$\left. \begin{aligned} J_r &= \frac{d^2r}{dt^2} - r \frac{d\theta^2}{dt^2} - r \sin^2 \theta \frac{d\varphi^2}{dt^2}, \\ J_m &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) - r \sin \theta \cos \theta \frac{d\varphi^2}{dt^2}, \\ J_p &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} \left(r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Enfin, comme le trièdre $MJ_r J_m J_p$ est trirectangle en M , on peut écrire :

$$J = \sqrt{J_r^2 + J_m^2 + J_p^2}.$$

10. **Mouvement rectiligne uniformément varié.** — La trajectoire ox est une droite, et l'accélération est constante; on a donc :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a.$$

Intégrant une première fois, on obtient l'équation de la vitesse :

$$V = \frac{dx}{dt} = at + b,$$

b désignant une autre constante. Intégrant une seconde fois, on obtient l'équation du mouvement :

$$x = \frac{at^2}{2} + bt + c,$$

c désignant une troisième constante.

Si le mobile part avec une vitesse V_0 d'un point situé à la distance x_0 de l'origine, on doit avoir pour $t = 0$: $V = V_0$, $x = x_0$; par suite, $b = V_0$, $c = x_0$; on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} V &= at + V_0 \\ x &= \frac{at^2}{2} + V_0 t + x_0. \end{aligned}$$

La première équation donne :

$$a = \frac{V - V_0}{t},$$

ce qui montre que dans le mouvement rectiligne uniformément varié, l'accélération est égale au quotient de l'accroissement de vitesse par le temps correspondant.

Si le mobile part de l'origine sans vitesse initiale, on doit avoir pour $t = 0$: $V = 0$, $x = 0$; par suite, $b = 0$, $c = 0$. La loi du mouvement est donc dans ce cas :

$$x = \frac{at^2}{2}.$$

En faisant $a = g = 9,8088$, on obtient la loi du mouvement d'un corps qui tombe dans le vide sans vitesse initiale :

$$x = \frac{gt^2}{2} \quad \text{avec} \quad V = gt.$$

11. **Mouvement circulaire.** — La trajectoire est un cercle de centre O et de rayon r ; on a arc $AM = s = r\theta$, d'où l'on déduit :

$$V = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = \omega r.$$

La dérivée $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ est la *vitesse angulaire*, c'est la vitesse d'un point situé sur le rayon OM , à une distance du centre égale à l'unité.

Pour un point quelconque M du cercle, on a :

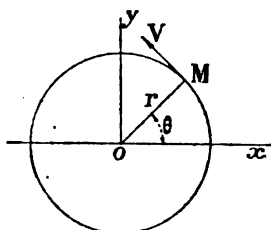


FIG. 18.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

d'où l'on déduit par dérivation :

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{d(r \cos \theta)}{dt} \\ &= - \frac{r \sin \theta d\theta}{dt} = -\omega y, \\ V_y &= \frac{d(r \sin \theta)}{dt} = \frac{r \cos \theta d\theta}{dt} = \omega x. \end{aligned}$$

D'autre part, on obtient (6) :

$$V_r = 0, \quad V_m = r\omega = V,$$

car la vitesse, dirigée suivant la tangente, est perpendiculaire au rayon vecteur.

Pour les composantes de l'accélération, on trouve (9), puisque $R = r$:

$$J_t = r \frac{d\omega}{dt} = r \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad J_n = r\omega^2 + r \frac{d\theta^2}{dt^2}.$$

J_n est dirigée suivant le rayon MO , de sorte que $J_n = J$, et $J_t = J_r$.

Si le mouvement est *uniforme*, l'angle θ varie proportionnellement au temps, c'est-à-dire que ω est constant; alors on a :

$$\theta - \theta_0 = a(t - t_0), \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega = a;$$

puis, en observant que $\frac{d^2r}{dt^2} = 0$ et $\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = r^2 \frac{d\omega}{dt} = 0$,

$$J_r = -r\omega^2, \quad J_m = 0;$$

ces formules montrent que l'accélération passe constamment par le point O .

12. **Hodographe.** — Soit MM' la trajectoire d'un mobile, V sa vitesse à un instant t ; par un point quelconque de

l'espace, par exemple le point O origine des axes, menons un vecteur Om égal et parallèle à MV et de même sens. Lorsque le mobile M se déplace, il en est de même du point m , et la courbe lieu de ce point est l'hodographe du mouvement du mobile ; cette courbe est située sur un cône de sommet O ; elle est plane quand la trajectoire est une courbe plane.

Si l'on désigne par x, y, z les coordonnées de M à l'instant t , par ζ, η, ξ celles de m , on aura par définition :

$$\xi = \frac{dx}{dt}, \quad \eta = \frac{dy}{dt}, \quad \zeta = \frac{dz}{dt};$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

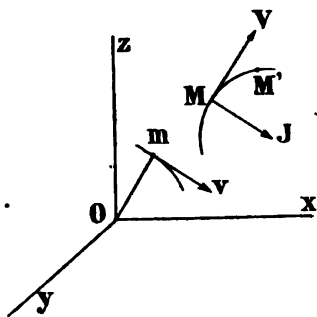


FIG. 19.

Ces relations montrent que le vecteur représentatif de la vitesse du point m est égal et parallèle au vecteur MJ qui représente l'accélération du mobile M .

En particulier, dans le cas d'un mouvement rectiligne, l'hodographe est évidemment une droite ; c'est une circonférence si le mouvement est uniforme.

13. Mouvement curviligne varié. — On a par définition :

$$\frac{dV}{dt} = J, \quad \frac{ds}{dt} = V.$$

L'équation des vitesses et celle des espaces s'obtiennent par intégration ; on trouve :

$$V = V_0 + \int_0^t J, dt, \quad s = s_0 + \int_0^t V dt.$$

14. Mouvement vibratoire simple. — On donne ce nom au mouvement rectiligne défini par l'équation :

$$x = a \cos \mu t + b \sin \mu t, \quad (1)$$

a, b, μ désignant des constantes, et x la distance du mobile M à un point fixe O .

La formule de la vitesse s'obtient en différentiant; on trouve:

$$V = -\mu a \sin \mu t + \mu b \cos \mu t. \quad (2)$$

L'expression de l'accélération est :

$$J = -\mu^2 a \cos \mu t - \mu^2 b \sin \mu t = -\mu^2 x. \quad (3)$$

On voit que l'accélération en un point quelconque M est proportionnelle à la distance OM , et qu'elle est dirigée dans le sens de M vers O .

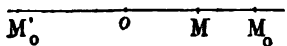


FIG. 20.

Supposons, pour simplifier, que le mobile parte de la position M_0 sans vitesse initiale; posons OM_0

$= x_0$; alors pour $t = 0$ on doit avoir : $x = x_0$ et $V = 0$; par suite, $a = x_0$ et $b = 0$. Les formules deviennent donc:

$$x = x_0 \cos \mu t, \quad V = -\mu x_0 \sin \mu t, \quad J = -\mu^2 x.$$

Lorsque t augmente, x décroît jusqu'au moment où μt devient égal à $\frac{\pi}{2}$, le mobile passe en O ; x devient négatif et croît en valeur absolue jusqu'à ce que $\mu t = \pi$, le mobile est alors en M'_0 à une distance $OM'_0 = x_0$. Si t continue à croître, $\cos \mu t$, et par suite x , décroît en valeur absolue, le point revient de M'_0 vers O qu'il atteint pour $\mu t = \frac{3\pi}{2}$; il dépasse ensuite O et atteint le point M_0 pour $\mu t = 2\pi$. Puis le mobile revient vers O et décrit le segment $M_0M'_0$. On voit donc que le point M exécute autour du point O une série d'oscillations d'amplitude $M_0M'_0 = 2x_0$; la durée d'une oscillation complète est $\frac{2\pi}{\mu}$, le mouvement est symétrique par rapport à l'origine. Le chemin $M_0M'_0$, puis M'_0M_0 , constitue une vibration simple.

Le temps t mis par le mobile pour parvenir à l'origine, s'obtient en faisant $x = 0$ dans l'équation des espaces, il vient :

$$\cos \mu t = 0; \quad \text{d'où} \quad \mu t = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad t = \frac{\pi}{2\mu}.$$

Ce temps est indépendant de la longueur x_0 , c'est-à-dire de la position initiale M_0 du point; on exprime cette indépendance en disant que le mouvement est *tautochrone*.

L'expérience montre que, dans les cas élastiques, la vibration d'une molécule M autour de sa position d'équilibre O s'effectue sensiblement suivant la loi :

$$x = x_0 \cos \mu t;$$

de là, la dénomination de mouvement vibratoire.

L'équation (1) peut se mettre sous la forme :

$$x = A \cos (\mu t + a),$$

en posant

$$a = A \cos \alpha, \quad b = -A \sin \alpha;$$

A, μ , α sont alors des constantes.

Réciproquement, l'équation (3) s'écrit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu^2 x = 0, \quad (3')$$

et l'on sait que l'intégrale de cette équation est :

$$x = A \cos (\mu t + \alpha).$$

A et α étant des constantes.

Ainsi l'équation (3') définit un mouvement vibratoire simple.

15. Accéléérations centrales. — Quand la direction de l'accélération d'un point matériel en mouvement passe constamment par un point fixe de l'espace O, on dit que cette accélération est *centrale*. Si l'on prend ce point pour origine, on doit avoir, en appelant x, y, z , les coordonnées du point M,

$$\frac{J_x}{x} = \frac{J_y}{y} = \frac{J_z}{z};$$

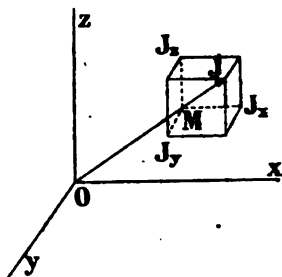


FIG. 21.

ces proportions expriment que la direction du vecteur MJ, dont des composantes rectangulaires sont J_x, J_y, J_z , passe par le point O. On peut les écrire :

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{z},$$

ou, en chassant les dénominateurs :

$$y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2} = 0, \quad x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Chacune de ces équations différentielles s'intègre directement et donne, en désignant par A, B, C, des constantes :

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = A, \quad z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = B, \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C.$$

De ces relations on déduit ensuite, en les multipliant respectivement par x, y, z et additionnant :

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Cette équation, à laquelle doivent satisfaire les coordonnées x, y, z du point mobile M, montre que la trajectoire de ce point reste constamment dans un plan fixe passant par le point O. Prenons ce plan pour plan xoy et écrivons que la composante J_m , perpendiculaire à OM, est nulle; il vient (9) :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0,$$

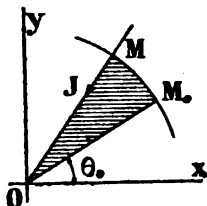


FIG. 22.

d'où en intégrant :

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C, \quad (1)$$

C désignant une constante.

Cette dernière relation est susceptible d'une interprétation géométrique remarquable : soit M_0 la position initiale de M; on a :

$$\text{Secteur } M_0OM = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} r^2 d\theta,$$

ou, en introduisant la variable t et en désignant par A l'aire du secteur M_0OM ,

$$A = \frac{1}{2} \int_0^t C dt = \frac{C}{2} t,$$

formule qui montre que l'aire balayée par le rayon vecteur, à partir de sa position initiale, augmente proportionnellement au temps.

La réciproque est vraie, c'est-à-dire que, si l'aire balayée par le rayon vecteur varie proportionnellement au temps, l'accélération du point M passe constamment par le point O. En effet, puisque par hypothèse :

$$A = \frac{C}{2} t,$$

il en résulte

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{2};$$

par suite :

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0, \quad \text{et} \quad J_m = 0,$$

car la dérivée d'une constante est nulle. Donc l'accélération J se réduit à la composante radiale J_r et passe par l'origine.

Le théorème précédent, dont les applications sont nombreuses en mécanique céleste pour le calcul du mouvement des planètes, est connu sous le nom de *théorème des aires*. La constante C est appelée *constante des aires*.

Quand l'accélération est centrale, son expression se met sous une forme remarquable qui a été indiquée par Binet; on a en effet (9), puisque $J_m = 0$:

$$J = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \frac{d\theta^2}{dt^2};$$

mais, d'après (1),

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2};$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -C \frac{d \frac{1}{r}}{d\theta}, \\ \frac{d^2 r}{dt^2} &= -C \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2}; \end{aligned}$$

par suite, en considérant l'accélération comme positive dans le sens OM,

$$J = -\frac{C^2}{r^2} \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} \right).$$

APPLICATION. — Supposons que le point M décrive une ellipse de centre H et de foyer O , l'accélération passant constamment par ce foyer.

On a pour l'équation de la trajectoire

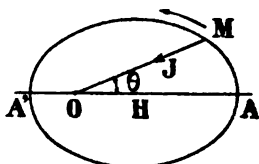


FIG. 23.

$$= \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

d'où l'on tire :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e \cos \theta}{p};$$

et successivement :

$$\frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} = -\frac{e \sin \theta}{p}, \quad \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} = -\frac{e \cos \theta}{p};$$

par suite, d'après la formule de Binet :

$$J = -\frac{C^2}{r^3} \left(-\frac{e \cos \theta}{p} + \frac{1}{p} + \frac{e \cos \theta}{p} \right), \quad \text{ou} \quad J = -\frac{C^2}{pr^3}.$$

On voit que l'accélération varie en raison inverse du carré de la distance, et qu'elle est dirigée de M vers O ; c'est une accélération newtonienne.

16. Mouvement relatif d'un point. — Soient un système d'axes fixes $Oxyz$, un système de comparaison mobile $AXYZ$, et un point M . Le mouvement de ce point rapporté aux axes fixes est son *mouvement absolu*; rapporté aux axes mobiles, considérés comme fixes, c'est son *mouvement relatif*. Enfin, le mouvement du système mobile par rapport aux axes fixes est le *mouvement d'entraînement* de ce système.

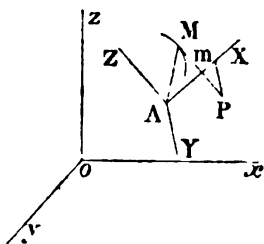


FIG. 24.

D'après ces définitions, on conçoit ce qu'il faut entendre par trajectoire, vitesse, accélération absolues du point M , trajectoire, vitesse, accélération relatives du même point. Il est évident que le mouvement d'entraînement du système mobile étant connu, ainsi que le mouvement du point M par rapport à ce système de comparaison, on pourra en déduire le mouvement absolu du point M dans l'espace.

Comme exemple, supposons que le point M se meuve sur la droite indéfinie OH pendant que cette droite tourne autour du point O . Le mouvement du point M sur OH , abstraction faite du mouvement de cette droite, est son mouvement relatif; le mouvement de la droite elle-même est son mouvement d'entraînement.

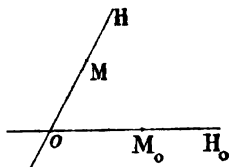


FIG. 24 bis.

Il existe une relation très simple entre la vitesse absolue, la vitesse relative et la vitesse d'entraînement du point M . Soit BC la trajectoire relative de ce point, V sa vitesse absolue, V_r sa vitesse relative et V_e la vitesse d'entraînement.

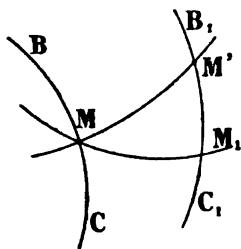


FIG. 25.

Au bout de l'intervalle de temps Δt , en vertu du mouvement d'entraînement, la trajectoire BC est venue en B_1C_1 , et le point M est venu en M_1 ; mais pendant l'intervalle Δt , en vertu du mouvement relatif, le point mobile s'est déplacé sur BC et a parcouru l'arc M_1M' de BC .

Ainsi, pendant le temps Δt , le point est venu de M en M' , de sorte que sa trajectoire absolue est MM' . Or on a :

$$V_e = \lim \frac{MM_1}{\Delta t}, \quad V_r = \lim \frac{M_1M'}{\Delta t},$$

$$V = \lim \frac{MM'}{\Delta t}.$$

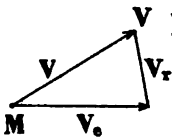


FIG. 26.

Lorsque Δt devient infiniment petit, si l'on remplace les arcs par leurs cordes, on voit que MM' est la résultante de MM_1 et de M_1M' . On peut donc dire, d'après cela, que la vitesse absolue d'un point en mouvement est la résultante de sa vitesse relative et de sa vitesse d'entraînement. Cette relation se traduit par l'égalité géométrique :

$$(V) = (V_r) + (V_e). \quad (1)$$

Pour raisonner par l'analyse, appelons x, y, z , les coordonnées absolues du point M (Fig. 24); X, Y, Z , ses coordonnées relatives; a, b, c , les coordonnées du point A. La position de chaque axe mobile par rapport aux axes fixes est déterminée par les cosinus directeurs des angles formés par cet axe avec Ox, Oy, Oz ; soient alors α, β, γ ; α', β', γ' ; $\alpha'', \beta'', \gamma''$ les cosinus directeurs des axes X, Y, Z . On a immédiatement, en projetant successivement sur Ox, Oy, Oz , le contour $AmPM$, et observant que AM est la somme géométrique des vecteurs $Am = X, mP = Y, PM = Z$,

$$\begin{aligned}x &= a + \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z; \\y &= b + \beta X + \beta' Y + \beta'' Z; \\z &= c + \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z.\end{aligned}$$

Différentiant ces équations, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \left(\alpha \frac{dX}{dt} + \alpha' \frac{dY}{dt} + \alpha'' \frac{dZ}{dt} \right) + \left(\frac{da}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} X + \frac{d\alpha'}{dt} Y + \frac{d\alpha''}{dt} Z \right), \\ \frac{dy}{dt} &= \left(\beta \frac{dX}{dt} + \beta' \frac{dY}{dt} + \beta'' \frac{dZ}{dt} \right) + \left(\frac{db}{dt} + \frac{d\beta}{dt} X + \frac{d\beta'}{dt} Y + \frac{d\beta''}{dt} Z \right), \\ \frac{dz}{dt} &= \left(\gamma \frac{dX}{dt} + \gamma' \frac{dY}{dt} + \gamma'' \frac{dZ}{dt} \right) + \left(\frac{dc}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} X + \frac{d\gamma'}{dt} Y + \frac{d\gamma''}{dt} Z \right).\end{aligned} \quad (2)$$

Les premiers membres de ces équations sont les composantes V_x, V_y, V_z , de la vitesse absolue du point M. Les premières parenthèses des seconds membres représentent les projections respectives sur Ox, Oy, Oz , de la vitesse relative de ce point. Quant aux secondes parenthèses, ce sont les dérivées respectives de x, y, z prises en regardant X, Y, Z comme constantes, c'est-à-dire en supposant le point M invariablement lié au système mobile; ces parenthèses sont donc les projections respectives sur les

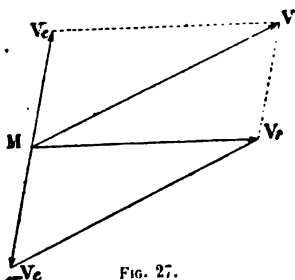


Fig. 27.

mêmes axes Ox, Oy, Oz de la vitesse d'entraînement. On peut donc dire, comme plus haut, que la vitesse absolue d'un point en mouvement est la somme géométrique de sa vitesse relative et de sa vitesse d'entraînement

De l'égalité (1) on déduit, en faisant passer V_c dans l'autre membre :

$$(V_r) = (V) + (-V_c).$$

Cette seconde égalité signifie que la vitesse relative du

point est la somme géométrique de sa vitesse absolue et de sa vitesse d'entraînement prise en sens contraire.

Au lieu de supposer le système $Oxyz$ fixe dans l'espace, on pourrait admettre qu'il est mobile et qu'il a à son tour, par rapport à un autre système fixe, un mouvement d'entraînement déterminé. On serait ainsi amené à considérer, pour un point M , son mouvement relatif par rapport au système mobile $A'X'Y'Z'$, le mouvement d'entraînement de ce système par rapport à un second système mobile $AXYZ$, enfin le mouvement d'entraînement de ce dernier par rapport au système fixe $Oxyz$, ainsi de suite.

Le théorème des vitesses se généralise sans difficulté : *la vitesse absolue est la somme géométrique de la vitesse relative et de toutes les vitesses d'entraînement.*

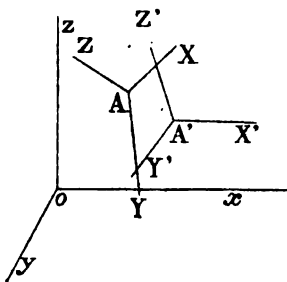


FIG. 28.

La Terre étant en mouvement dans l'espace, tous les mouvements observés à sa surface sont nécessairement des mouvements relatifs. La nature n'offre pas d'exemples de mouvements absolus, néanmoins on peut concevoir leur existence.

Mouvement apparent. — Le mouvement apparent d'un point M par rapport à un autre point O est le mouvement que le premier point paraît avoir pour un observateur placé au second point ; autrement dit, c'est le mouvement relatif du point M par rapport à l'observateur O .

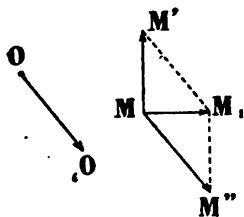


FIG. 29.

Soient, par exemple, MM' et OO' les vitesses absolues des points M et O ; cherchons le mouvement apparent du point M par rapport au point O . A cet effet, imprimons au système un mouvement d'entraînement dont la vitesse soit égale et contraire à celle de l'observateur, alors ce dernier devient

immobile, et le point M est animé de deux vitesses : l'une MM' ,

sa vitesse relative; l'autre MM' , sa vitesse d'entraînement; en les composant, on obtient MM_1 pour la vitesse du mouvement apparent.

L'observateur, placé en O, verra donc le point M se déplacer suivant la direction de la diagonale MM_1 , avec une vitesse représentée par la longueur de cette diagonale.

Par exemple, comme la Terre tourne autour du Soleil en décrivant une ellipse, pour un observateur placé sur la Terre T, le Soleil S a un mouvement apparent de rotation autour de la Terre.

Par conséquent, si l'observateur se croit immobile en T, le point fixe S lui semblera décrire une courbe $SS'S''...$ que l'on obtiendra en menant TS' égale et parallèle à $T'S$, TS'' égale et parallèle à $T'S'$, et ainsi de suite. Il est facile de voir que les deux courbes sont symétriques par rapport au milieu de ST. Par suite, la trajectoire apparente est une ellipse égale à la première.

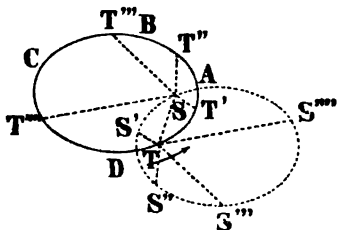


FIG. 30.

La considération des mouvements apparents rend compte d'une foule de phénomènes :

Quand on est en bateau à vapeur ou en chemin de fer, on croit voir courir les mai-

sons et les arbres; cela tient à ce que la vitesse apparente de ces objets est égale et contraire à celle du bateau ou du convoi.

Si deux convois A, B, dont les vitesses sont a, b , marchent dans le même sens, sur deux voies parallèles, la vitesse apparente du convoi B, pour les voyageurs appartenant à l'autre convoi, est $b - a$; suivant que cette différence est positive, nulle ou négative, le convoi B paraît avancer, stationner ou reculer. Si cette différence est assez faible, les voyageurs des deux trains pourront se voir et se parler, lors même que les vitesses a, b , seraient très grandes.

Quand les deux convois marchent en sens contraire, la vitesse apparente du convoi B devient $b + a$; les phénomènes apparents sont les mêmes que si un train C, animé de la vitesse $b + a$, passait devant un observateur immobile. On comprend dès lors la difficulté qu'éprouvent les voyageurs placés dans l'un des trains à voir nettement les autres voyageurs.

17. Méthode de Roberval pour le tracé des tangentes. —

Lorsqu'un point se déplace, sa vitesse est à chaque instant tangente à la trajectoire; par conséquent, si on se donne un point qui décrit une courbe, et si son mouvement peut

être décomposé, c'est-à-dire considéré comme résultant d'un mouvement relatif et d'un mouvement d'entraînement dont on connaît les vitesses respectives en grandeur et en direction on pourra en déduire la vitesse absolue, c'est-à-dire la direction de la tangente à la courbe.

Cycloïde. — C'est la courbe engendrée par un point M d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite fixe OX. Mais on peut encore dire que la cycloïde est la trajectoire d'un point qui se déplace sur un cercle d'un mouvement uniforme avec une vitesse V' , pendant que tous les points du cercle se déplacent parallèlement à une droite fixe OX, d'un mouvement uniforme et avec la même vitesse V' .

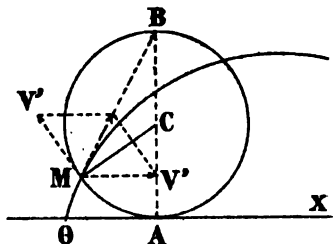


Fig. 31.

Ainsi, dans ce cas, puisque arc $MA = OA$, les vitesses relative et d'entraînement sont égales à V' ; la première est tangente au cercle, c'est-à-dire perpendiculaire au rayon MC , et la vitesse d'entraînement est parallèle à OX ; leur résultante est dirigée suivant la bissectrice de l'angle $V'MV'$; elle passe par le point B extrémité du diamètre CA . Donc MB est la tangente à la cycloïde au point M .

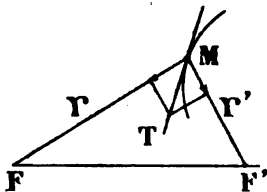


FIG. 32.

Hyperbole. — Soient F et F' les deux foyers ; la courbe est définie par l'équation :

$$r - r' = 2a.$$

En coordonnées polaires, F étant le pôle, la composante de la vitesse suivant le rayon vecteur MF est $\frac{dr}{dt}$; la composante suivant MF' est.

$\frac{dr'}{dt}$. La dérivée $\frac{dr}{dt}$ peut être considérée comme la vitesse relative du point M sur le rayon MF et $\frac{dr'}{dt}$ sa vitesse sur MF'.

Mais l'équation de la courbe donne:

$$\frac{dr}{dt} - \frac{dr'}{dt} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dr}{dt} = \frac{dr'}{dt};$$

les composantes de la vitesse suivant les rayons vecteurs MF et MF' sont donc égales et de même signe, par conséquent la vitesse est bissectrice de l'angle de ces rayons. On retrouve ainsi la propriété connue de la tangente à l'hyperbole d'être bissectrice de l'angle des rayons vecteurs du point de contact.

§ 2. — MOUVEMENT DES SYSTÈMES INVARIABLES

18. Translation. — La position d'un système invariable est déterminée dans l'espace quand on connaît celle de trois de ses points A, B, C , non en ligne droite; en effet la position d'un point quelconque M du système est donnée

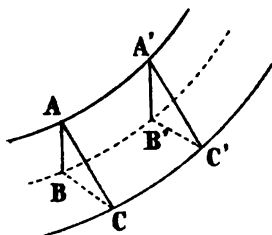


FIG. 33.

par l'intersection de trois sphères de centres A, B, C et de rayons égaux aux distances respectives MA, MB, MC . Ces trois sphères se coupent en deux points, mais il ne peut y avoir incertitude sur celui des deux points qu'il faut adopter, car la position initiale du système indique de quel côté du plan ABC est le point M :

Lorsque, dans le mouvement du système, les points A, B, C , décrivent des arcs de trajectoire AA', BB', CC' égaux, parallèles et de même sens, tous les autres points du système, en vertu de l'invariabilité, décrivent des arcs qui sont aussi égaux aux précédents, parallèles et de même sens. On dit alors que le mouvement du solide est une *translation*.

Dans un pareil mouvement, *tous les points du système sont animés à un instant quelconque d'une même vitesse*. On a, en effet, pour les vitesses V_a, V_b, V_c des points A, B, C :

$$V_a = \lim \frac{\text{arc } AA'}{\Delta t}, \quad V_b = \lim \frac{\text{arc } BB'}{\Delta t}, \quad V_c = \lim \frac{\text{arc } CC'}{\Delta t};$$

comme par hypothèse $\text{arc } AA' = \text{arc } BB' = \text{arc } CC'$, il en résulte que $V_a = V_b = V_c$. Réciproquement, si tous les

points du système, ou simplement trois points non en ligne droite, ont des vitesses égales, parallèles, de même sens, le mouvement est une translation.

L'accélération est aussi la même pour tous les points; en résumé, le mouvement d'un seul point du système fait connaître celui de tous les autres.

19. Rotation. — Lorsque deux points A et B d'un corps solide sont fixes, tous les points de la droite AB le sont aussi, de sorte que le solide ne peut que tourner autour de cette droite. Chaque point M du corps décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation AB, et dont le centre est en P sur cet axe; sa vitesse MV est donc normale au plan MAB et dirigée dans le sens du mouvement.

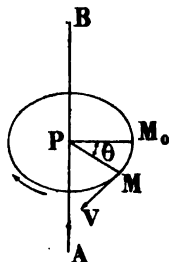


FIG. 34.

On se forme une idée nette du mouvement du solide en imaginant un plan fixe M_0AB et un plan mobile MAB tournant avec le solide; la position de ce second plan déterminant celle du solide et étant déterminée par le déplacement angulaire θ , il suffit évidemment que θ soit exprimé par une fonction connue du temps pour que le mouvement du solide soit déterminé.

Désignons par $d\theta$ le déplacement angulaire qu'éprouve le solide pendant un temps infiniment petit dt ; le rapport $\frac{d\theta}{dt}$ est par définition la *vitesse angulaire* de rotation à l'instant t ; on la désigne ordinairement par ω , de sorte que l'on a :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

Si ω est constant, la rotation est *uniforme*. En posant $PM = \rho$, on a pour la vitesse V du point M :

$$V = \rho \frac{d\theta}{dt} = \rho \omega;$$

ainsi, la vitesse d'un point quelconque du solide est égale au

produit de la vitesse angulaire au même instant par la distance de ce point à l'axe de rotation. Si $\rho = 1$, $V = \omega$, et l'on peut encore dire que la vitesse angulaire d'un solide n'est autre chose que la vitesse d'un point de ce solide situé à l'unité de distance de l'axe.

Pour déterminer les vitesses à un instant quelconque t dans un mouvement de rotation, il est indispensable de

connaître trois éléments :

l'axe de rotation, la vitesse angulaire et le sens de la rotation. On peut représenter symboliquement ces trois éléments de la façon suivante : fixons sur l'axe de rotation AB une certaine origine A , puis portons sur l'axe une longueur $A\omega$ égale à la valeur absolue de ω , et dans un sens tel que,

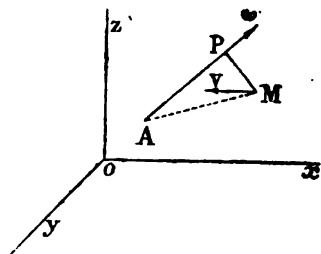


FIG. 35.

pour tout observateur couché le long de l'axe, les pieds en A et la tête en ω , le mouvement paraisse s'effectuer de gauche à droite dans le sens des aiguilles d'une montre. Le vecteur $A\omega$ ainsi défini représente les trois éléments de la rotation.

Soit $A\omega$ une rotation de vitesse ω ; supposons connus les coordonnées x_0, y_0, z_0 , du point A , les cosinus directeurs α, β, γ , de la droite $A\omega$, les coordonnées x, y, z , d'un point quelconque M du solide, et proposons-nous de déterminer les composantes V_x, V_y, V_z , de la vitesse MV de ce point.

En remarquant que la vitesse MV , perpendiculaire au plan $MA\omega$, est normale à l'axe $A\omega$ et à la droite AM , on peut écrire, d'après la formule qui donne le cosinus de l'angle de deux directions :

$$\begin{aligned} \alpha V_x + \beta V_y + \gamma V_z &= 0, \\ (x - x_0) V_x + (y - y_0) V_y + (z - z_0) V_z &= 0; \end{aligned}$$

mais d'autre part :

$$V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = \rho^2 \omega^2;$$

il ne reste plus qu'à dégager V_x , V_y , V_z de ces trois équations, dont les deux premières sont du premier degré; on trouve en faisant les calculs :

$$V_x = \omega [(z - z_0) \beta - (y - y_0) \gamma];$$

$$V_y = \omega [(x - x_0) \gamma - (z - z_0) \alpha];$$

$$V_z = \omega [(y - y_0) \alpha - (x - x_0) \beta].$$

Il est avantageux d'introduire dans ces formules les projections p , q , r du vecteur $A\omega$ sur les axes de coordonnées; on a pour cela :

$$p = \omega \alpha, \quad q = \omega \beta, \quad r = \omega \gamma;$$

par suite :

$$V_x = q (z - z_0) - r (y - y_0);$$

$$V_y = r (x - x_0) - p (z - z_0);$$

$$V_z = p (y - y_0) - q (x - x_0).$$

Lorsque les points O et A coïncident, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, et les formules deviennent :

$$V_x = qz - ry, \quad V_y = rx - pz, \quad V_z = py - qx. \quad (2)$$

Si l'axe de rotation est parallèle à OZ , on a $p = q = 0$, $r = \omega$ et, par conséquent,

$$V_x = -\omega y, \quad V_y = \omega x, \quad V_z = 0. \quad (3)$$

20. Mouvement d'une figure plane dans son plan. — La position d'une figure plane dans son plan est déterminée quand on connaît les positions de deux de ses points A et B , car tous les autres points de la figure tels que M peuvent être reliés invariablement aux points A et B par les longueurs constantes MA et MB .

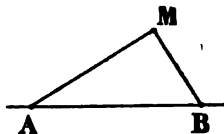


FIG. 38.

1° Mouvement élémentaire. — Soient Oxy deux axes fixes dans le plan, AXY deux axes invariablement liés à la figure mobile, et un point quelconque M de

cette figure. Désignons par a, b , les coordonnées du point A ; par x, y , les coordonnées du point M rapportées aux axes fixes ; par X, Y , les coordonnées du même point rapportées aux axes mobiles ; soit enfin α l'angle que fait AX avec Ox.

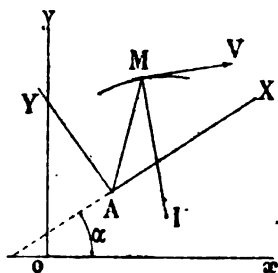


FIG. 37.

On a par le théorème des projections, en observant que AM est la résultante des coordonnées X et Y :

$$\begin{aligned} x &= a + X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ y &= b + X \sin \alpha - Y \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

Différentions pour avoir les composantes V_x et V_y de la vitesse du point M ; il vient, en posant $\frac{da}{dt} = a'$, $\frac{db}{dt} = b'$, $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$, et en observant que $\frac{da}{dt} = \frac{da}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt}$:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = (a' - X \sin \alpha - Y \cos \alpha) \omega = (a' - y + b) \omega,$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = (b' + X \cos \alpha - Y \sin \alpha) \omega = (b' + x - a) \omega.$$

Ces formules, dont les seconds membres s'annulent lorsque $a' - y + b = 0$ et $b' + x - a = 0$, montrent qu'il existe à chaque instant un point I du plan, et un seul, dont la vitesse est nulle ; désignons par x_1 et y_1 les coordonnées de ce point, on a :

$$x_1 = a - b', \quad y_1 = a' + b,$$

et les formules précédentes peuvent s'écrire :

$$V_x = -(y - y_1) \omega, \quad V_y = (x - x_1) \omega. \quad (2)$$

Si l'on suppose pour un instant les axes fixes transportés

parallèlement à eux-mêmes au point I, ces dernières formules se réduisent à :

$$V_x = -\omega y, \quad V_y = \omega x;$$

rapprochant ces formules des relations (3) (19), on voit que la vitesse du point M est la même que celle qui proviendrait d'une rotation instantanée de vitesse angulaire ω autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure et passant par I.

Ce point I de vitesse nulle, dont la position varie à chaque instant dans le plan, est appelé *centre instantané* de rotation. Chaque point M de la figure pouvant être amené à la position infiniment voisine M' par une rotation $d\alpha$ autour du centre instantané I, la vitesse de ce point normale à MI a pour expression :

$$V = \frac{MM'}{dt} = IM \frac{d\alpha}{dt}.$$

Il résulte immédiatement de ce qui précède que, si l'on considère les normales aux trajectoires que décrivent les différents points de la figure mobile à un même instant, ces normales vont toutes concourir au centre instantané correspondant à cet instant; on voit en effet que la vitesse MV du point M, qui a la direction de la tangente, est normale au rayon de rotation MI.

On peut parvenir aux conclusions précédentes par de simples considérations de géométrie élémentaire.

Soit AB la droite du plan à laquelle on rattache tous les points de la figure mobile; le mouvement de AB fait connaître celui de la figure.

Étant données deux positions F et F' de la figure, pour lesquelles la droite AB a les positions AB et A'B', on peut passer de l'une à l'autre de ces positions par une rotation autour d'un certain point I du plan. En effet, joignons AA' et BB', puis élevons sur le milieu de ces droites des perpendiculaires que nous supposons se couper en un certain point I. Les triangles AIB et A'IB' sont égaux comme ayant les trois côtés respectivement égaux, et l'égalité des angles AIB, A'IB' entraîne celle des angles AIA', BIB'. Donc, si la figure F tourne autour du point I de manière que A vienne en A', le point B vient en B', et la figure F coïncide avec F'.

La démonstration est en défaut lorsque les perpendiculaires à AA' et BB' en leurs milieux sont confondues; le quadrilatère $AA'B'B'$ est alors un trapèze isocèle, et le centre de rotation est le point de rencontre de AB et $A'B'$.

Il en est de même lorsque les perpendiculaires à AA' et BB' sont parallèles; alors AB et $A'B'$ sont parallèles, et le mouvement est une translation, c'est-à-dire une rotation dont le centre est rejeté à l'infini.

Considérons maintenant un déplacement infiniment petit de la

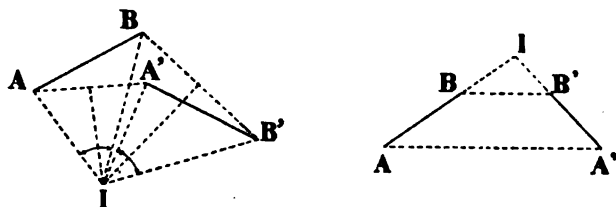


FIG. 38.

figure F ; les droites AA' et BB' deviennent les tangentes aux trajectoires de A et B ; les perpendiculaires à AA' et BB' sont les normales, et le point I est le centre instantané de rotation.

Lorsqu'une figure se déplace, pour obtenir le centre instantané à un instant quelconque, il suffit de construire deux des normales qui concourent en ce point. C'est ce qu'on peut faire immédiatement quand les deux points de la figure décrivent des lignes connues : droite, circonférence, ellipse, etc. Dans certains cas, on utilise les propriétés suivantes qui sont immédiates :

Lorsqu'une droite de la figure mobile passe constamment par un point fixe, le centre instantané appartient à la perpendiculaire élevée par ce point à la position qu'occupe la droite à l'instant considéré.

Lorsqu'une droite de la figure mobile reste constamment tangente à une courbe fixe, en un point variable, le centre instantané appartient à la perpendiculaire élevée par ce point à la position qu'occupe la droite à l'instant considéré.

2° Mouvement continu. — Pour se faire une idée du mouvement continu de la figure mobile, il faut considérer la courbe AIB trajectoire du centre instantané dans le plan fixe yOx (fig. 37), et la courbe $A'B'$ trajectoire relative du même point dans le plan mobile YOX . A un instant donné, la vitesse absolue du point I est tangente à la courbe AIB , sa vitesse relative est

tangente à la courbe AIB'; quant à sa vitesse d'entraînement, elle est nulle, puisque à l'instant considéré dans le mouvement de la figure mobile le point I est de vitesse nulle. Ainsi la vitesse relative de ce point a même direction et même grandeur que sa vitesse absolue, ce qui revient à dire : 1° que les courbes AIB et A'IB' ont même tangente au point commun I ; 2° que ce point I parcourt sur ses trajectoires absolue et relative des arcs égaux dans des temps égaux ; ou encore que la courbe mobile A'IB' roule sans glisser sur la courbe fixe AIB.

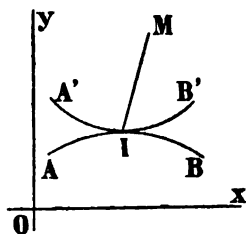


FIG. 38 bis.

Ainsi, le mouvement continu d'une figure plane dans son plan, quel qu'il soit, peut toujours être réalisé en faisant rouler sur une courbe fixe dans le plan une courbe invariablement liée à la figure mobile. La première est le lieu des centres instantanés de rotation dans le plan ; la seconde est le lieu de ce point dans la figure ; le point de contact des deux courbes à un instant donné est le centre instantané de rotation correspondant à cet instant.

3° Accélération. — Différentions les équations (2) pour obtenir les composantes de l'accélération du point M ; il vient, en remplaçant V_x et V_y par leurs valeurs :

$$J_x = -\frac{d\omega}{dt}(y - y_1) - \omega \times \left[\omega(x - x_1) - \frac{dy_1}{dt} \right].$$

$$J_y = \frac{d\omega}{dt}(x - x_1) + \omega \times \left[-\omega(y - y_1) - \frac{dx_1}{dt} \right].$$

Pour interpréter ces formules, déplaçons les axes fixes et prenons pour origine des coordonnées le centre instantané I à l'époque actuelle, pour axe des x la tangente commune aux courbes AB et A'B' prise dans le sens du roulement, et pour axe des y la normale à ces courbes du côté du centre de courbure de AB. Alors on a avec ces axes :

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad \frac{dx_1}{dt} = V, \quad \frac{dy_1}{dt} = 0;$$

et les composantes de l'accélération deviennent :

$$J_x = -y \frac{d\omega}{dt} - \omega^2 x, \quad J_y = x \frac{d\omega}{dt} - \omega^2 y - \omega V. \quad (3)$$

Ces expressions montrent que l'accélération peut être con-

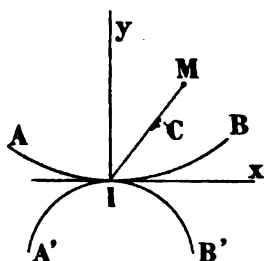


FIG. 30.

sidérée comme la résultante de trois vecteurs. Le premier, dont les composantes suivant les axes

sont $-y \frac{d\omega}{dt}$ et $x \frac{d\omega}{dt}$, a pour va-

leur absolue $IM \frac{d\omega}{dt}$, et sa direc-

tion est celle d'une perpendicu-

laire à IM faisant avec ce rayon

un angle égal à $\frac{\pi}{2}$ si $\frac{d\omega}{dt} > 0$. Le

second vecteur, dont les composantes suivant les axes sont $-\omega^2 x$ et $\omega^2 y$, a pour valeur absolue $\omega^2 MI$, et sa direction est MI. Enfin le troisième vecteur a pour projections 0 et $-\omega V$, c'est-à-dire que sa direction est celle de la perpendiculaire commune à la base et à la roulante A'B', du côté opposé au centre de courbure de AIB, si ω et V sont de même signe. En résumé, on peut écrire l'égalité géométrique :

$$(J) = \left(IM \frac{d\omega}{dt} \right) + (\omega^2 MI) + (\omega V).$$

Si l'on fait $J_x = J_y = 0$ dans les équations (3), elles deviennent :

$$y \frac{d\omega}{dt} + \omega^2 x = 0, \quad x \frac{d\omega}{dt} - \omega^2 y - \omega V = 0.$$

Ces deux équations du premier degré en x et y donnent généralement pour ces inconnues un système déterminé de valeurs, ce qui montre qu'il existe à chaque instant un point C de la figure mobile pour lequel l'accélération est

nulle. Ce point est le *centre instantané des accélérations*. On pourrait voir de la même façon qu'il existe à chaque instant un point de la figure mobile qui a une accélération donnée.

Enfin, si l'on suppose pour un instant les axes fixes transportés parallèlement à eux-mêmes au point C, on peut voir que l'accélération d'un point de la figure mobile à l'instant considéré est la même que si le mouvement était une rotation autour du centre des accélérations C.

On voit que, dans le mouvement d'une figure dans son plan, on peut définir la tangente à la trajectoire et la vitesse d'un point au moyen du centre instantané I, l'accélération du point au moyen du centre des accélérations C, de sorte que le mouvement se trouve ainsi complètement défini.

Comme application, cherchons le lieu des points du plan pour lesquels l'accélération normale est nulle. Si l'on observe que la normale à la trajectoire du point M est la droite MI dont les cosinus directeurs sont $\frac{x}{r}$ et $\frac{y}{r}$, en posant $MI = r$, on a pour le lieu des points ayant une accélération nulle :

$$xJ_x + yJ_y = 0,$$

ce que l'on peut écrire d'après les expressions de J_x et J_y :

$$x^2 + y^2 + \frac{V}{\omega} y = 0.$$

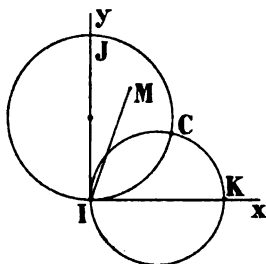


FIG. 40.

Le lieu est donc une *circonférence* qui passe par l'origine I et tangente en ce point à l'axe des x .

Pour tous les points de cette circonférence on a $J_n = \frac{V^2}{R} = 0$ (9),

de sorte que $R = \infty$ et $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; ainsi le point correspondant de la trajectoire de M est un point d'inflexion. Pour cette raison la circonférence en question est appelée *circonférence des inflexions*.

Cherchons encore le lieu des points du plan pour lesquels l'accélération tangentielle est nulle. On voit que la tangente à la trajectoire du point M est une perpendiculaire à IM qui a pour cosinus directeurs $\frac{y}{r}$ et $-\frac{x}{r}$; par suite, le lieu des points ayant une accéléra-

tion tangentielle nulle a pour équation :

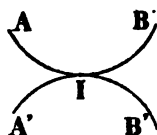
$$yJ_x - xJ_y = 0,$$

c'est-à-dire, en remplaçant J_x et J_y par leurs valeurs :

$$-(x^2 + y^2) \frac{d\omega}{dt} + \omega Vx = 0.$$

Le lieu est donc une autre circonférence passant par l'origine des coordonnées et tangente en ce point à l'axe des y ; elle rencontre la première circonférence en un point C, pour lequel l'accélération est nulle, et qui est précisément le centre des accélérations.

21. Mouvement épicycloïdal plan. — On donne ce nom à tout mouvement plan dans lequel une courbe mobile $A'B'$ roule sans glisser sur une autre courbe fixe AB . Si I est le point de contact actuel des deux courbes, et A et A' deux points qui ont coïncidé à un instant donné, on a d'après la définition ci-dessus :



point de contact actuel des deux courbes, et A et A' deux points qui ont coïncidé à un instant donné, on a d'après la définition ci-dessus :

$$\text{arc } A'I = \text{arc } AI.$$

FIG. 41.

La courbe mobile est la *roulante* et la courbe fixe la *base*; on donne le nom de *roulette* à la courbe décrite par un point quelconque du plan invariablement lié à la courbe mobile.

La géométrie offre de nombreux exemples de mouvements épicycloïdaux; ainsi, la cycloïde est la roulette décrite par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite fixe; cette dernière est la base et le cercle la roulante. Dans l'épicycloïde, la base et la roulante sont des cercles, le centre instantané est le point de contact, et la normale à la courbe passe par ce point. Enfin on a vu au paragraphe précédent que le mouvement général d'une figure plane dans son plan était un mouvement épicycloïdal.

PROBLÈME. — Une droite BC, de longueur invariable, glisse par ses extrémités sur deux droites données Ox, Oy; trouver à un instant donné le centre instantané de rotation, la normale à la trajectoire d'un point M de la droite, la base et la roulante.

Le lieu du point C de la figure mobile étant la droite indé-

finie Ox , le centre instantané I doit se trouver à chaque instant sur la normale à Ox , c'est-à-dire sur l'ordonnée du point C ; pour la même raison, il doit se trouver sur la perpendiculaire à Oy issue du point B ; il est par conséquent en I . Un point quelconque M de BC décrit une ellipse et MI est la normale à la courbe.

A chaque instant on a :

$$\overline{BI}^2 + \overline{IC}^2 = \overline{BC}^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 = \overline{BC}^2;$$

le lieu du point I dans le plan xOy , c'est-à-dire la base, est donc une circonférence de centre O et de rayon BC . Dans la figure mobile, prenons BC pour axe des X et la perpendiculaire élevée sur le milieu A de BC pour axe des Y ; on a : $AI = AB = AC$, et le triangle rectangle AIP donne

$$\overline{AP}^2 + \overline{PI}^2 = \overline{AI}^2,$$

ou

$$X^2 + Y^2 = \frac{\overline{AC}^2}{4}.$$

La roulante est donc une circonférence de centre A et de rayon $\frac{BC}{2}$; cette circonférence se déplace à chaque instant dans le plan, mais passe constamment par le point O .

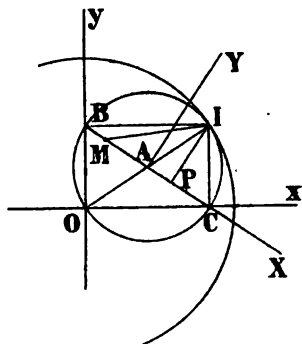


FIG. 42.

Dans un mouvement épicycloïdal, lorsqu'on donne la base

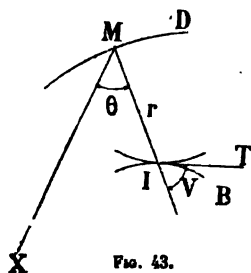


FIG. 43.

et la roulette décrite par un point M de la figure mobile, il peut être intéressant de connaître la roulante. Soient B la base, D la roulette du point M , I le centre instantané de rotation à une époque donnée; MI est normale à la roulette en M . Prenons un axe polaire MX invariablement lié à la figure mobile et posons $MI = r$, $\angle IMX = \theta$. L'équation de la roulante dans le plan mobile est la relation qui existe entre r et θ ; or, les

courbes B et D étant connues, il en est de même de

la relation :

$$r = f(V), \quad \text{d'où} \quad dr = f'(V) dV, \quad (1)$$

qui lie le rayon vecteur r à l'angle V que fait la tangente IT avec ce rayon; comme, d'autre part, on a :

$$\text{tang } V = \frac{rd\theta}{dr}, \quad \text{d'où} \quad d\theta = \frac{dr}{r} \text{ tang } V,$$

il en résulte :

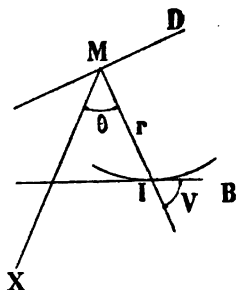
$$d\theta = \frac{f'(V)}{f(V)} \text{ tang } V dV,$$

et en intégrant :

$$\theta - \theta_0 = \int \frac{f'(V)}{f(V)} \text{ tang } V dV. \quad (2)$$

L'élimination de V entre les équations (1) et (2) conduit à la relation cherchée entre r et θ .

EXEMPLE. — La base B et la roulette D sont deux droites. Une normale quelconque MI à la roulette D coupe la base B sous un angle qui reste constant; par conséquent :



$$\text{tang } V = \frac{1}{a} = \frac{rd\theta}{dr},$$

a désignant une constante. On déduit de cette relation :

$$\frac{dr}{r} = a d\theta, \quad \text{et en intégrant : } Lr = a\theta;$$

si l'on passe des logarithmes aux exponentielles, on obtient l'équation :

$$r = e^{a\theta},$$

FIG. 44.

qui montre que la roulante cherchée est une spirale logarithmique ayant le point M pour pôle.

La base B étant toujours une ligne droite, la roulante est une parabole quand la roulette est une chaînette; c'est une ellipse quand la roulette est la courbe méridienne de l'onduloïde de Plateau; enfin, c'est une hyperbole quand la roulette est une *no-doïde*.

Rayon de courbure d'une roulette. — Lorsqu'on connaît les rayons de courbure de la base et de la roulante, on peut construire le rayon de courbure de la roulette décrite par un point M invariablement lié à la roulante.

Soient I le point de contact de la base B et de la roulante R ; O et O' , les centres de courbure au point I ; on a $R = OI$ et $R' = O'I$; soit enfin M un point entraîné dans le roulement de R sur B ; ce point décrit une roulette dont la normale en M est MI .

Posons $\angle MIO' = \varphi$, $IM = \delta$, et cherchons à déterminer le centre de courbure O_1 de la roulette en M , et, par suite, le rayon de courbure $O_1M = \rho$.

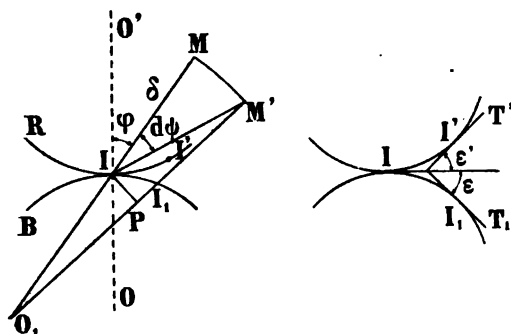


FIG. 45.

Au bout du temps infiniment petit dt , le point de contact I des deux courbes sera venu en I_1 sur la base, et c'est le point I' de la roulante, pour lequel arc $II' = \text{arc } II_1$, qui sera venu en I_1 . L'angle de rotation $d\psi$ est celui des deux tangentes I_1T_1 et $I'T'$, lequel est égal à la somme des angles de contingence ϵ et ϵ' ; ainsi on a $d\psi = \epsilon + \epsilon'$, ce que l'on peut écrire d'après la définition de la courbure, en posant arc $II' = ds$:

$$d\psi = \frac{ds}{R} + \frac{ds}{R'} = ds \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right).$$

D'autre part, soit M' la position de M quand les point I et

venu en I_1 ; la normale en I à la roulette est I_1M' ; les deux normales infiniment voisines IM et I_1M' se rencontrent en O_1 , qui est le centre de courbure cherché; d'ailleurs, pour venir de M en M' , le point M a tourné autour du centre I de l'angle de rotation $MIM' = d\psi$.

Mais le triangle $M'O_1I_1$ donne :

$$d\psi = IO_1M' + IM'O_1;$$

menons IP perpendiculaire sur O_1M' , on a :

$$IP = IO_1 \sin IO_1M' = IM' \sin IM'O_1,$$

et, si l'on remplace les sinus d'angles infiniment petits par les angles eux-mêmes, on peut encore écrire :

$$IP = (\rho - \delta) IO_1M' = \delta \cdot IM'O_1.$$

On déduit de ces relations :

$$IO_1M' = \frac{IP}{\rho - \delta}, \quad IM'O_1 = \frac{IP}{\delta},$$

puis :

$$d\psi = IP \left(\frac{1}{\rho - \delta} + \frac{1}{\delta} \right).$$

Sur la figure on a $IP = II_1 \cos I_1IP$, et l'angle I_1IP est égal à φ à un infiniment petit du premier ordre près $d\psi$, car II_1 , direction de la tangente à la base, est perpendiculaire à IO_1 , et IP est normale à O_1M' , qui fait un angle infiniment petit avec O_1M . On peut donc écrire :

$$IP = ds \cos \varphi,$$

et par suite :

$$d\psi = ds \cos \varphi \left(\frac{1}{\rho - \delta} + \frac{1}{\delta} \right).$$

Si l'on égale les deux expressions de $d\psi$ en supprimant le facteur commun ds , il vient :

$$\cos \varphi \left(\frac{1}{\rho - \delta} + \frac{1}{\delta} \right) = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$$

et enfin :

$$\frac{1}{\rho - \delta} + \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right). \quad (3)$$

Cette formule donne lieu à la construction suivante, qui a été indiquée par *Savary* : Menez par I la perpendiculaire ID à la normale MI et joignez le point M au centre de courbure O' de la roulante ; la droite MO' coupe ID au point D, et, si l'on joint ce point au centre de la courbure O de la base, la droite OD coupe MI au centre de courbure cherché O₁.

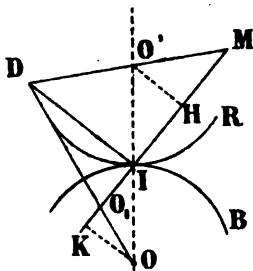


FIG. 46.

En effet, posons $MO_1 = \rho'$, et abaissons OK et O'H perpendiculaires sur MO₁ ; les triangles rectangles OKO₁ et DIO₁ sont semblables, ainsi que les triangles MO₁H et MDI ; on a donc les proportions :

$$\frac{OK}{O_1K} = \frac{DI}{IO_1}, \quad \frac{O'H}{MH} = \frac{DI}{MI},$$

d'où l'on déduit par élimination de DI :

$$\frac{IO_1 \times OK}{O_1K} = \frac{MI \times O'H}{MH},$$

ce que l'on peut écrire :

$$\frac{(\rho' - \delta) R \sin \varphi}{R \cos \varphi - (\rho' - \delta)} = \frac{\delta R' \sin \varphi}{\delta - R' \cos \varphi}.$$

Cette relation simplifiée se met facilement sous la forme (3), ce qui prouve que $\rho' = \rho$ et que le point O₁ est le centre de courbure de la roulette au point M.

Cycloïde. — Soit AX la base, O le cercle roulant. La cycloïde est la roulette décrite par un point M du cercle, ou par un point invariablement lié à ce cercle.

Le centre instantané de rotation est en I, point de contact du cercle et de la base, et MI est normale à la courbe ; la tangente MT passe par l'extrémité du diamètre IT du cercle, car l'angle TMI est droit. La cycloïde est dite *allongée* si le

la courbe. On peut considérer la podaire CD comme le lieu du sommet d'un angle droit MPO dont un côté MP reste tangent à une courbe AB, l'autre côté MO passant par un point fixe O.

Le centre instantané I est à l'intersection de la normale en M à la courbe AB et de la perpendiculaire en O à OP. La normale PI à la podaire en P passe par le milieu C' de MO.

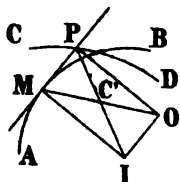


FIG. 49.

22. Enveloppe d'une courbe mobile.

— Considérons une courbe mobile dans le plan; soient C et C' deux positions infiniment voisines de cette courbe aux instants t et $t + dt$, M un point commun aux deux courbes, M' le point de C qui vient en M au bout du temps dt .

La perpendiculaire à MM' en son milieu passe par le centre instantané I; mais, à la limite, M et M' se confondent avec le point de contact de C et de son enveloppe; donc la perpendiculaire au milieu de MM' devient la normale à la courbe C au point de contact de cette courbe avec son enveloppe.

Ainsi, le point de contact d'une courbe mobile et de son enveloppe est à chaque instant le pied de la normale menée à la courbe mobile par le centre instantané de rotation.

Dans le problème page 43 l'enveloppe de BC touche cette droite au point P, pied de la perpendiculaire abaissée de I sur BC. L'équation de l'enveloppe s'écrit, en posant $BC = m$,

$$x^2 + y^2 = m^2;$$

cette courbe est une hypocycloïde.

Par un calcul analogue à celui du précédent paragraphe, on peut obtenir le rayon de courbure de l'enveloppe d'une courbe mobile C connaissant les rayons de courbure de la base B, de la roulante R, et de la courbe C.

Si l'on appelle : R, le rayon de courbure de la base; R',

celui de la roulante; ρ' , celui de la courbe C; ρ , le rayon de l'enveloppe E; δ , la longueur IM de la normale à la courbe C issue du centre instantané I, on obtient la relation :

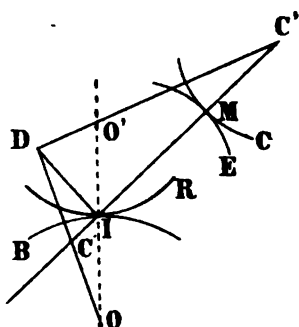


Fig. 51.

$$\frac{1}{\rho - \delta} + \frac{1}{\rho' - \delta} = \frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right). \quad (4)$$

Cette relation se traduit par la construction suivante : menez en I la perpendiculaire ID à la normale MI, joignez les centres de courbure C' et O' de la courbe C et de la roulante ; la droite C'O' rencontre ID

au point D, et, si l'on joint ce point au centre de courbure O de la base, la droite OD coupe MI au point C, centre de courbure de l'enveloppe en M.

23. Mouvement d'un corps solide qui reste parallèle à un plan fixe. — Dans ce cas, chaque point du solide reste à une distance constante du plan fixe P, c'est-à-dire que tous les points décrivent des trajectoires parallèles au plan P.

Un plan quelconque P' parallèle au plan P coupe le solide suivant une certaine figure plane F, et le mouvement du solide est déterminé quand on connaît le mouvement de la figure F dans son plan.

Le mouvement élémentaire de la figure F étant une rotation instantanée autour du centre I, celui du solide sera une rotation instantanée autour d'un axe perpendiculaire au plan fixe en I.

Le mouvement du solide pendant un temps fini peut se réaliser en faisant rouler sans glissement sur un cylindre fixe, lieu des axes instantanés de rotation dans l'espace, un cylindre mobile, lieu des axes instantanés dans le solide. Autrement dit, *le mouvement général d'un corps solide parallèlement à un plan fixe est un roulement cylindrique.*

24. Mouvement d'un corps solide qui a un point fixe. — Dans ce cas, chacun des points du solide, restant à une distance constante du point fixe O , décrit une sphère de centre O .

Considérons une sphère de centre O , qui découpe dans le solide une certaine figure F ; le mouvement du solide dans l'espace est déterminé quand on connaît le mouvement de la figure F sur sa sphère.

Mais les considérations géométriques développées au numéro 20 s'appliquent à une figure sphérique qui se déplace sur sa

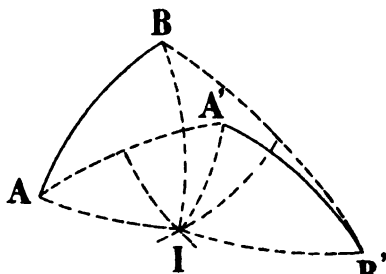


FIG. 52.

sphère; et l'on peut dire que le mouvement instantané le plus général d'une figure sphérique sur sa sphère est une rotation autour d'un certain point I de la surface de cette sphère, qu'on peut appeler le *pôle instantané* de rotation, ou, ce qui revient au même, autour du diamètre qui passe par ce pôle. Cette extension du théorème du centre instantané se démontre d'une manière identique, et l'on peut même se servir de la figure 38, en y regardant les lignes

droites comme des arcs de grands cercles d'une même sphère. Il n'y a de différence entre les deux théories qu'en ce que, dans le cas d'une figure sphérique, la rotation ne peut jamais se changer en une translation.

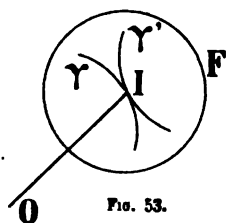


FIG. 53.

L'ensemble des pôles instantanés formera sur la sphère une certaine courbe γ , et sur la figure sphérique une autre courbe γ' . Si l'on déplace la figure F sur la sphère de manière que la courbe γ roule sans glissement sur la courbe γ' , on reproduira le mouvement effectif de cette figure.

Le mouvement de la figure F sur sa sphère faisant connaître celui du solide dans l'espace, et le mouvement élémentaire de la figure sphérique étant une rotation autour du diamètre de la sphère qui passe par le point I , on voit que le mouvement instantané du corps solide sera aussi une rotation autour du diamètre de la sphère qui passe par le point I .

Ainsi, dans le mouvement d'un corps solide qui a un point fixe, *la vitesse d'un point quelconque du solide est à chaque instant la même en grandeur et en direction que si ce solide tournait actuellement autour d'un axe instantané passant par le point fixe.*

Pour se figurer le mouvement réel du solide pendant un temps fini, il faut considérer le cône fixe de sommet O , lieu des axes instantanés dans l'espace, et le cône mobile de même sommet O , lieu des axes instantanés dans le solide même. Alors, *le cône mobile roule sur le cône fixe et la génératrice commune aux deux cônes est l'axe instantané de rotation.*

Le cône fixe a pour directrice sur la sphère O la courbe γ , et le cône mobile a pour directrice sur la même sphère la courbe γ' .

25. Composition des mouvements. — Le problème de la composition des mouvements a pour objet de déterminer le mouvement absolu d'un point matériel ou d'un corps solide, lorsqu'on connaît son mouvement relatif par rapport à un système de comparaison mobile dont il fait partie, et le mouvement d'entraînement de ce système (16). Ce problème et son inverse, qui consiste à déterminer le mouvement relatif, ou le mouvement d'entraînement, connaissant l'un d'eux et le mouvement absolu, ont des applications nombreuses en cinématique.

Par exemple, nous verrons plus loin que le mouvement élémentaire le plus général d'un corps solide est une rotation autour d'un axe, accompagnée d'une translation parallèle à cet axe.

Lorsqu'un corps est animé de plusieurs mouvements simultanés, on est conduit à composer entre elles un certain nombre de translations et de rotations. Considérons d'abord le cas des translations.

26. Composition des translations. — Soient un système d'axes $AXYZ$ animé d'une translation d'entraînement de vitesse V_e , et un solide S animé, par rapport à ce système, d'une translation relative de vitesse V_r .

D'après ce que l'on a vu au paragraphe 16, chaque point M du solide est animé d'une vitesse absolue qui est la somme géométrique des vitesses V_r et V_e ; mais, d'après la définition d'une translation, ces vitesses sont respectivement les mêmes au même instant pour tous les points du solide; il suit de là qu'à un instant donné les vitesses absolues de tous les points de S sont égales, ce qui revient à dire que ce solide est animé d'une translation

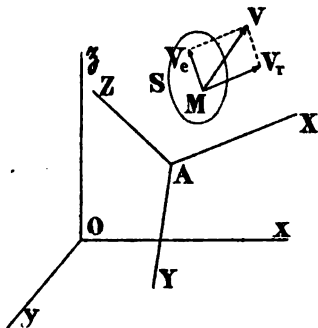


FIG. 54.

unique dont la vitesse est la résultante des deux vitesses V_r et V_e . Ainsi, deux translations peuvent se composer en une seule. On verrait de même qu'un nombre quelconque de translations peuvent se composer en une seule dont la vitesse est la somme géométrique des vitesses de ces translations.

27. Composition des rotations. — *Rotations concourantes.* — Soient, à un instant donné, $OXYZ$ un système invariable animé d'une rotation d'entraînement de vitesse angulaire ω' autour d'un axe $O\omega'$; S , un solide animé au même instant, par rapport à ce système, d'une rotation relative de vitesse angulaire ω'' autour d'un axe $O\omega''$. Désignons respectivement par p', q', r' et p'', q'', r'' , les projections, suivant les axes fixes Ox, Oy, Oz , des vecteurs $O\omega'$ et $O\omega''$; soient enfin x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M du solide S .

Les composantes suivant les axes $Oxyz$ de la vitesse d'entraînement du point M à l'instant considéré sont (19) :

$$q'z - r'y, \quad r'x - p'z, \quad p'y - q'x;$$

celles de sa vitesse relative au même instant sont de même :

$$q'z - r'y, \quad r'x - p'z, \quad p'y - q'x;$$

enfin, celles de sa vitesse absolue sont par conséquent :

$$\begin{aligned} (q' + q'')z - (r' + r'')y, \\ (r' + r'')x - (p' + p'')z, \\ (p' + p'')y - (q' + q'')x. \end{aligned}$$

Ces formules montrent que le point M a même vitesse à

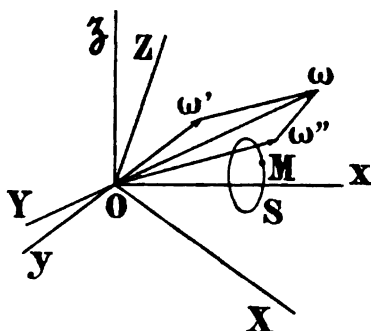


FIG. 55.

un instant quelconque que s'il était entraîné par la seule rotation $O\omega$ ayant pour composantes $p' + p'', q' + q'', r' + r''$; ce qui revient à dire que les vitesses de tous les points du solide S sont les mêmes, à un instant donné, que si ce solide était animé d'une rotation unique $O\omega$ dont le vecteur représentatif serait la somme géométrique des vecteurs re-

présentatifs des rotations $O\omega', O\omega''$. On exprime ce fait en disant que *deux rotations concourantes se composent en une seule dont le vecteur représentatif est la résultante des vecteurs des rotations composantes*. On composerait de la même façon un nombre quelconque de rotations concourantes. Le vecteur résultant serait toujours égal à la somme géométrique des vecteurs composants.

Rotations parallèles. — Si le système mobile et le solide S étaient animés simultanément de deux rotations parallèles $A'\omega'$ et $A''\omega''$, on verrait encore que ces rotations se composent en une seule $A\omega$ parallèle aux deux premières, égale à leur somme, et dont le point A où son axe rencontre $A'A''$

serait déterminé par les relations :

$$\frac{\omega'}{A'A} = \frac{\omega''}{AA'} = \frac{\omega}{A'A'} \quad (1)$$

En effet, prenons le point A' pour origine et $A'A'$ pour axe des x ; appelons x_0 l'abscisse du point A' . Les composantes de la vitesse d'entraînement du point M sont, en observant que $A'\omega'$ coïncide avec Oz (19) :

$$\begin{aligned} V'_x &= -\omega'y, & V'_y &= \omega'x, \\ V'_z &= 0; \end{aligned}$$

les composantes de la vitesse relative de M autour de $A'\omega'$ sont au même instant :

$$\begin{aligned} V''_x &= -\omega''y, \\ V''_y &= \omega''(x - x_0), & V''_z &= 0; \end{aligned}$$

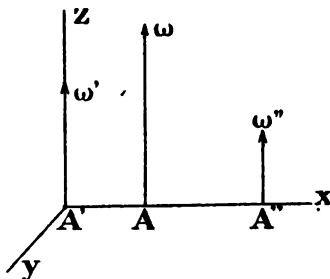


FIG. 56.

par conséquent les composantes de la vitesse absolue sont :

$$V_x = -(\omega' + \omega'')y, \quad V_y = (\omega' + \omega'')x - \omega'x_0.$$

Si l'on pose :

$$\omega''x_0 = (\omega' + \omega'')\delta, \quad (2)$$

les expressions de la vitesse absolue deviennent :

$$V_x = -(\omega' + \omega'')y, \quad V_y = (\omega' + \omega'')(x - \delta).$$

Sous cette forme, on voit que le mouvement absolu du point M est une rotation de vitesse angulaire $\omega' + \omega''$ autour d'un axe $A\omega$ parallèle à Oz et qui rencontre $A'A'$ au point A d'abscisse δ ; on a d'ailleurs, d'après (2) :

$$\frac{\omega''}{\delta} = \frac{\omega' + \omega''}{x_0} = \frac{\omega'}{x_0 - \delta},$$

ce qui n'est autre chose que la suite de rapports (1).

On composerait de la même façon deux rotations parallèles et de sens contraires, et, par suite, un nombre quelconque de rotations parallèles.

Couple de rotations. — Le cas de deux rotations parallèles égales et de sens contraires $A'\omega'$ et $A''\omega''$ offre une particularité remarquable. Soient M un point quelconque du plan des deux rotations, et ρ' , ρ'' les distances de ce point aux deux

vecteurs égaux $A'\omega'$, $A''\omega''$; la vitesse absolue de M a pour valeur :

$$V = \rho''\omega' - \rho'\omega'' = (\rho'' - \rho')\omega' = A'A''\omega' = \text{const}^e,$$

et elle tend à donner à M un déplacement normal à MA' et $A''\omega''$.

On voit donc que, à un instant donné, tous les points du plan des deux rotations et,

par suite, tous les points du système mobile sont animés d'une même vitesse; ceci revient à dire que ce système est animé d'une translation dont la direction est normale au plan des deux axes. On exprime ce fait en disant qu'un couple de rotations équivaut à une translation perpendiculaire au plan des deux axes.

Pour résumer ce qui précède, nous dirons que l'emploi des vecteurs représentatifs des rotations permet de composer ces rotations à la manière des forces en statique.

Rotations dont les axes ne sont pas dans un même plan. — Soient les deux rotations $A'\omega'$ et $A''\omega''$ dont les axes ne sont pas situés dans un même plan. Par le point A' , menons deux vecteurs $A'B$ et $A'B'$ parallèles et égaux

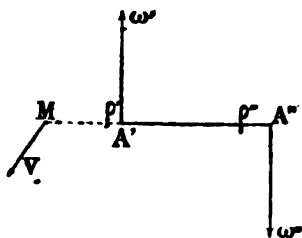


FIG. 57.

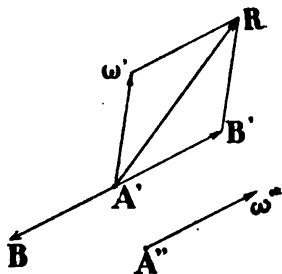


FIG. 58.

à $A'\omega'$ et directement opposés; ces vecteurs peuvent être considérés comme des rotations, lesquelles donnent pour tout point de l'espace des déplacements égaux et de sens contraires, c'est-à-dire ne changent rien au mouvement élémentaire.

Composons $A'\omega'$ et $A'B'$; on obtient une rotation dont le vecteur est $A'R$, et il reste les rotations $A'B$ et $A'\omega''$, qui constituent un couple de rotations, c'est-à-dire une translation perpendiculaire au plan $A'A'\omega''$. On a donc à composer une rotation $A'R$ et une translation oblique à cet axe. Le mouvement résultant est hélicoïdal (29).

28. Composition des translations et des rotations. — Translation normale à l'axe de rotation. — Soient un système d'axes $AXYZ$ animé d'une translation d'entraînement de vitesse V' , et un solide S animé, par rapport à ce système, d'une rotation relative de vitesse angulaire ω' autour d'un axe $A\omega'$ normal à la direction de V' .

Supposons la vitesse V' parallèle à AX , alors l'axe $A\omega'$ peut se confondre

avec AZ . Si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du point A à un instant donné, et x, y, z celles d'un point M du solide, on a $V'_x = V'_y = V'_z = 0$, et les composantes de la vitesse absolue du point M sont (19) :

$$V_x = V' - \omega' (y - y_0), \quad V_y = \omega' (x - x_0), \quad V_z = 0.$$

Posons $V' = \omega' \delta$, alors on peut écrire :

$$V_x = -\omega' (y - y_0 - \delta), \quad V_y = \omega' (x - x_0), \quad V_z = 0.$$

Ces relations montrent que le mouvement absolu du

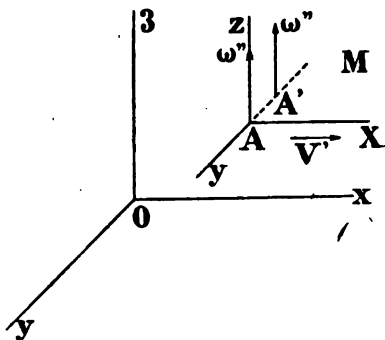


FIG. 59.

point M est une rotation de vitesse angulaire ω' autour d'un axe $A'\omega'$ parallèle à $A\omega$. Le point A' est situé sur AY à une distance du point A égale à δ .

Ainsi, une rotation et une translation perpendiculaires se composent en une rotation unique de même sens et de même vitesse angulaire que ceux de la rotation proposée, et autour d'un axe parallèle

Translation oblique à l'axe de rotation. — Dans ce cas, on peut toujours décomposer la translation donnée en deux autres, l'une perpendiculaire à l'axe de la rotation et l'autre parallèle à cet axe. La première composante donne avec la rotation une rotation de même sens et de même vitesse autour d'un axe parallèle. En fin de compte on est ramené à composer une rotation et une translation parallèle à l'axe, ce qui donne un mouvement hélicoïdal.

29. Mouvement général d'un corps solide libre. — **Axe hélicoïdal.** — A cause de l'importance du sujet, nous le traiterons par la géométrie et par l'analyse.

Mouvement élémentaire. — I. Considérons dans le corps solide un point A quelconque, et soit A' la position de ce point après le déplacement instantané.

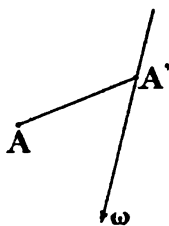


FIG. 60.

On peut toujours remplacer le mouvement réel du corps : 1° par une translation égale et parallèle à AA' , et en vertu de laquelle le point A serait transporté en A' ; 2° par un mouvement instantané convenable autour du point A' . Or le mouvement élémentaire d'un corps solide autour d'un point fixe est une rotation autour d'un axe passant par ce point; on voit donc que le mouvement réel sera

remplacé par une translation et une rotation. Mais on sait que ces deux mouvements peuvent toujours être remplacés par deux mouvements du même genre, dans lesquels la translation est parallèle à l'axe de rotation (28). Donc, en définitive, le mouvement élémentaire du corps se compose d'une rotation et d'une translation parallèle à l'axe de rotation, c'est-à-dire que ce mouvement élémentaire est analogue à celui d'une vis dans son écrou. Cette théorie est due à

Poinsot, qui a nommé *axe instantané de rotation et de glissement* l'axe suivant lequel a lieu la translation et autour duquel s'effectue la rotation.

II. Rapportons le mouvement du solide à trois axes fixes *Oxyz*, et prenons dans le solide même, ou invariablement liés avec lui, trois axes mobiles *AX, AY, AZ*; chaque point *M* du corps sera invariablement lié à ces axes mobiles, et le mouvement de ce système d'axes fera connaître celui du solide. Désignons alors par *a, b, c*, les coordonnées du point *A*; par *x, y, z*, les coordonnées du point *M* rapportées aux axes fixes; par *X, Y, Z*, les coordonnées du même point rapportées aux axes mobiles; soient enfin, par rapport aux axes fixes : α, β, γ , les cosinus directeurs de *AX*; α', β', γ' , ceux de *AY*; $\alpha'', \beta'', \gamma''$, ceux de *AZ*.

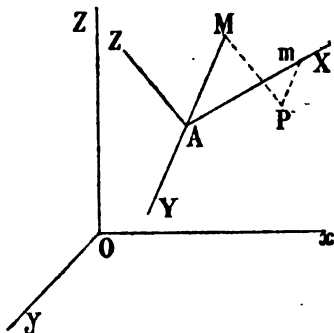


FIG. 81.

On a comme au numéro 16 :

$$\begin{aligned} x &= a + \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z; \\ y &= b + \beta X + \beta' Y + \beta'' Z; \\ z &= c + \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z. \end{aligned} \quad (1)$$

Mais cette fois les coordonnées *X, Y, Z* sont des constantes pour un même point *M* du solide, car, d'après l'hypothèse, ce point est invariablement lié aux axes mobiles. En différenciant par rapport au temps, on obtient pour les composantes V_x, V_y, V_z de la vitesse *V* du point *M* :

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{da}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} X + \frac{d\alpha'}{dt} Y + \frac{d\alpha''}{dt} Z; \\ V_y &= \frac{db}{dt} + \frac{d\beta}{dt} X + \frac{d\beta'}{dt} Y + \frac{d\beta''}{dt} Z; \\ V_z &= \frac{dc}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} X + \frac{d\gamma'}{dt} Y + \frac{d\gamma''}{dt} Z. \end{aligned} \quad (2)$$

Il est commode, pour interpréter ces équations, de considérer les composantes V_x , V_y , V_z de la vitesse V suivant les axes mobiles; le théorème des projections donne encore :

$$\begin{aligned} V_x &= \alpha V_x + \beta V_y + \gamma V_z; \\ V_y &= \alpha' V_x + \beta' V_y + \gamma' V_z; \\ V_z &= \alpha'' V_x + \beta'' V_y + \gamma'' V_z. \end{aligned}$$

Remplaçons dans ces formules V_x , V_y , V_z par leurs valeurs (2); pour cela, remarquons d'abord que des relations connues :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \quad \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1,$$

on déduit en différentiant par rapport à t :

$$\begin{aligned} \alpha \frac{d\alpha}{dt} + \beta \frac{d\beta}{dt} + \gamma \frac{d\gamma}{dt} &= 0, & \alpha' \frac{d\alpha'}{dt} + \beta' \frac{d\beta'}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma'}{dt} &= 0, \\ \alpha'' \frac{d\alpha''}{dt} + \beta'' \frac{d\beta''}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma''}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Mais, d'autre part, on a aussi les relations d'orthogonalité :

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \quad \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0, \quad \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0,$$

qui donnent, en différentiant et représentant successivement par p , q , r la valeur commune des deux membres de chaque équation :

$$\begin{aligned} \alpha' \frac{d\alpha'}{dt} + \beta' \frac{d\beta'}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma'}{dt} &= - \left(\alpha' \frac{d\alpha}{dt} + \beta' \frac{d\beta}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma}{dt} \right) = p; \\ \alpha \frac{d\alpha''}{dt} + \beta \frac{d\beta''}{dt} + \gamma \frac{d\gamma''}{dt} &= - \left(\alpha' \frac{d\alpha}{dt} + \beta' \frac{d\beta}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma}{dt} \right) = q; \\ \alpha' \frac{d\alpha}{dt} + \beta' \frac{d\beta}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma}{dt} &= - \left(\alpha \frac{d\alpha'}{dt} + \beta \frac{d\beta'}{dt} + \gamma \frac{d\gamma'}{dt} \right) = r. \end{aligned}$$

On obtient enfin après substitution et réduction, en désignant par P , Q , R les composantes suivant les axes mobiles de la vitesse de l'origine A de ces axes,

$$\begin{aligned} V_x &= P + qZ - rY; \\ V_y &= Q + rX - pZ; \\ V_z &= R + pY - qX. \end{aligned} \tag{3}$$

Ces équations montrent qu'à un instant donné la vitesse MV du point M est la somme géométrique de deux vitesses : l'une MV' dont les composantes P, Q, R sont précisément celles de la vitesse du point A ; le seconde MV'' dont la grandeur dépend des coordonnées X, Y, Z du point M et qui a pour composantes $qZ - rY, rX - pZ, pY - qX$. Il résulte d'ailleurs des formules du paragraphe 19 que cette seconde vitesse est celle qui provient d'une rotation ω autour d'un axe issu du point A et dont les composantes sur les axes mobiles sont p, q, r .

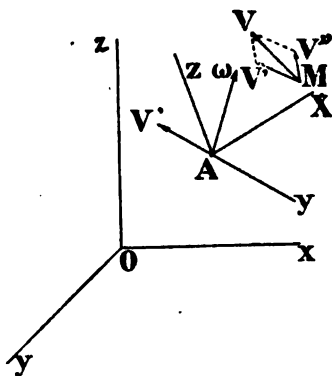


FIG. 62.

On peut donc dire que la vitesse d'un point quelconque M du corps est à chaque instant la résultante d'une vitesse de translation égale à la vitesse d'un autre point quelconque A du corps et d'une vitesse de rotation autour d'un axe passant par A .

La vitesse de translation dépend du choix du point A dans le solide ; mais les composantes p, q, r de la rotation sont indépendantes des coordonnées a, b, c de ce point ; ce qui revient à dire que la grandeur et la direction de l'axe de rotation restent les mêmes, quel que soit le point A choisi dans le corps.

Cherchons s'il existe dans le solide considéré des points pour lesquels la vitesse est parallèle à l'axe de rotation. On doit avoir, en écrivant que MV est parallèle à ω :

$$\frac{V_x}{p} = \frac{V_y}{q} = \frac{V_z}{r},$$

c'est-à-dire, d'après (3) :

$$\frac{P + qZ - rY}{p} = \frac{Q + rX - pZ}{q} = \frac{R + pY - qX}{r}.$$

Ces équations, qui sont des fonctions de X, Y, Z , sont celles d'une droite parallèle à l'axe $A\omega$; on voit, en effet, que la parallèle à cette droite menée par le point A contient bien le point de coordonnées $X = p, Y = q, Z = r$.

Ainsi, dans le mouvement général d'un corps solide, il y a à chaque instant une droite, et une seule, dont tous les points ont une vitesse commune de translation dirigée suivant cette droite. Les vitesses des autres points sont les sommes géométriques de deux vitesses dues, l'une à un mouvement de translation égal et parallèle à celui de cette droite, l'autre à un mouvement de rotation autour de cette ligne.

Cette droite remarquable est précisément l'axe instantané de rotation et de glissement; on l'appelle encore *axe hélicoïdal*.

On peut donc dire, pour résumer ce qui précède, que *la vitesse d'un point quelconque d'un solide en mouvement est à chaque instant la même en grandeur et en direction que si ce solide tournait actuellement autour de l'axe hélicoïdal en même temps qu'il glisse le long de cet axe.*

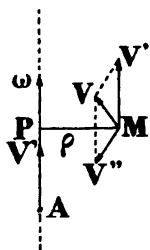


FIG. 63.

Soient $A\omega$ l'axe hélicoïdal, $AV' = V'$ la vitesse de translation du solide à l'instant considéré, et un point M de ce solide situé à la distance ρ de l'axe. La vitesse MV' due à la rotation est perpendiculaire au plan $MA\omega$ et a pour expression $MV' = \rho\omega$; la vitesse MV due à la translation est parallèle à l'axe $A\omega$;

la vitesse totale MV est donc située dans un plan perpendiculaire au rayon ρ et a pour expression :

$$V^2 = \omega^2 \rho^2 + V'^2, \quad \text{avec} \quad \tan \angle VMV' = \frac{\omega \rho}{V'}.$$

On voit que la projection de la vitesse MV sur l'axe hélicoïdal est égale à MV' , c'est-à-dire à la vitesse V' de translation du solide à l'instant considéré; cette projection est donc la même à chaque instant pour tous les points du solide. Cette remarque fournit un moyen simple pour déterminer l'axe hélicoïdal quand on connaît les vitesses de trois points

du solide. Soient, en effet, M_1V_1 , M_2V_2 , M_3V_3 les vitesses de trois points M_1 , M_2 , M_3 du solide; par un point O menons les vecteurs OA_1 , OA_2 , OA_3 respectivement parallèles et égaux aux précédents et de même sens. Du point O menons OV perpendiculaire sur le plan $A_1A_2A_3$; l'axe instantané de rotation et de glissement est parallèle à OV et le segment OV est la vitesse de translation à l'instant considéré.

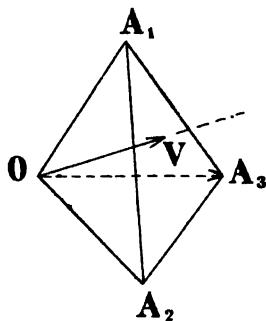


FIG. 64.

Mouvement continu. — La position du point A et la direction de l'axe hélicoïdal $A\omega$ varient à chaque instant dans l'espace, de sorte que le mouvement hélicoïdal n'a réellement lieu que pendant un temps infiniment petit; pour se faire une idée du mouvement continu du solide, il faut considérer la surface réglée fixe lieu des axes instantanés dans l'espace, et une seconde surface réglée invariablement liée au solide, se déplaçant avec lui, et qui est le lieu des positions successives de l'axe hélicoïdal dans le solide même. On peut alors se figurer le mouvement réel en disant que la surface réglée mobile roule sur la surface réglée fixe, en même temps qu'elle glisse le long de la génératrice de contact avec une certaine vitesse, emportant avec elle le solide.

30. REMARQUES. — L'analyse précédente étant indépendante des considérations géométriques développées aux numéros 23 et 24, on peut en déduire comme corollaires la théorie du mouvement d'un corps qui a un point fixe, ou qui se déplace parallèlement à un plan fixe.

1° Le mouvement élémentaire hélicoïdal suppose essentiellement que le corps solide considéré est libre dans l'espace; quand ce solide est fixé par un de ses points, rien n'empêche de prendre ce point comme origine commune O des axes fixes et des axes mobiles; la vitesse de translation V , qui est aussi celle du point fixe O , cesse alors d'exister, et les différents points du corps ne sont plus soumis, à un instant donné, qu'à la vitesse de rotation autour de l'axe $O\omega$.

Ainsi, le mouvement élémentaire d'un solide qui a un point fixe O est une rotation instantanée autour d'un axe passant par ce point fixe (21).

2° Si l'on rejette le point O à l'infini dans une direction perpendiculaire au plan fixe, alors les axes instantanés de rotation sont tous parallèles entre eux, et le mouvement élémentaire du solide est une rotation instantanée autour d'un axe perpendiculaire au plan fixe (23);

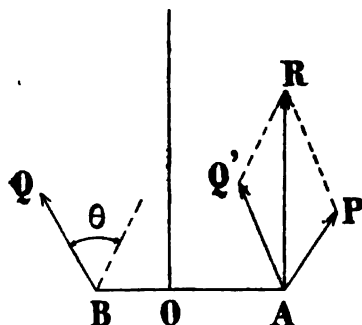


FIG. 65.

3° Le mouvement élémentaire d'un solide peut être regardé comme résultant de deux rotations autour d'axes non situés dans un même plan. En effet, soient AB la perpendiculaire commune aux deux axes, $AP = \omega'$, $BQ = \omega''$, les vecteurs qui repré-

sentent les deux rotations, θ leur angle. Menons AQ' égal et parallèle à BQ ; les rotations ω' et ω'' ont une résultante $AR = \omega$, et l'on a les relations :

$$\frac{\omega'}{\sin(\omega, \omega')} = \frac{\omega''}{\sin(\omega, \omega'')} = \frac{\omega}{\sin \theta}.$$

Décomposons ω' et ω'' chacune en deux rotations, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à AR ; les rotations parallèles à AR ont une résultante $\omega = \omega' \cos(\omega', \omega) + \omega'' \cos(\omega'', \omega)$; l'axe de cette rotation rencontre AB à angle droit en un point O tel que, si l'on fait $OA = a$, $OB = b$, $AB = c$, on a les proportions :

$$\frac{a}{\omega' \cos(\omega', \omega)} = \frac{b}{\omega'' \cos(\omega'', \omega)} = \frac{c}{\omega},$$

$$\frac{a}{\omega'^2 + \omega' \omega'' \cos \theta} = \frac{b}{\omega''^2 + \omega' \omega'' \cos \theta} = \frac{c}{\omega^2}.$$

Les rotations perpendiculaires à AR donnent un couple équivalent à une translation dont la vitesse V' , parallèle à ω , est :

$$V' = c \omega' \sin(\omega', \omega) = c \frac{\omega' \omega''}{\omega} \sin \theta.$$

On voit donc que le système des deux rotations ω' et ω'' peut être remplacé par une rotation ω et une translation de vitesse V' parallèle à ω ; mais il y a une infinité de manières de choisir les

axes des deux rotations, de façon que le mouvement hélicoïdal résultant coïncide avec le mouvement élémentaire du solide. Les vecteurs AP et BQ sont dits *conjugués*; le déplacement de chacun d'eux peut être obtenu par une seule rotation autour du vecteur conjugué, de sorte que les plans normaux aux trajectoires de ses divers points passent par le conjugué.

31. Composition des accélérations. — Théorème de Coriolis. — Reprenons le problème du mouvement relatif d'un

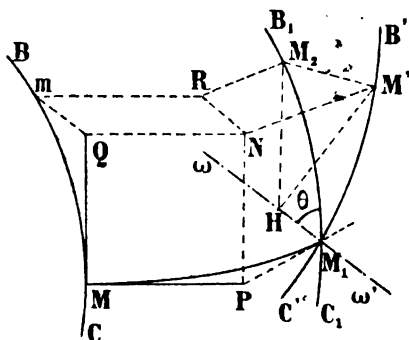


Fig. 68.

point matériel et proposons-nous d'établir la relation géométrique qui lie les accélérations des divers mouvements de ce point.

Soit M la position à l'instant t d'un point qui décrit dans le mouvement relatif la trajectoire BC , et dans le mouvement d'entraînement la trajectoire MM_1 . Si MQ est tangente en M à la trajectoire du point dans le mouvement relatif, et si $MQ = V_r \Delta t$, le vecteur Qm est la déviation dans le mouvement relatif (8). De même, si MP est tangente en M à la trajectoire d'entraînement, et si $MP = V_e \Delta t$, le vecteur PM_1 représente la déviation dans le mouvement d'entraînement.

Comme la vitesse V du mouvement absolu est la résultante de V_e et V_r (16), la direction de cette vitesse en M est la diagonale MN du parallélogramme construit sur MP et MQ ,

et l'on a $MN = V\Delta t$, c'est-à-dire que le point N est l'origine de la déviation NM' dans le mouvement absolu.

Actuellement cherchons la position M' du point M au bout du temps Δt , et observons que le mouvement d'entraînement peut être décomposé en une translation égale et parallèle à MM_1 et une rotation autour d'un axe ω' passant par M_1 . La translation MM_1 amène la trajectoire BC en B_1C_1 , et la rotation autour de ω' amène B_1C_1 en $B'C'$. Comme Mm est l'arc de trajectoire relative que parcourt le point M dans le temps Δt , le point m vient en M_2 sur B_1C_1 , puis en M' sur $B'C'$, et les arcs Mm , M_1M_2 , M_1M' sont égaux. Le point M' est donc la position finale de M au bout de l'intervalle de temps Δt , de sorte que la déviation dans le mouvement absolu est NM' .

Menons le vecteur NR égal et parallèle à Qm , et joignons RM_2 ; la déviation absolue NM' est alors la résultante du contour NRM_2M' . Or il est aisé de voir que RM_2 est égal et parallèle à PM_1 ; en effet, les deux triangles MQm et PNR sont égaux, et ont leurs côtés parallèles, car NQ est parallèle à PN et Qm à NR ; donc RP est égal et parallèle à Mm et, par suite, égal et parallèle à M_1M_2 , puisque le mouvement qui amène Mm en M_1M_2 est une translation; ainsi M_1M_2RP est un parallélogramme et RM_2 est égal et parallèle à PM_1 .

La déviation absolue NM' est donc la résultante du vecteur NR égal et parallèle à la déviation relative Qm , du vecteur RM_2 égal et parallèle à la déviation d'entraînement PM_1 , et du vecteur M_2M' . Mais l'accélération dans le mouvement absolu J et les accélérations relative J_r et d'entraînement J_e sont proportionnelles à ces vecteurs et ont pour expressions (8):

$$J = \lim \frac{2NM'}{\Delta t^2}, \quad J_r = \lim \frac{2Qm}{\Delta t^2}, \quad J_e = \frac{2PM_1}{\Delta t^2};$$

et, si l'on pose $J' = \frac{2M_2M'}{\Delta t^2}$, on peut conclure que l'accélération absolue J sera la somme géométrique de J_r , J_e , J' , ces trois vecteurs ayant respectivement pour directions Qm , PM_1 , M_2M' . Ainsi on a l'égalité géométrique $(J) = (J_r) + (J_e) + (J')$ et, si l'on donne au vecteur J' le nom d'accélération complémentaire, il en résulte l'énoncé du théorème de Coriolis :

L'accélération absolue d'un point en mouvement est la résultante de son accélération relative, de son accélération d'entraînement et de l'accélération complémentaire.

Cherchons maintenant l'expression de l'accélération complémentaire. On a d'abord, en abaissant M_1H perpendiculaire sur l'axe de rotation $\omega\omega'$:

$$M_2M' = M_2H\omega dt;$$

ω est la vitesse angulaire de la rotation qui amène M_2 en M' .

Désignons par θ l'angle de M_1M_2 avec $\omega\omega'$, c'est-à-dire l'angle de Mm ou de la tangente MQ avec $\omega\omega'$, ou encore l'angle de la vitesse relative avec le même axe. On a :

$$M_2H = M_1M_2 \sin \theta;$$

mais $M_1M_2 = V_r dt$, puisque M_1M_2 est l'arc de trajectoire relative parcouru pendant le temps infiniment petit dt ; donc :

$$M_2M' = \omega V_r \sin \theta dt^2;$$

par suite, on peut écrire :

$$J = \frac{2M_2M'}{dt^2} = 2\omega V_r \sin \theta.$$

On peut observer que le vecteur J' , dirigé suivant M_2M' , est perpendiculaire à M_1H et M_2M_1 , c'est-à-dire perpendiculaire à l'axe $\omega\omega'$ et à la vitesse relative. Le sens M_2M' est celui du mouvement de l'extrémité de la vitesse relative Q , que l'on supposerait entraînée dans la rotation autour de $\omega\omega'$.

En résumé, l'accélération complémentaire J' est complètement déterminée :

- 1° En grandeur, puisque $J' = 2\omega V_r \sin \theta$;
- 2° En direction, puisqu'elle est perpendiculaire à la vitesse relative V_r et à l'axe instantané de rotation dans le mouvement d'entraînement;
- 3° En sens, puisque son sens est celui du mouvement de

l'extrémité de la vitesse relative dans la rotation instantanée.

L'analyse conduit aux mêmes conclusions que la géométrie; en effet, différentiations par rapport au temps les équations (2) du paragraphe 16; on obtient :

$$(3) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \left(x \frac{d^2X}{dt^2} + x' \frac{d^2Y}{dt^2} + x'' \frac{d^2Z}{dt^2} \right) + \left(\frac{d^2a}{dt^2} + X \frac{d^2x}{dt^2} + Y \frac{d^2x'}{dt^2} + Z \frac{d^2x''}{dt^2} \right) + 2 \left(\frac{dx}{dt} \frac{dX}{dt} + \frac{dx'}{dt} \frac{dY}{dt} + \frac{dx''}{dt} \frac{dZ}{dt} \right),$$

et deux équations analogues pour $\frac{d^2y}{dt^2}$ et $\frac{d^2z}{dt^2}$.

Le premier membre de cette équation est la composante J_x de l'accélération absolue du point M. La première parenthèse du second membre représente la projection sur Ox de l'accélération relative J_r de ce point. La seconde parenthèse représente la valeur que prendrait J_x si l'on supposait X constant, c'est-à-dire le point M invariablement lié à la figure mobile; c'est donc la composante suivant Ox de l'accélération d'entraînement J_e .

Considérons le vecteur J' ayant pour origine le point M et pour projections sur les axes fixes :

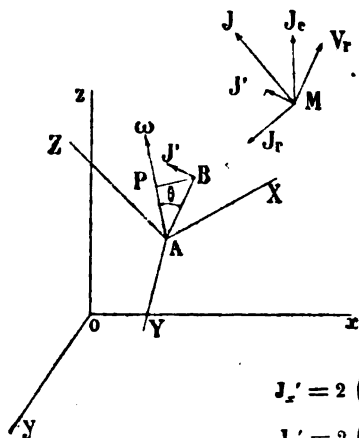


FIG. 67.

$$J'_x = 2 \left(\frac{dx}{dt} \frac{dX}{dt} + \frac{dx'}{dt} \frac{dY}{dt} + \frac{dx''}{dt} \frac{dZ}{dt} \right).$$

$$J'_y = 2 \left(\frac{dy}{dt} \frac{dX}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{dY}{dt} + \frac{dy''}{dt} \frac{dZ}{dt} \right).$$

$$J'_z = 2 \left(\frac{dz}{dt} \frac{dX}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{dY}{dt} + \frac{dz''}{dt} \frac{dZ}{dt} \right).$$

Ce vecteur s'appelle l'accélération complémentaire, et il résulte alors des équations (3) que la projection de l'accélération absolue J sur chacun des trois axes fixes égale la somme des projections sur le même axe des accélérations J_r , J_e et J' , c'est-à-dire que l'on a comme précédemment : $(J) = (J_r) + (J_e) + (J')$.

Pour trouver une interprétation de J' , menons par le point A un vecteur AB égal en grandeur et en direction à la vitesse relative V_r du point M; les coordonnées du point B par rapport aux axes

mobiles seront $\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}, \frac{dZ}{dt}$; quant à ses coordonnées par rapport aux axes fixes, elles seront :

$$\begin{aligned}\xi &= a + \alpha \frac{dX}{dt} + \alpha' \frac{dY}{dt} + \alpha'' \frac{dZ}{dt}; \\ \eta &= b + \beta \frac{dX}{dt} + \beta' \frac{dY}{dt} + \beta'' \frac{dZ}{dt}; \\ \zeta &= c + \gamma \frac{dX}{dt} + \gamma' \frac{dY}{dt} + \gamma'' \frac{dZ}{dt}.\end{aligned}$$

Si l'on suppose le point B entraîné avec les axes mobiles, sa vitesse absolue aura pour composantes sur les axes fixes :

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= \frac{da}{dt} + \left(\frac{d\alpha}{dt} \frac{dX}{dt} + \frac{d\alpha'}{dt} \frac{dY}{dt} + \frac{d\alpha''}{dt} \frac{dZ}{dt} \right) = \frac{da}{dt} + \frac{1}{2} J_x'; \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{db}{dt} + \left(\frac{d\beta}{dt} \frac{dX}{dt} + \frac{d\beta'}{dt} \frac{dY}{dt} + \frac{d\beta''}{dt} \frac{dZ}{dt} \right) = \frac{db}{dt} + \frac{1}{2} J_y'; \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \frac{dc}{dt} + \left(\frac{d\gamma}{dt} \frac{dX}{dt} + \frac{d\gamma'}{dt} \frac{dY}{dt} + \frac{d\gamma''}{dt} \frac{dZ}{dt} \right) = \frac{dc}{dt} + \frac{1}{2} J_z'.\end{aligned}$$

Mais les dérivées $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}$ représentent les projections de la vitesse de l'origine A; par suite $\frac{1}{2} J_x', \frac{1}{2} J_y', \frac{1}{2} J_z'$ représentent les projections de la vitesse du point B dans sa rotation d'entraînement autour de l'axe instantané $A\omega$; donc l'accélération complémentaire J' n'est autre chose que le double de cette dernière vitesse. Cette accélération est évidemment perpendiculaire au plan déterminé par V_r et $A\omega$ et dirigée dans le sens de la rotation du point B.

Soit BP la perpendiculaire abaissée du point B sur $A\omega$; appelons θ l'angle de AB avec $A\omega$, ω la vitesse angulaire de la rotation instantanée à l'instant considéré; on a pour la vitesse du point B, en observant que AB est parallèle et égal à V_r :

$$\omega \times BP = \omega \times AB \times \sin \theta = \omega V_r \sin \theta,$$

par suite

$$J' = 2\omega V_r \sin \theta.$$

Cas où l'accélération complémentaire est nulle. — L'expression de J' montre que cette accélération peut être nulle dans trois cas : 1° lorsque $\omega = 0$, alors le mouvement d'entraînement du système mobile se réduit à une translation; 2° quand $V_r = 0$, dans ce cas la vitesse relative est nulle, le mouvement relatif n'a pas lieu, et le point est en repos relatif; 3° lorsque $\theta = 0$, alors l'axe instantané de rotation dans le mouvement

d'entraînement est parallèle à la vitesse relative. Dans ces trois cas, les accélérations se composent comme les vitesses.

Considérons en particulier le mouvement d'un point à la surface de la terre, en tenant compte de la rotation de cette dernière autour de la ligne des pôles. Le mouvement d'entraînement étant une rotation, il faut généralement tenir compte de l'accélération complémentaire, qui ne sera nulle que dans deux cas : pour $V_r = 0$, alors le point sera en repos à la surface de la terre ; pour $\theta = 0$, auquel cas la vitesse relative sera parallèle à l'axe de rotation, c'est-à-dire parallèle à la ligne des pôles : c'est le cas d'un corps qui tombe en chute libre au pôle.

REMARQUE. — L'accélération complémentaire est encore appelée accélération *centripète composée*, ou accélération de *Coriolis*. Si p, q, r désignent les composantes de la rotation instantanée $\Delta\omega$, on a pour les projections de l'accélération complémentaire sur les axes mobiles (49) :

$$2\left(q \frac{dZ}{dt} - r \frac{dY}{dt}\right), 2\left(r \frac{dX}{dt} - p \frac{dZ}{dt}\right), 2\left(p \frac{dY}{dt} - q \frac{dX}{dt}\right); \quad (a)$$

il suffit d'observer que $\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}, \frac{dZ}{dt}$ sont les coordonnées du point B par rapport aux axes mobiles.

§ 3. — TRANSFORMATION DES MOUVEMENTS MÉCANISMES

32. Le problème de la transformation des mouvements a pour objet de déduire d'un mouvement connu que l'on peut utiliser, et à l'aide d'un dispositif approprié, un autre mouvement déterminé à l'avance. Ce problème est d'une grande importance au point de vue des applications aux machines.

Les mécanismes sont les accessoires nécessaires des machines pour la transformation du mouvement du récepteur.

33. *Machines*. — On donne généralement le nom de machine à tout système dans lequel les mouvements des

diverses parties sont gênés par des obstacles; par exemple, une locomotive est une machine, parce que les pistons, les balanciers, les bielles qu'elle renferme, au lieu d'être entièrement libres, ne peuvent se mouvoir que d'une certaine façon.

Quand le système matériel se réduit à un seul corps solide, gêné par un seul obstacle, il prend le nom de machine simple. Les organes ou les éléments d'une machine composée quelconque sont toujours des machines simples.

On compte seulement trois machines simples : le *levier*, le *treuil* et le *plan incliné*. Dans la première, l'obstacle est un point fixe autour duquel le solide peut tourner dans tous les sens. Dans la deuxième, l'obstacle est un axe fixe autour duquel le corps peut également prendre un mouvement de rotation. Enfin, dans la troisième, l'obstacle est un plan fixe sur lequel le corps peut glisser.

On définit encore la machine, en général, en disant que c'est un corps ou un assemblage de corps destiné à transmettre l'action des forces. Quelque compliquée que soit une machine, on n'y distingue que trois espèces d'organes : le *récepteur*, destiné à recevoir directement l'action de la force motrice, par exemple la roue du moulin à eau ou le piston de la machine à vapeur ; l'*outil*, destiné à agir sur les corps soumis à l'action de la machine, par exemple la meule du moule ou le rabot d'une machine à raboter ; enfin les *organes de transmission*, ou mécanismes, placés entre le récepteur et l'outil, et destinés à transmettre à l'outil le mouvement du récepteur, en transformant ce mouvement de manière que l'outil agisse dans les meilleures conditions possibles et suivant le but qu'on se propose d'atteindre.

34. Mécanismes. — Dans toute machine, les divers organes sont tellement solidaires que, si l'un d'eux exécute un mouvement déterminé, tous les autres exécutent d'autres mouvements également déterminés.

D'un autre côté, les mouvements les plus simples, ceux que l'on imprime habituellement aux différentes parties d'une machine, sont les mouvements rectilignes et les mouvements circulaires, continus, c'est-à-dire toujours dirigés

dans le même sens, ou alternatifs, c'est-à-dire ayant lieu tantôt dans un sens et ensuite dans le sens opposé.

D'après cela, tout organe de machine, quelle que soit sa complication, pourra presque toujours être considéré comme devant servir à effectuer quelque'une des seize transformations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \text{MOUVEMENT} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{rectiligne continu} \\ \text{rectiligne alternatif} \\ \text{circulaire continu} \\ \text{circulaire alternatif} \end{array} \right. \end{array} \right\} \text{ en } \left\{ \begin{array}{l} \text{rectiligne continu,} \\ \text{rectiligne alternatif,} \\ \text{circulaire continu,} \\ \text{circulaire alternatif.} \end{array} \right.$$

Le mouvement varié dans les machines est généralement *périodique*, c'est-à-dire que la vitesse reprend la même valeur au bout d'intervalles de temps égaux qu'on appelle périodes.

Nous étudierons les transformations de mouvements les plus importantes au point de vue de la pratique.

La transformation d'un mouvement rectiligne continu en un autre mouvement rectiligne continu s'effectue au moyen de systèmes simples étudiés dans les éléments : plan incliné, poulie fixe, poulie mobile, moutles. Pour la transformation d'un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne continu, on a le treuil et la vis.

35. Transformation d'un mouvement circulaire en un autre mouvement circulaire. — La transformation d'un mouvement de rotation autour d'un axe en un mouvement de rotation autour d'un autre axe peut s'obtenir par un grand nombre de dispositifs. Nous étudierons d'abord les mécanismes pour lesquels les vitesses angulaires des deux rotations sont dans un rapport constant ; ces mécanismes comprennent les courroies et les engrenages.

36. Courroies sans fin. — Les courroies réalisent la transformation des mouvements circulaires continus au moyen de liens flexibles.

Soient O et O' les traces des deux axes sur le plan de la figure, supposé perpendiculaire à ces axes. On monte sur les axes deux poulies de rayons R et R', puis on enroule sur ces poulies une courroie sans fin AA'B'B, qui doit être

assez fortement tendue pour ne pas glisser sur les jantes.

L'axe O se mettant à tourner entraîne dans sa rotation la poulie OA avec la courroie, et, par suite, l'autre poulie $O'A'$ avec son axe O' . Dans ce cas, tous les points de la courroie ont même vitesse, et, si l'on exprime cette condition pour les points A et A' , on obtient, en appelant ω et ω' les vitesses angulaires des rotations O et O' :

$$\omega R = \omega' R',$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{R'}{R}. \quad (1)$$

Ainsi les vitesses angulaires sont inversement proportionnelles aux rayons

des poulies, c'est-à-dire que le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ est constant. On peut donner à ce rapport la valeur qu'on veut en choisissant convenablement les rayons R et R' .

Lorsque la courroie s'enroule suivant les tangentes intérieures aux poulies (fig. 69), ces dernières tournent en sens contraires ; les deux brins de la courroie, en se croisant, se

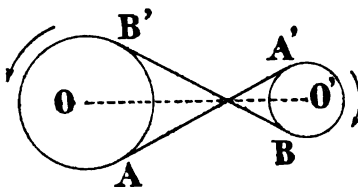


FIG. 69.

touchent alors à plat ; mais le petit frottement qui en résulte n'a pas d'influence sensible sur le mouvement. La proportion (1) subsiste pour les deux cas.

La communication du mouvement s'établit en vertu de l'adhérence de

la courroie sur les deux poulies, et cette adhérence ne subsiste qu'à la condition d'une certaine tension de la courroie.

Les poulies sont ordinairement en fonte, avec jante légèrement bombée au milieu pour empêcher la courroie de se déplacer latéralement. Cependant, lorsqu'un même arbre

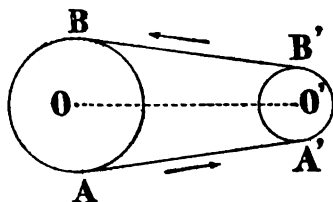


FIG. 68.

tournant doit transmettre le mouvement à plusieurs machines-outils, au lieu d'employer autant de poulies motrices, on les remplace par un tambour en bois sur lequel passent les courroies qui transmettent le mouvement aux divers outils.

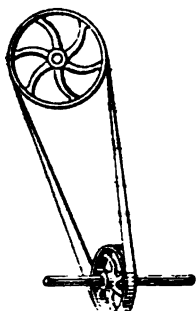


Fig. 70.

Les courroies sont ordinairement en cuir flexible; mais on en fait aussi de très bonnes en coton, en caoutchouc, en poil d'animaux et en gutta-percha. On emploie quelquefois des cordes à boyaux ou des cordons en cuir, comme dans les machines à coudre; dans ce cas, la jante de la poulie est creusée d'une gorge.

Les courroies étant éminemment flexibles permettent d'établir une transmission de mouvement entre deux arbres quelconques, quelles que soient leurs positions relatives et celles des poulies. Les figures ci-contre indiquent les dispositions les plus en usage.

Sur la figure 70, les brins de la courroie sont partiellement croisés; les arbres sont obliques dans des plans différents

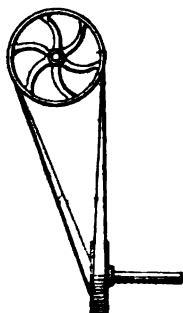


Fig. 71.

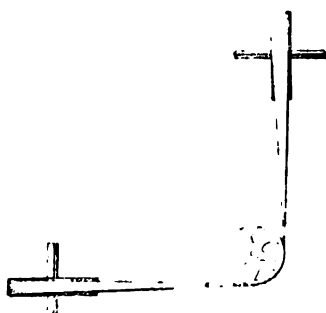


Fig. 71 bis.

Pour des axes perpendiculaires, on peut associer les poulies comme il est indiqué sur la figure 71. Dans le cas général

où les arbres et les poulies ont des directions quelconques, on a le dispositif de la figure 72.

Pour des grands efforts, on emploie assez généralement

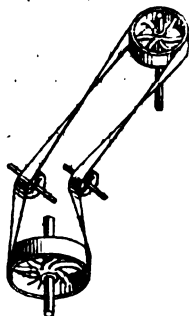


FIG. 72.

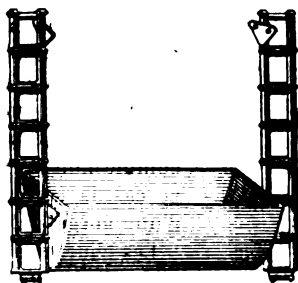


FIG. 73.

des câbles en fil de fer ou en fil d'acier. Mais on fait aussi usage de chaînes en fer, telles que la chaîne Standard (fig. 73), ou la chaîne Galle (fig. 74), ou encore la chaîne Vaucanson,



FIG. 74.

dont la résistance est très grande (fig. 75). Les maillons des chaînes viennent se prendre dans les dents que portent les roues.

Câbles téléodynamiques. — Lorsque les deux poulies qu'on veut relier ensemble par une courroie sont situées à une grande distance l'une de l'autre, il n'est plus nécessaire de tendre artificiellement la courroie pour qu'elle communique le mouvement; son poids suffit pour lui donner une tension qui développe toute l'adhérence dont on a besoin. C'est le principe des transmissions par câbles téléodynamiques. Le

câble est composé de six à huit torons enroulés autour d'une âme en chanvre. Les poulies sont à gorge profonde avec garniture en cuir pour accroître l'adhérence.

M. Hirn, le savant industriel de l'Alsace, a reconnu que l'on pouvait, au moyen de ces câbles, transmettre la rotation de l'une à l'autre des poulies à une distance d'environ 100 mètres. En employant des poulies de relais placées de distance en distance, il a pu transmettre le mouvement à plusieurs kilomètres.

De tous les modes de transmission de la force à distance : électricité, air comprimé,

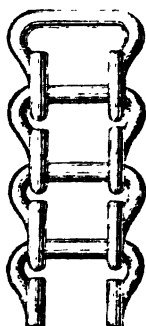


FIG. 75.

eau sous pression, celui dont l'installation est la plus économique et dont le rendement est le plus élevé est le câble métallique. L'avantage est d'autant plus accusé que la force à transmettre est plus considérable.

37. Engrenages. — De tous les organes mécaniques destinés à transformer des mouvements, les

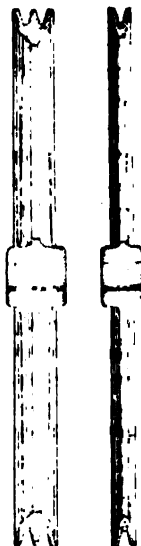


FIG. 76.

plus parfaits et les plus importants, ceux qui entrent le plus fréquemment dans la construction des machines, sont les engrenages ; ils permettent, comme les courroies, de communiquer le mouvement de rotation d'un axe à un autre axe situé à une petite distance, avec cette condition que les vitesses angulaires soient dans un rapport constant.

Trois cas sont à considérer suivant que les deux axes de rotation sont parallèles, concourants, ou non situés dans un même plan. A chacun de ces cas correspond un dispositif spécial.

38. Engrenages cylindriques. — Dans ce cas, les axes sont parallèles. Considérons d'abord deux cylindres en contact et

pressés l'un contre l'autre de façon que le premier ne puisse se mouvoir sans entraîner le second ; les deux mouvements ainsi obtenus sont de sens contraires.

Prenons pour plan de la figure un plan normal aux deux axes de rotation parallèles O et O' . Soient R et R' les rayons des cylindres et ω , ω' les vitesses angulaires des axes. Si l'on suppose qu'il n'y a pas de glissement, tous les arcs de la circonférence du premier cylindre O viennent successivement s'appliquer sur des arcs égaux appartenant à la circonférence de l'autre cylindre, c'est-à-dire que le point de contact actuel A prend sur chaque circonférence, au bout d'un certain temps Δt , les positions A' et A_1 , telles que l'on a $\text{arc } AA' = \text{arc } AA_1$, ce que l'on exprime par l'égalité :

$$\omega R \Delta t = \omega' R' \Delta t,$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R}{R'}.$$

Si l'on pose $\frac{\omega'}{\omega} = n$, il suffira de prendre les rayons des cylindres dans le rapport n pour obtenir des vitesses angulaires dans le même rapport.

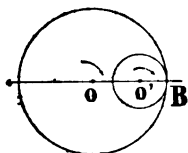


FIG. 78.

Sur la droite OO' existent deux points A et B , qui divisent le segment OO' dans un rapport donné. Au premier, situé entre O et O' , correspondent deux cylindres en contact extérieur avec des vitesses de sens contraires. Au second point B , extérieur au segment OO' , correspondent deux cylindres en contact intérieur

avec des vitesses de même sens.

Le mode de transmission précédent, dit par simple adhérence, est quelquefois employé dans l'industrie, notamment dans les filatures ; une large roue horizontale garnie d'une peau de buffle se meut en contact avec un grand nombre de

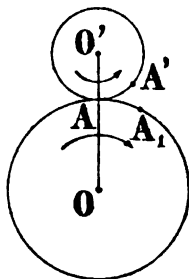


FIG. 77.

petits rouleaux disposés régulièrement autour d'elle, et qui transmettent le mouvement chacun à une bobine. On peut encore remarquer que c'est la simple adhérence de la roue motrice d'une locomotive sur le rail qui rend possible la traction des trains; cette adhérence est accrue par le poids énorme de la locomotive.

Cependant, dès que la résistance à vaincre devient considérable, les cylindres pourraient glisser l'un sur l'autre, il y aurait usure rapide par le frottement, et l'on est obligé d'armer leur contour de parties saillantes, ou *dents*, qui engrenent ensemble. Les deux cylindres se transforment alors en roues dentées, dont l'ensemble forme un engrenage; la plus grande porte le nom de *roue*, et la plus petite celui de *pignon*; il y a la roue-menante, qui transmet le mouvement, et la roue menée, qui est entraînée.

Les cercles O et O' de rayons R et R' (fig. 77) sont les cercles primitifs de l'engrenage; ils servent de base au tracé des dents; pour les déterminer, connaissant la distance $OO' = d$ et les vitesses angulaires ω et ω' , ou plutôt le rapport n de ces vitesses, on part des relations :

$$d = R + R', \quad R = nR';$$

ces relations permettent de calculer R et R' en fonction de d et n ; on obtient :

$$R = \frac{nd}{n+1}, \quad R' = \frac{d}{n+1}. \quad (2)$$

Le rapport n représente précisément le nombre de tours que le pignon doit faire par tour de roue.

Au point de vue géométrique, le problème des engrenages consiste à trouver, pour les dents des formes telles que le mouvement des deux roues ait lieu de la même manière que si les deux cercles primitifs se conduisaient l'un l'autre sans glissement. On se donne, par exemple, le profil de la dent du pignon, et l'on détermine celui de la dent de la roue de telle sorte que la condition ci-dessus soit remplie. On voit que les contours des dents doivent rester constamment en

contact, c'est-à-dire que le profil d'une dent doit toujours être tangent au profil de la dent de l'autre roue, qu'elle pousse dans la direction convenable.

Pour étudier la forme de ces profils, considérons le mouvement relatif des deux roues l'une par rapport à l'autre. Si on applique au système une rotation de centre O et de vitesse égale à ω et de sens contraire, la roue O est ramenée au repos; le mouvement absolu du pignon, résultant alors de deux rotations autour des points O et O' , est une rotation autour du point A (27), de sorte que, dans le mouvement relatif, le pignon O' roule sur la roue O .

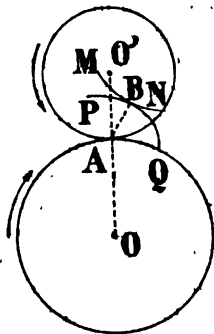


FIG. 79.

Supposons que PQ soit le profil d'une dent de la roue; le profil MN de la dent du pignon doit être tel que les deux profils restent constamment tangents quand le pignon roule sur la roue; par conséquent, le profil PQ est l'enveloppe de la courbe MN dans ce roulement. Ainsi la question est ramenée à tracer l'enveloppe d'une courbe mobile dans un mouvement épicycloïdal plan; ce problème a été résolu au paragraphe 22; le point où la courbe MN touche son enveloppe est le pied de la normale issue du centre instantané de rotation A ; le rayon de courbure en un point est donné par la construction de Savary. Avec ces éléments on a tout ce qu'il faut pour tracer le profil des dents.

Forme et nombre des dents. — L'épaisseur des dents se mesure sur les circonférences primitives, et l'intervalle d'une dent à l'autre s'appelle le creux. Sur la figure 80, la partie PQRS de la dent, intérieure à la circonférence primitive, est la base, la partie extérieure MNRS est la tête de la dent; l'arc RS de la circonférence primitive en est le plein et l'arc ST le vide. La somme de l'épaisseur et du creux, c'est-à-dire l'arc RT, est le pas de l'engrenage; le pas doit être le même, non seulement d'une dent à l'autre, mais encore sur

les deux roues, car, lorsque le contact de deux dents succède à celui des deux dents précédentes, il faut que les cercles primitifs aient tourné d'un même arc.

Pour que la rotation puisse se produire dans un sens, ou dans le sens opposé, il est nécessaire que chaque dent soit

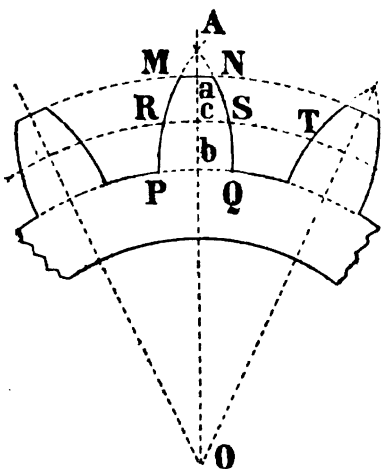


Fig. 80.

limitée par des profils tels que MP et NQ symétriques par rapport au rayon OA; en outre, on évite une arête vive en A en limitant la dent par un arc MN de centre O : c'est ce qu'on appelle échanfriner la dent.

Le plein qu'il faut donner aux dents se déduit de la résistance du bois ou du métal quand on connaît le plus grand effort que doit supporter l'engrenage. Le vide est égal au plein augmenté

d'un jeu qui facilite la pénétration des dents de l'autre roue et qui varie de $\frac{4}{6}$ à $\frac{4}{10}$ pour les dents en bois, de $\frac{4}{10}$ à $\frac{4}{20}$ pour les engrenages métalliques.

Connaissant la distance d des axes O et O' et le nombre n de tours que doit faire le pignon par tour de roue, on calcule les rayons R et R' par les formules (2). Ensuite, d'après le plein e et le pas p , somme du plein et du vide, on détermine le nombre m de dents de la roue par la relation $mp = 2 \times R$, qui donne :

$$m = \frac{2 \times R}{p}$$

Enfin, le nombre m' de dents du pignon satisfait à la for-

mule $m'p = 2\pi R' = \frac{2\pi R}{n}$, qui donne aussi :

$$m' = \frac{2\pi R}{np}.$$

Comme le nombre de dents doit être entier, on prendra pour m le nombre entier inférieur à $\frac{2\pi R}{p}$ et divisible par n .

La hauteur ab de la dent varie avec la durée qu'on veut donner au contact de deux dents, mais on se borne ordinairement à avoir deux dents en prise à la fois ; dans ce cas, le contact commence un pas avant la ligne des centres et finit un pas après.

39. Flancs rectilignes. — L'engrenage le plus en usage est celui à flancs rectilignes. Les lignes qui limitent les dents se composent de deux parties, l'une ab qui est une partie du rayon du cercle primitif et comprise dans son intérieur, c'est le flanc de la dent ; l'autre ac qui est un arc d'épicycloïde et extérieure à ce cercle, c'est la face de la dent. L'engrenage est réciproque, c'est-à-dire que le pignon peut au besoin conduire la roue.

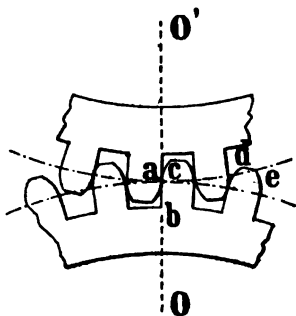


Fig. 81.

Supposons que le profil de la dent du pignon se réduise au rayon $O'A$ (fig. 82) ; alors le profil conjugué sur la roue O est l'enveloppe de $O'A$ lorsque O' roule sur O . Soit $O'A'$ la position de $O'A$ quand le pignon, en roulant sur la roue, est venu en O' . Le pied P de la normale abaissée du point I sur $O'A'$ est le point de contact de cette droite avec son enveloppe, et ce point est situé sur une circonférence O_1 dont le diamètre égale le rayon du cercle O . Les arcs IA' et IP sur les circonférences O' et O_1 sont égaux, car ils correspondent à un même angle $A'O'I$, qui est un angle au centre dans le

cercle O' et un angle inscrit dans le cercle O , de rayon moitié. Enfin la condition de roulement sans glissement donne $\text{arc } IA = \text{arc } IA' = \text{arc } IP$, ce qui montre que le

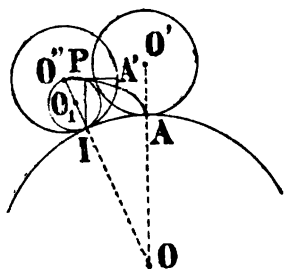


FIG. 82.

point P peut être obtenu en faisant rouler sur le cercle O le cercle O' de diamètre $O'A$. Ainsi l'enveloppe de $O'A$ est une épicycloïde. En résumé, les dents sont identiques sur les deux roues ; pour le pignon, le profil comprend une partie du rayon $O'A$ et l'arc d'épicycloïde AP ; pour la roue, le profil est le rayon OA et l'arc d'épicycloïde AP (fig. 83).

Le défaut de l'engrenage à flancs droits, c'est que le tracé des dents sur la roue dépend du rayon du pignon, de sorte qu'un pignon ne peut engrener qu'avec une roue de rayon déterminé ; on corrige ce défaut en substituant aux flancs rectilignes des flancs épicycloïdaux conjugués ; mais ce dispositif n'est pas en usage dans la pratique.

Le plus souvent, pour simplifier les épreuves, on substitue aux arcs d'épicycloïde des arcs de cercle obtenus d'après les tracés de Willis ou de Morin ; le tracé ci-après est indiqué par Morin dans sa *Cinématique* : Après avoir divisé les circonférences primitives en arcs égaux au pas de l'engrenage, on partage chacun d'eux en quatre parties aux points 0, 1, 2, 3 ; les deux premières parties sont égales à la moitié du plein de la dent, les deux autres à la moitié du vide. On prend les points 0 et 2 pour naissance des courbes des dents, et de chacun des points 3 comme centre, avec la corde (3,0) ou (3,2) pour rayon, on décrit des arcs de cercle tels que $0xz$ et $2yz$; on obtient ainsi les faces. On échanfrine ensuite les dents en faisant disparaître les triangles xyz .

Pour avoir deux dents en prise à la fois, on limite les dents

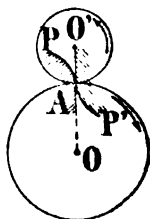


FIG. 83

en m et en m' , de telle sorte qu'une dent commence à prendre en m' lorsque celle qui la précède est arrivée sur la ligne des centres, et qu'elle cesse de pousser en m lorsque celle qui la suit est arrivée à cette ligne. On peut voir que le point m se trouve sur le cercle amO' décrit sur le rayon du pignon comme diamètre, et que le point m' est sur le cercle

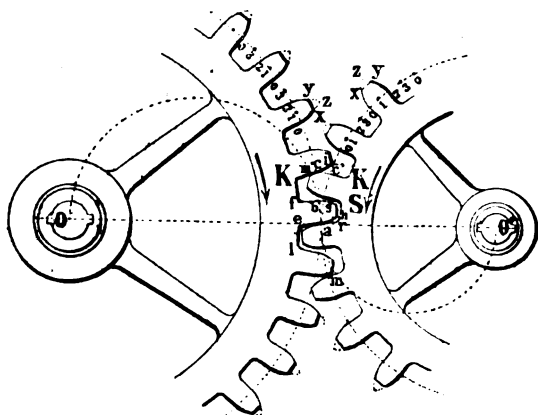


Fig. 84.

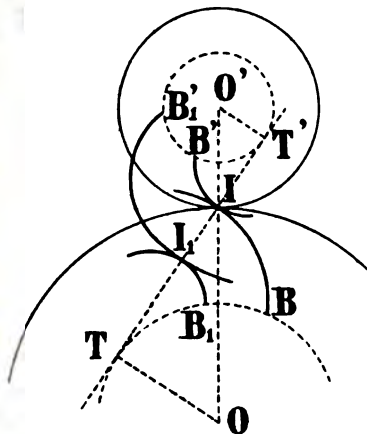
O m'a décrit sur le rayon de la roue. La partie utile des dents étant déterminée, on limite les flancs par des arcs el et rs décrits des points O et O' , en laissant un peu de jeu pour éviter les arcs-boutements.

40. Développante de cercle. — Par le point de contact I des cercles primitifs, menons une droite quelconque TT' et décrivons les circonférences de centre O et O' tangentes à cette droite. Traçons ensuite la développante BI du cercle OT et la développante $B'I$ du cercle $O'T'$; ces courbes sont tangentes en I et constituent deux profils conjugués.

En effet, faisons tourner la roue O d'un certain angle de manière à amener BI en B_1I_1 ; puis faisons tourner O' de façon à amener $B'I$ en $B'_1I'_1$; une développante de cercle étant normale à toutes les tangentes au cercle qui la définit,

on voit que les développantes B_1I_1 et $B_1'I_1'$ ont pour normale commune en I_1 la droite TT' ; elles sont donc tangentes en I_1 .

Or, d'après les propriétés des développantes, on a $\text{arc } BB_1 = \text{arc } II_1 = \text{arc } B'B_1'$. La roue O a tourné d'un angle φ et la roue O' d'un angle φ' , tels que :



$$\varphi = \frac{\text{arc } BB_1}{OT},$$

$$\varphi' = \frac{\text{arc } B'B_1'}{O'T'},$$

et les arcs parcourus sur les circonférences primitives ont respectivement pour longueurs :

$$OI \frac{\text{arc } BB_1}{OT},$$

$$O'I \frac{\text{arc } B'B_1'}{O'T'}.$$

FIG. 85.

Les triangles semblables OTI et $O'T'I$ donnent la proportion :

$$\frac{OI}{OT} = \frac{O'I}{O'T'},$$

de sorte que l'on peut écrire d'après l'égalité ci-dessus :

$$\frac{OI}{OT} \text{ arc } BB_1 = \frac{O'I}{O'T'} \text{ arc } B'B_1'.$$

Ceci montre que les arcs parcourus par les circonférences primitives sont égaux et que les profils restent en contact, c'est-à-dire que les deux profils sont conjugués. On voit d'ailleurs que le contact de deux dents en prise a toujours lieu sur la droite TT' .

Dans les engrenages à développante de cercle, les profils ne dépendent que des rayons OT et $O'T'$, c'est-à-dire que le

profil des dents sur une roue ne dépend pas de l'autre roue ; une même roue peut donc engrener avec plusieurs autres de rayons différents.

Le contact a toujours lieu sur la tangente TT' ; la pression exercée par les roues l'une sur l'autre a une direction constante, et son intensité varie peu. Les profils s'usent parallèlement, c'est-à-dire que le profil usé a la même développante que le profil primitif ; alors, en cas d'usure, il suffit de rapprocher les deux roues.

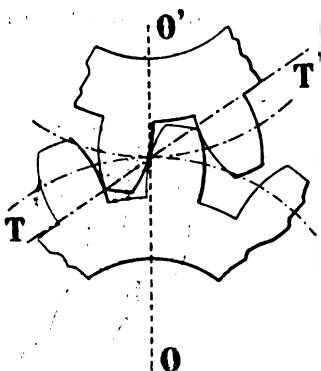


FIG. 86.

41. Denture hélicoïde. —

On démontre dans le cours de *Machines* que, dans un engrenage cylindrique, le travail passif consommé par le frottement des dents est proportionnel à la distance

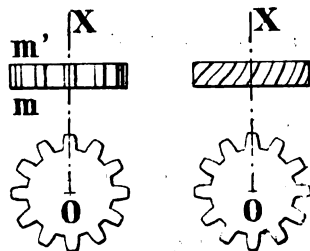


FIG. 87.

du centre de rotation à un instant donné au point de contact des deux dents, et qu'il est inversement proportionnel au nombre des dents, c'est-à-dire qu'il est d'autant moindre que les dents sont en nombre plus considérable. Il y a donc avantage, à ce point de vue, à augmenter le nombre des dents ; mais cela ne peut se faire qu'aux dépens de leur base et, par conséquent, de leur

solidité pour résister aux pressions qu'elles doivent vaincre. En outre, il est également avantageux que le contact ait lieu le plus près possible de la ligne des centres OA .

Dans les précédents engrenages, le contact se produit sur une petite portion mm' de la génératrice d'un cylindre dont

la directrice est le profil des dents. Si ce profil est tracé dans un plan normal à l'axe de la roue OX , et si on déplace le plan parallèlement à lui-même, le point O décrivant l'axe, le profil engendre la surface cylindrique des dents.

Si, en même temps que le point O décrit OX , on fait tourner le plan contenant le profil autour de O , c'est-à-dire si on imprime à ce profil un déplacement hélicoïdal autour de OX , le profil des dents engendre non plus une surface cylindrique, mais une surface hélicoïde analogue à celle d'une colonne torse.

On peut alors se rendre compte qu'en accouplant deux roues semblables le contact se produit à chaque instant, non plus suivant une portion mm' de génératrice, mais en un seul

point situé constamment sur la ligne des centres ; alors, d'après la remarque ci-dessus, le travail du frottement est nul. C'est le



Fig. 88

principe de l'engrenage hélicoïde de White.

Les roues à denture hélicoïde ont une marche très douce, le frottement y est très faible ; mais elles ont l'inconvénient d'occasionner une poussée sur les collets des arbres, ce qui nécessite dans bien des cas l'établissement d'une butée. Ces roues sont très employées pour les grandes vitesses, mais avec de petits efforts.

Les roues à chevrons présentent des avantages analogues : longue conduite, douceur dans la marche, pas de bruit ; de plus, il y a absence totale de poussée sur les arbres. Elles sont formées de deux roues hélicoïdales accolées ou fondues ensemble ; les pas des hélices sont de sens contraires, et les poussées des deux roues sont opposées et s'annulent.



42. Crémaillère. — L'engrenage à crémaillère sert à transformer un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne ou inversement. Pour le concevoir, il suffit de supposer que le centre O' de l'une des circon-

Fig. 89

férences primitives soit situé à l'infini, auquel cas la circonférence de la roue devient une ligne droite. La roue O est appelée pignon ; la roue de rayon infini est une tige dentée qui constitue la crémaillère.

Crémaillère à flancs droits. — Si l'on prend pour profil sur le pignon O le rayon OI , le profil conjugué est l'enveloppe de OI quand la roue O tourne sur la base XX' .

Soit $O'I'$ une position du rayon OI ; abaissons CP perpendiculaire sur $O'I'$; le point P appartient à l'enveloppe et il est situé sur la circonférence de diamètre $O'C$. Le lieu du point P est la courbe décrite par le point I de la circonférence de diamètre OI roulant sur XX' ; c'est donc une cycloïde.

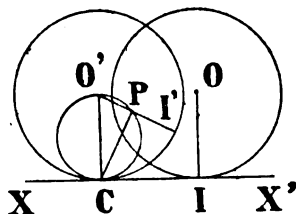


FIG. 89.

Pour terminer le profil, on prend sur la crémaillère un flanc rectiligne ID . Le profil conjugué sur le pignon O sera l'enveloppe de ID quand la droite $X'X$ roule sur O . Si X_1X_1'

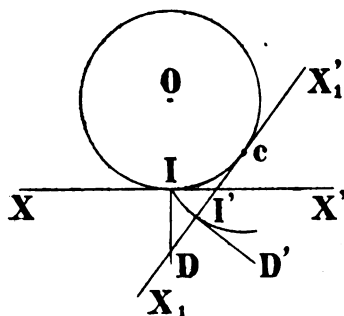


FIG. 90.

est une autre position de la droite, ID est venu en ID' ; le point où ID' touche son enveloppe est le pied I' de la perpendiculaire issue de C , centre instantané de rotation. Le lieu du point I' est donc une développante du cercle O .

Le profil d'une dent du pignon se compose d'une portion rectiligne ad et d'un arc ae de développante de cercle. Le profil

d'une dent de la crémaillère comporte un flanc rectiligne ba et un arc de cycloïde ac . On voit que le profil de la dent de la crémaillère dépend du rayon du pignon, de sorte qu'une

Crémaillère ne peut engrener qu'avec un seul pignon. On

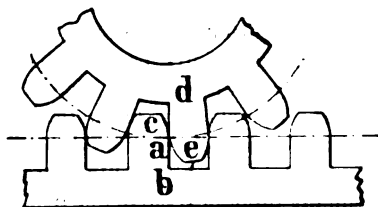


FIG. 91.

retrouve ici l'inconvénient des engrenages à flancs rectilignes.

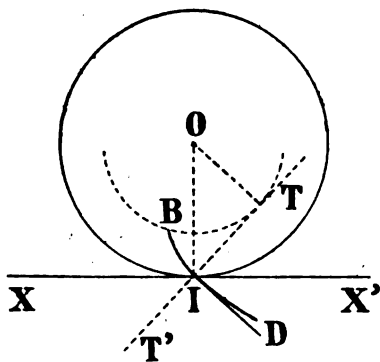


FIG. 92.

Crémaillère à développante de cercle. — Par le point de contact I de la circonférence primitive du pignon et de la crémaillère, menons une droite TT' et traçons la circonférence de centre O tangente à cette droite. Si l'on décrit la développante BI du cercle OT, et si l'on mène

la perpendiculaire ID à IT, on reconnaît aisément, comme

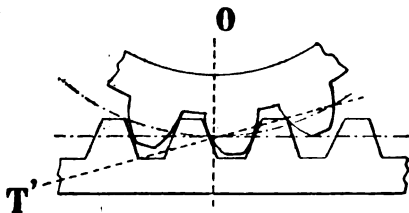


FIG. 93.

au paragraphe ci-dessus, que ces deux profils sont con-

jugués. L'engrenage présente la disposition de la figure 93.

43. Engrenages intérieurs. — On emploie quelquefois des roues à engrenages intérieurs pour transmettre le mouvement d'une roue hydraulique à un pignon, et dans d'autres circonstances. La méthode et le tracé pratique que nous avons indiqués s'appliquent aussi aux engrenages intérieurs. Il y a cependant quelques particularités : ainsi, dans l'engrenage à flancs rectilignes, on ne saurait pratiquement placer des flancs droits sur la grande roue, de sorte que l'engrenage ne peut être réciproque.

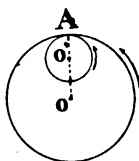


FIG. 94.

On peut toujours éviter un engrenage intérieur et réaliser des vitesses de même sens à l'aide d'engrenages extérieurs. A cet effet on utilise une roue auxiliaire C engrenant avec les deux roues O et O'. On a les relations :

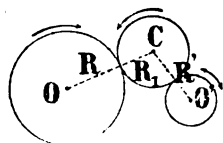


FIG. 95.

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{R_1}{R}, \quad \frac{\omega_1}{\omega'} = \frac{R'}{R_1},$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{R'}{R}.$$

On voit que le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ ne dépend pas du rayon de la roue auxiliaire, mais seulement des rayons des roues O et O'.

Système de Lahire. — Si l'on engrène une petite roue avec une autre dont le rayon soit double de celui de la première, on peut faire voir qu'un point quelconque C, lié à la circonférence de la petite roue, décrira un diamètre AB de la grande. De sorte que l'on pourra, au moyen de cet engrenage, transformer un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne alternatif.

En effet, I étant le point de contact des deux cercles primitifs, menons le diamètre ACOB; on a, en désignant respectivement par α et β les angles AOI et CO'I :

$$\text{arc IA} = R\alpha, \quad \text{arc IC} = R'\beta.$$

Mais la figure donne $\beta = 2\alpha$, $R = 2R'$; par suite :

$$\text{arc IA} = \text{arc IC}.$$

Si donc le cercle O roule à l'intérieur du cercle O' , le point C de la circonférence mobile qui se trouvait d'abord en A décrira le diamètre AOB .

Si v est la vitesse du mouvement rectiligne, V celle du point O'

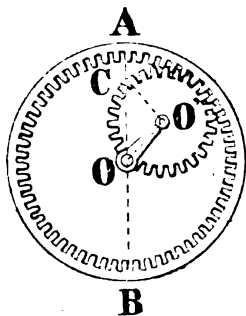


FIG. 96.

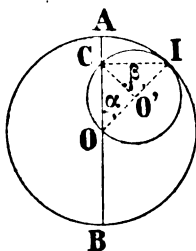


FIG. 97.

x la distance OC , ω la vitesse angulaire, on a dans le triangle COO' :

$$x = 2R \cos \alpha,$$

ce que l'on peut écrire, en observant que $\alpha = \omega t$:

$$x = 2R \cos \omega t.$$

La dérivée donne comme vitesse :

$$v = -2R\omega \sin \omega t,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{v}{V} = -2 \sin \alpha.$$

En général, les roues d'engrenages s'établissent en fonte brute pour les vitesses ordinaires et pour les travaux ne comportant pas de précision ; elles sont fondues sur modèles taillés pour les machines-outils de précision ordinaire, et taillées pour les machines de précision. Les roues marchant à grande vitesse sont toujours taillées.

Suivant les conditions de légèreté et de résistance, on établit les roues en fonte résistante, fonte d'acier, acier coulé, acier forgé, bronze lorsque l'usure rapide est à redouter.

44. Équipages de roues dentées. — Les équipages de roues et de pignons sont employés quand on veut obtenir des vitesses angulaires considérables.

Pour fixer les idées, supposons qu'une roue A engrène avec un pignon *a*; que celui-ci fasse corps avec une roue B, engrenant avec un pignon *b*; qu'à son tour celui-ci soit monté sur l'axe d'une roue C, laquelle engrène avec un

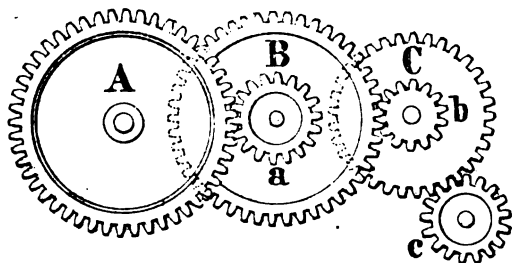


FIG. 98.

pignon *c*. *R*, *R'*, *R''* étant les rayons des roues; *r*, *r'*, *r''*, les rayons des pignons; ω , ω' , ω'' , ω''' , les vitesses angulaires, nous aurons :

$$R\omega = r\omega', \quad R'\omega' = r'\omega'', \quad R''\omega'' = r''\omega''',$$

d'où l'on tire en effectuant le produit et réduisant :

$$RR'R''\omega = rr'r''\omega''',$$

puis :

$$\frac{\omega'''}{\omega} = \frac{RR'R''}{rr'r''}. \quad (1)$$

Ainsi, le rapport entre les vitesses angulaires du dernier pignon et de la première roue est égal au produit des rayons des roues divisé par le produit des rayons des pignons.

Si l'on a $R = R' = R''$ et $r = r' = r''$, il en résulte :

$$\frac{\omega'''}{\omega} = \frac{R^3}{r^3}.$$

Étant donné le rapport des vitesses angulaires de deux axes, on peut se proposer de déterminer le nombre des axes intermédiaires et les dimensions à donner aux roues pour transmettre le mouvement d'un axe à l'autre. Ce problème est généralement indéterminé, et très souvent aussi ne peut être résolu que par approximation.

Si N représente le nombre des dents d'une roue dont la vitesse est ω , n le nombre des dents du pignon qui a une vitesse ω' , on a d'abord les proportions :

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n}{N} = \frac{r}{R}. \quad (2)$$

Comme N et n sont des nombres entiers, il faut nécessairement que le rapport p des vitesses soit commensurable. De plus, dans la pratique, le nombre des dents d'une roue doit rester compris entre 8 et 120, ce qui exige que le rapport p soit supérieur à $\frac{1}{15}$ et inférieur à 15.

Lorsque le rapport donné p est extérieur à ces limites, une roue et son pignon ne peuvent suffire à la transmission, et il faut recourir à un équipage de roues (*fig. 98*). Entre les deux axes extrêmes on intercale d'autres axes parallèles dont chacun porte une roue B et un pignon a .

La *raison* d'un équipage est le rapport des vitesses angulaires de la dernière roue et de la première, rapport pris avec les signes + ou —, suivant que les vitesses sont de même sens ou de sens contraire.

Si N, N', N'' représentent le nombre de dents des roues A, B, C ; n, n', n'' , le nombre de dents des pignons a, b, c , on aura, d'après les relations (1) et (2),

$$\frac{\omega''}{\omega} = \frac{NN'N''}{nn'n''},$$

On pourra alors réaliser un rapport de vitesses quelconques, pourvu qu'il soit commensurable, en faisant choix d'un équipage qui satisfasse à cette proportion.

Supposons, par exemple, que le rapport donné des vitesses soit égal à 270. Comme on peut écrire :

$$270 = \frac{60}{10} \times \frac{150}{10} \times \frac{30}{10},$$

on voit qu'on pourra employer 3 pignons de 10 dents et 3 roues de 60, 150 et 30 dents. Mais il est évident que le problème comporterait une infinité d'autres solutions.

Les questions de roues dentées trouvent leur application dans le calcul des treuils et en horlogerie, surtout quand il s'agit d'horloges compliquées qui doivent marquer, indépendamment de l'heure, le quantième du mois, le mois et le millésime de l'année.

Les trains épicycloïdaux sont des équipages de roues dentées dont les axes sont portés par des châssis mobiles autour d'un axe parallèle. Toutes les roues sont alors entraînées dans un mouvement commun de rotation, à moins que leur axe ne se confonde avec celui du châssis. Ces trains permettent de réaliser un rapport donné de vitesses plus facilement qu'un équipage de roues dentées.

45. Engrenages coniques. — Lorsque les axes de rotation se rencontrent, on peut encore, pour des machines légères,

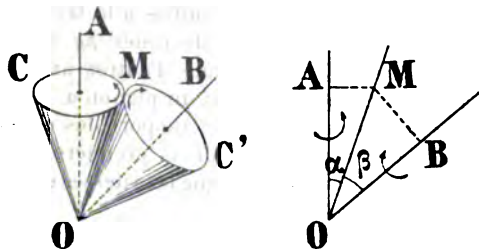


FIG. 99.

employer des rouleaux pressés l'un contre l'autre, et auxquels on donne la forme conique.

Soient OA et OB les deux axes; menons dans le plan AOB une droite OM faisant avec les axes des angles α et β . Considérons les deux cônes engendrés par la rotation de OC autour de OA et de OC' autour de OB; ces cônes sont tangents tout le long de la génératrice OM.

Si l'on fait tourner le cône OA, et si l'adhérence entre les deux cônes le long de OM est suffisante pour éviter tout

glissement, le cône OB sera entraîné et tournera autour de son axe OB. D'ailleurs, à cause précisément de l'absence de glissement, le point M de la génératrice de contact aura la même vitesse dans la rotation autour de OA que dans celle autour de OB, de sorte que l'on peut écrire, en abaissant les perpendiculaires MA et MB sur les axes :

$$\omega \cdot MA = \omega' \cdot MB,$$

c'est-à-dire :

$$\omega OM \sin \alpha = \omega' OM \sin \beta;$$

ou encore :

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Cette relation montre que le rapport des vitesses angulaires est constant; d'ailleurs, quelle que soit la valeur donnée de ce rapport, on pourra tracer dans le plan AOB une droite telle que OM, qui donnera les deux cônes de friction par rotation autour de OA et OB. Ces deux cônes seront tangents extérieurement si les rotations sont de même sens, tangents intérieurement si elles sont de sens contraires.

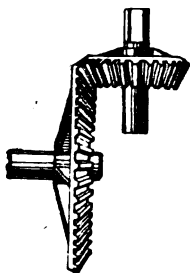


FIG. 100.

Le plus souvent cependant, à cause de la résistance à vaincre, qui est considérable, les cônes de friction sont insuffisants pour transmettre le mouvement, et l'on est conduit à les armer de dents d'engrenage. Dans ce cas, les cônes jouent pour la construction de l'engrenage conique le même rôle que les circonférences primitives dans l'engrenage cylindrique.

Au lieu de prendre les cônes entiers, on se contente d'employer deux couronnes limitées à deux plans perpendiculaires aux axes, et ayant la forme de troncs de cône.

Pour obtenir le tracé théorique du profil des dents, coupons les deux cônes primitifs par une sphère de centre O; on obtient ainsi deux cercles C et C'; et, dans le mouvement

relatif des deux cônes, ces cercles roulent l'un sur l'autre, ce qui réalise un mouvement épicycloïdal sphérique (24).

Prenons pour profil d'une dent de la roue OA une courbe tracée sur la sphère; l'enveloppe de cette courbe dans le mouvement épicycloïdal sphérique considéré sera le profil de la dent conjuguée. La surface des dents sera alors des cônes de sommet O, ayant pour directrices les lignes ainsi tracées sur la sphère.

On voit que les engrenages coniques se construisent comme les engrenages cylindriques, en effectuant sur la sphère les constructions analogues à celles effectuées sur le plan, mais les lignes droites sont remplacées par des arcs de grand cercle; ensuite on prend les surfaces coniques de sommet O ayant pour directrices les profils des dents tracés sur la sphère.

Dans la pratique, ces tracés donneraient lieu à des épures compliquées et extrêmement longues à exécuter; on leur substitue des tracés approximatifs dont le plus simple a été indiqué par Tredgold.

Prenons sur OA et OB deux points S et S', et considérons les cônes ayant ces points pour sommets et circonscrits à la sphère le

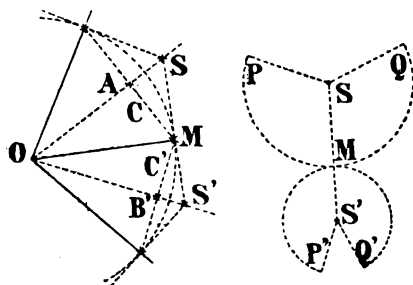


FIG. 101.

long des circonférences C et C'; ce sont des cônes de révolution d'axes OA et OB. La surface du cône S s'écarte très peu de la surface de la sphère tout le long de la circonférence C; de même, la surface de S' s'écarte très peu de la surface de la sphère le long de C'.

Si l'on développe sur un plan les surfaces des deux cônes, le

premier donne un secteur SPMQ, dont le rayon est égal à SM; le cône S' se développe suivant le secteur S'P'MQ' dont le rayon du cercle est égal à S'M.

On procède alors au tracé des engrenages comme s'ils étaient parallèles, avec les circonférences primitives SM et S'M. Il ne reste plus ensuite qu'à enrouler les courbes obtenues sur les cônes S et S'; on adopte ces profils pour directrices de surfaces coniques de sommets O qui limiteront les dents de l'engrenage.

On construit également des roues coniques hélicoïdales,

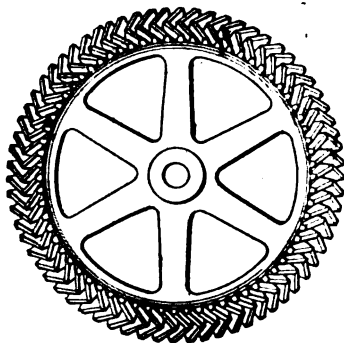


FIG. 102.

mais leur exécution est très difficile; on les remplace par des roues à denture inclinée. La génératrice de la dent est simplement une droite tracée sur le cône primitif développé, et ayant, sur la largeur de la couronne, une inclinaison égale au pas. Les roues coniques à chevrons sont formées de deux roues à denture inclinée fondues ensemble; l'inclinaison des dents sur la

circonférence extérieure est de 25° environ.

46. Engrenages dont les axes ne se rencontrent pas. — Dans ce cas, le problème de la transmission directe du mouvement d'un axe à l'autre présente certaines difficultés, mais il peut cependant être résolu par deux roues dentées; c'est l'*engrenage hyperboloïde*.

Lorsque les roues sont établies à la plus courte distance des axes, on peut également utiliser les engrenages à denture hélicoïde.

Il est assez rare que l'on ait de semblables transmissions à

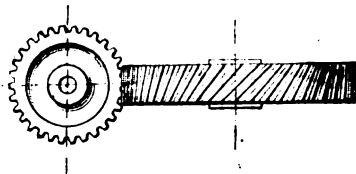


FIG. 103.

établir; et, lorsqu'il s'agira de machines puissantes, il sera toujours plus facile et plus convenable de placer entre les deux axes donnés XX' et YY' , qui ne se rencontrent pas, un axe intermédiaire TT' qui, les rencontrant alors tous les deux, permettra de transmettre, d'abord par un engrenage conique, le mouvement de l'arbre moteur XX' à l'arbre intermédiaire, puis, par un second engrenage conique, de le transmettre de l'arbre intermédiaire à celui qu'il s'agit de conduire YY' .

En appelant n et n' les nombres de dents des roues d'angle calées sur XX' et YY' ; n_1 , n_2 , ceux des dents calées sur TT' , on a, en désignant par ω , ω' , ω_1 les vitesses angulaires :

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{n_1}{n}, \quad \frac{\omega_1}{\omega'} = \frac{n'}{n_2};$$

effectuant le produit et simplifiant, il vient :

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n_1 n'}{n n_2}$$

Cette relation permet de réaliser un rapport de vitesses angulaires quelconque, pourvu qu'il soit commensurable.

47. Vis sans fin. — Dans la plupart des cas où l'on peut avoir à transmettre le mouvement à

des axes qui ne se rencontrent pas, leurs directions sont à angle droit, et l'axe moteur est celui qui marche le plus lentement. Si l'on conçoit que cet axe porte une vis d'une longueur de deux à trois filets, et qu'une roue montée sur



Fig. 104.



Fig. 105

l'arbre ait des dents inclinées dans le même sens que les filets et qui s'engagent entre ces filets, lorsque cette vis tournera il faudra que la roue tourne.

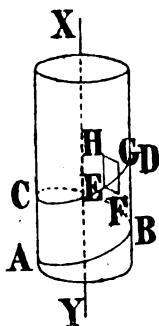


FIG. 106.

Pour définir la surface de vis, considérons un cylindre de révolution sur lequel on a tracé une hélice ABCD; supposons qu'un polygone EFGH, dont le plan passe constamment par l'axe XY, se meuve en s'appuyant sur le cylindre par son côté EH, et de telle sorte que son sommet E parcourt l'hélice; le corps solide formé par l'ensemble du cylindre et du filet saillant ainsi engendré sera une vis.

Ordinairement, le polygone générateur est un carré, ou un triangle isocèle, d'où résultent la vis à filet carré et la vis à filet triangulaire.

Des propriétés connues de l'hélice on conclut aisément que si l'on considère, dans une vis quelconque, le solide $abcoc'b'a'$ compris entre deux plans méridiens, tous les solides ainsi formés seront égaux entre eux, si leur angle dièdre est constant.

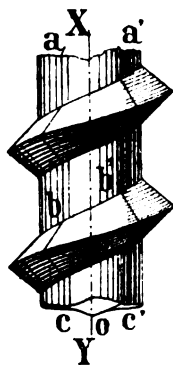


FIG. 107.

Considérons maintenant une roue O que nous supposons d'abord sans épaisseur. Cette roue, armée de dents dont le profil RP est la développante du cercle O, pourra engrener avec une crémaillère AX à flancs droits PQ (42).

A la crémaillère substituons une vis à filet carré

d'axe BC parallèle à AX, c'est-à-dire perpendiculaire à l'axe de la roue. On voit que la rotation de la vis autour de son axe équivaut à un abaissement, ou un relèvement, de la génératrice PQ de la surface de vis ; car c'est une génératrice plus élevée de la surface qui vient dans le plan de la figure en P'Q'. Ce déplacement amène le profil PQ en P'Q', comme si une dent de la crémaillère AX s'était abaissée de PQ en P'Q'. Ceci montre bien que la rotation de la vis autour de BC entraîne la rotation de la roue.

Dans le cas pratique d'une roue épaisse, le profil de la dent reste la développante du cerle OA ; mais la surface de la dent, au lieu d'être cylindrique, doit recevoir dans le sens de l'épaisseur de la roue une certaine obliquité correspondante à la forme de la surface de vis à filet carré. La surface des dents de la roue est alors un hélicoïde développable.

Dans quelques cas assez rares, la vis est simple, c'est-à-dire à un seul filet ; alors le pas de la roue dentée est égal au pas de la vis, car il est égal au pas de la crémaillère fictive, lequel est égal au pas de la vis. Mais le plus souvent on enroule sur le même noyau deux ou trois filets équidistants. Le pas de la roue est alors égal à la distance de deux filets consécutifs, comptée sur une parallèle à l'axe de la vis, c'est-à-dire égal au pas de la vis divisé par le nombre des filets.

Désignons par ω et ω' les vitesses angulaires de la roue et de la vis ; par a le pas de la roue et h celui de la vis ; par n le nombre des dents de la roue, n' le nombre des filets enroulés sur le noyau commun.

D'après ce qui précède, on a :

$$na = h, \quad \text{et} \quad na = \frac{nh}{n'};$$

mais na est la circonférence primitive de la roue ou $2\pi r$, en désignant par r son rayon. Il vient donc :

$$2\pi r = \frac{nh}{n'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{n'}{n} = \frac{h}{2\pi r}.$$

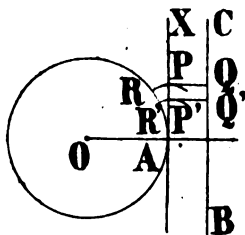


FIG. 108.

Or, lorsque la vis fait un tour, la crémaillère fictive AX avance de h ; la circonférence primitive de la roue, ayant tourné de la même quantité linéaire, a fait une portion de tour exprimée par $\frac{h}{2\pi r}$; on a donc :

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{1}{h}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{h}{2\pi r} = \frac{n'}{n}.$$

On voit que la vitesse angulaire de la roue est à la vitesse angulaire de la vis comme le nombre des filets de la vis est au nombre des dents de la roue.

48. Emploi des engrenages. — Les engrenages sont d'un

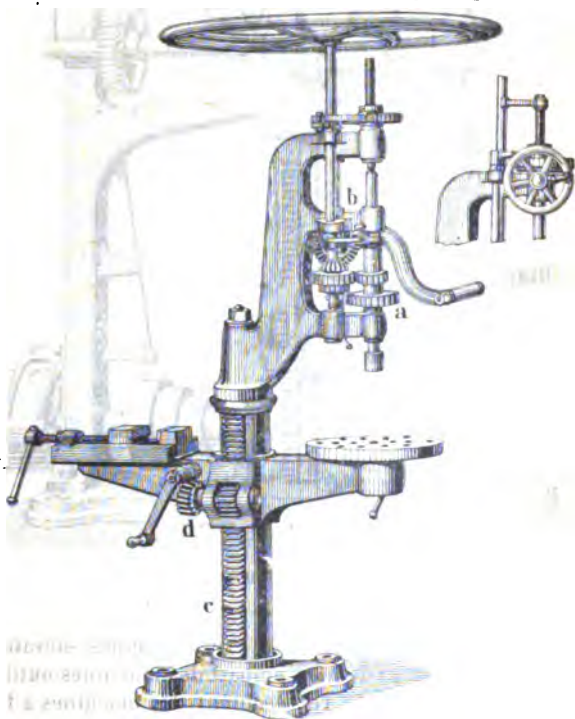


FIG. 109.

emploi très général dans toutes les machines qui ont pour

objet la transformation du mouvement et la transmission de la force. On les utilise sous des formes variées dans les

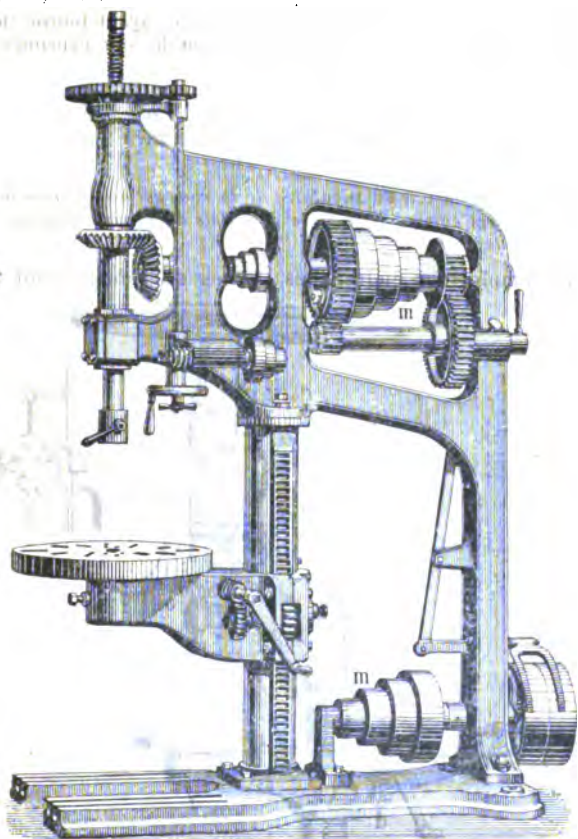


FIG. 110.

treuils, grues, ponts roulants, crics, pompes élévatoires, manèges, vannes, et dans la plupart des machines-outils.

Les figures 109 et 110 représentent des machines à forer. En *a* est disposé un engrenage cylindrique, en *b* un engre-

nage conique, en *c* une crémaillère, en *d* un engrenage à vis sans fin. Sur la figure 110 existe un système de poulies étagées *m*, pour le cas où l'on veut faire varier le rapport des vitesses angulaires des axes.

49. Engrenages elliptiques. — Ces engrenages ont pour objet de transmettre, dans un rapport variable entre des limites données, la vitesse de rotation d'un axe à un autre

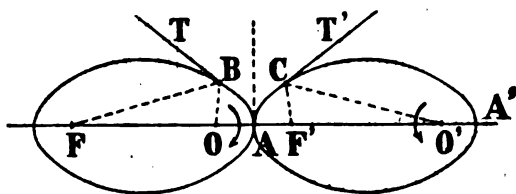


FIG. 111.

axe parallèle. Ici les circonférences primitives sont remplacées par des ellipses égales.

Soient *O* et *O'* les deux axes parallèles; la distance *OO'* est constante.

Considérons deux ellipses égales tangentes en leur sommet commun *A*, ayant pour foyers les points *O* et *O'*, et qui tournent autour de ces foyers dans le sens indiqué par les flèches.

Soient *B* et *C* deux points tels que $\text{arc } AB = \text{arc } AC$; ces points sont évidemment symétriques par rapport à la perpendiculaire en *A* à l'axe *OO'*, et les angles *FBT* et *O'CT'* sont égaux; d'autre part, suivant une propriété connue de la tangente à l'ellipse, les angles *OBT* et *FBT* sont supplémentaires, et il en est de même des angles *OBT* et *O'CT'*. De plus, on a $OB + O'C = OB + BF = AA' = OO'$.

Cette égalité, jointe à celle des arcs *AB* et *AC*, montre que les deux ellipses peuvent rouler l'une sur l'autre sans glisser; les points *B* et *C* viennent coïncider à un instant donné. Le rapport des vitesses angulaires est alors à chaque instant :

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{O'A}{OA}.$$

Dans la rotation de l'ellipse O, depuis OA jusqu'à OA', le rayon vecteur va en croissant et le disque O pousse le disque O'. Lorsque le point A' revient en A, le vecteur va en décroissant et le disque O cesse de conduire O'; pour assurer la transmission, il faut denter les roues.

Les engrenages elliptiques ou ovales de forme quelconque sont rarement employés dans les transmissions; les constructeurs ne les fabriquent que sur commande.

La figure 112 représente un engrenage à ellipse avec pignon circulaire excentré; cet engrenage permet également de réaliser un rapport variable de vitesses.

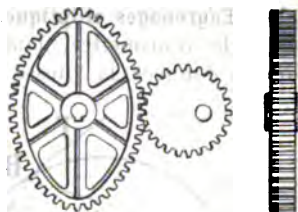


FIG. 112.

Plus généralement, étant donnés deux axes parallèles O et O' et une courbe primitive AB, on peut se proposer de déterminer la courbe conjuguée AC qui, en roulant sur AB, donne un rapport de vitesse variable.

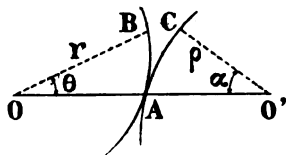


FIG. 113.

Au point de contact A, les vitesses relatives sur les deux courbes sont égales, c'est-à-dire que l'on doit avoir, en appelant d la distance OO' :

$$r + \rho = d, \quad r d\theta = \rho d\alpha. \quad (1)$$

Si l'on a $r = f(\theta)$, f étant une fonction connue, la seconde équation devient :

$$f(\theta) d\theta = [d - f(\theta)] d\alpha,$$

d'où l'on déduit :

$$d\alpha = \frac{f(\theta) d\theta}{d - f(\theta)}, \quad \text{et} \quad \alpha = \int \frac{f(\theta) d\theta}{d - f(\theta)}. \quad (2)$$

Il ne reste plus qu'à effectuer l'intégration. L'élimination de θ entre (1) et (2), qui donnent ρ et α en fonction de θ , détermine la relation cherchée entre ρ et α , c'est-à-dire l'équation de la courbe AC. On reconnaît aisément par cette méthode que deux spirales logarithmiques égales constituent deux profils conjugués.

50. Bielles. — La transformation d'un mouvement circulaire en un autre mouvement circulaire, dans le cas d'axes parallèles, peut encore se réaliser au moyen du dispositif bielle et manivelle.

Une bielle est une tige rigide AA' , articulée à ses deux

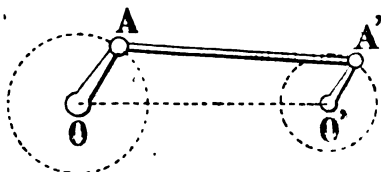


FIG. 114.

extrémités avec deux manivelles OA et $O'A'$ tournant autour de deux axes O et O' .

On peut d'abord observer que, si le mouvement de la manivelle $O'A'$ est continu, celui de OA est généralement alternatif. En effet, soient R et R' les rayons des deux manivelles, d la distance de leurs axes, l la longueur de la bielle.

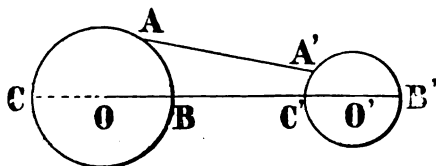


FIG. 115.

Considérons le bouton A de la grande manivelle, successivement dans ses deux positions extrêmes B et C . Quand il est en B , il faut, si l'extrémité A' de la bielle est sur la circonférence O' , que l'on ait $l < B'B$ et $l > B'C'$, ou bien :

$$l < d + R' - R, \quad l > d - R' - R.$$

D'un autre côté, quand le bouton A est en C , la longueur l doit satisfaire aux deux conditions :

$$l > d - R' + R, \quad l < d + R' + R.$$

Or ces inégalités sont évidemment contradictoires, si, comme on l'a supposé sur la figure, le rayon R est plus grand que R' . Il résulte de là que l'extrémité A de la bielle ne peut parcourir toute la circonférence O .

Pour que les mouvements des manivelles soient tous deux continus, c'est-à-dire qu'ils puissent se prolonger indéfiniment autour de chaque axe, il faut que les longueurs OA , $O'A'$, AA' soient telles que chacun des centres O et O' soit à l'intérieur de la circonférence décrite par l'extrémité de l'autre manivelle.

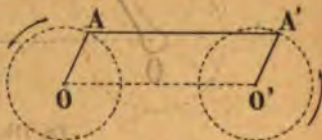


FIG. 116.

Quand les rayons des manivelles sont égaux, et que la longueur de la bielle est égale à la distance des centres, les deux mouvements sont continus; la bielle reste toujours parallèle à OO' , et les boutons A et A' se meuvent dans le même sens avec des vitesses égales. Ce dispositif est employé notamment pour relier entre elles les roues d'une locomotive.



FIG. 117.

Rapport des vitesses angulaires. — Dans le cas général, désignons par ω et ω' les vitesses de rotation de OA et $O'A'$.

La trajectoire de A est la circonférence de rayon OA , par suite le centre instantané de rotation I , dans le mouvement de AA' , est situé sur la normale OA ; de même le point I doit être sur $O'A'$; il est donc à l'intersection de ces normales.

Désignons par ω'' la vitesse de la rotation instantanée autour de I ; la vitesse de A' peut être obtenue de deux façons, suivant qu'on considère ce bouton comme tournant autour de O' ou de I ; si on égale les deux expressions de la vitesse, on obtient :

$$\omega'' AI = \omega' O'A'.$$

On a de même pour la vitesse de A :

$$\omega' AI = \omega OA;$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{AI}{OA} \times \frac{OA}{O'A'}.$$

Par les points O, I, O', abaissons les perpendiculaires OH, IK, O'H' sur AA'; les triangles semblables de la figure donnent :

$$\frac{AI}{O'A'} = \frac{IK}{O'H'}, \quad \frac{OA}{AI} = \frac{OH}{IK},$$

d'où l'on tire, en multipliant membre à membre :

$$\frac{AI \times OA}{AI \times O'A'} = \frac{OH}{O'H'} = \frac{OL}{O'L}.$$

Ainsi on a :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{OL}{O'L};$$

on voit que le rapport des vitesses angulaires est inversement proportionnel au rapport des distances des centres au point où la bielle prolongée rencontre la ligne des centres.

51. Joint universel. — C'est un dispositif ingénieux qui peut être employé pour la transformation des mouvements circulaires lorsque les axes de rotation se rencontrent. Le rapport des vitesses est variable; mais, lorsque le premier axe fait un tour entier, le second fait également un tour complet.

Ce dispositif consiste en un croisillon à quatre branches perpendiculaires *abcd*, situées dans un même plan, terminées chacune par un tourillon. Les deux tourillons *a* et *b*, situés dans la même direction, sont embrassés par une fourche *aeb*, assemblée à l'extrémité de l'un des axes de rotation. Les tourillons *c* et *d*, placés dans l'autre direction, sont articulés avec une autre fourche *efd*, qui termine l'autre axe.

Par l'effet du jeu de ce système, il peut se mouvoir dans tous sens et transmettre le mouvement de l'un des axes à

l'autre avec un rapport de vitesse variable à chaque instant.

Ce mécanisme est utilisé principalement pour des machines légères ou des transmissions provisoires de mouvement à des pompes et à des machines d'épuisement; mais il ne convient pas pour des machines lourdes ni pour des directions formant de grands angles. On lui donne aussi le nom de joint hollandais.

Lorsque les axes de rotation sont rectangulaires, le joint précédent ne peut plus s'appliquer directement, mais on peut couper les deux axes donnés par un axe auxiliaire faisant avec chacun d'eux des angles plus ouverts, et appliquer le joint du premier axe à

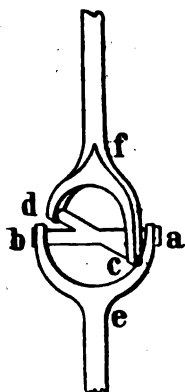


FIG. 118.

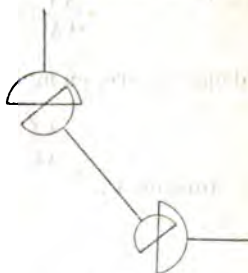


FIG. 119.

l'axe auxiliaire et celui de ce dernier au second axe donné. On obtient ainsi le double joint de Hooke.

De même, si l'angle des deux axes donnés, sans être rigoureusement droit, est voisin de l'angle droit, la transmission directe par joint universel serait défectueuse, parce qu'elle donnerait lieu à de trop fortes variations du rapport des vitesses. En employant un axe auxiliaire, on pourra ouvrir davantage les angles et réduire de beaucoup les inégalités.

52. Transformation d'un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne. — La transformation d'un mouvement de rotation continu autour d'un axe en un mouvement rectiligne alternatif, ou inversement, donne lieu à divers mécanismes plus ou moins ingénieux. Nous citerons notamment le mécanisme bielle et manivelle qui est utilisé dans les machines à vapeur, et les divers genres d'excentriques.

Pour la transformation d'un mouvement circulaire alternatif en un mouvement rectiligne alternatif, on a le parallélogramme de Watt, l'inverseur Peaucellier, et divers autres mécanismes analogues.

53. Bielle et manivelle. — Dans le dispositif bielle et manivelle, la bielle AB est articulée, d'une part, avec une manivelle OA tournant autour d'un axe O, et, d'autre part, avec une barre BC glissant entre les guides *g*.

Supposons que la manivelle ait une vitesse angulaire constante ω et que la droite BC passe par le centre O. Si on compte le temps à partir de l'époque où la bielle était appli-

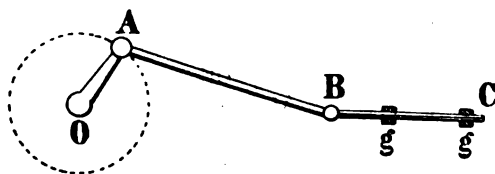


Fig. 120.

quée sur cette droite, et si on représente OB par x , AB par l , le triangle OAB donne :

$$l^2 = R^2 + x^2 - 2Rx \cos \omega t,$$

d'où l'on tire :

$$x = R \cos \omega t + \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \omega t}.$$

Cette formule donne, pour valeurs extrêmes de x , $l + R$ et $l - R$; R est le rayon de la manivelle.

On pourrait conclure de cette formule l'expression de la vitesse du point B; mais il est plus simple de raisonner comme au numéro 50.

Pour une position quelconque de la bielle, le centre instantané est en I à l'intersection de la normale en A à la circonférence en O avec la normale en B à la trajectoire de ce joint. Soient V la vitesse rectiligne du point B, ω' la vitesse de la rotation instantanée autour de I.

En égalant les deux expressions de la vitesse de A, on obtient :

$$\omega \times OA = \omega' \times IA;$$

égalant de même les deux expressions de la vitesse de B, il vient :

$$V = \omega' IB,$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{V}{\omega} = OA \times \frac{IB}{IA}.$$

Menons OE perpendiculaire sur OC ; les triangles semblables BAI et EAO donnent la proportion :

$$\frac{BI}{AI} = \frac{OE}{AO};$$

par suite :

$$\frac{V}{\omega R} = \frac{OE}{R}.$$

Ceci montre que les vitesses des extrémités A et B de la bielle sont proportionnelles au rayon de la manivelle et au segment déterminé par la bielle sur le rayon perpendiculaire à la direction rectiligne.

Lorsque le bouton A se rapproche des points m et n, la longueur OE diminue ainsi que la vitesse V ; la barre BC se déplace alors avec une vitesse de plus en plus petite, et elle cesse tout à fait de se mouvoir quand le bouton est parvenu en m ou n. Pour cette raison, les points m et n sont désignés sous le nom de points morts ; le mouvement ne s'y continue qu'en vertu de la vitesse acquise d'après l'inertie.

On voit que, dans le dispositif bielle et manivelle, le mouvement s'éteint lentement et sans secousse, et que la vitesse

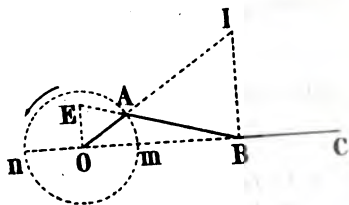


FIG. 121.

croît et décroît rapidement, ce qui est un des principaux avantages de cette transformation de mouvement.

La transmission est d'ailleurs réciproque, c'est-à-dire que, si l'on fait tourner la manivelle OA, le mouvement rectiligne alternatif du point B en résulte sans aucune ambiguïté; les points morts sont alors sans inconvénient; cette transmission fournit donc un moyen de transformer un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne alternatif.

54. Excentrique à collier. — C'est un dispositif analogue au précédent et qui donne une transformation du même genre.

Sur un arbre O est calé un cercle dont le centre C est situé en dehors de l'axe de O, et dont la circonférence enveloppe entièrement cet arbre; c'est cette circonférence massive

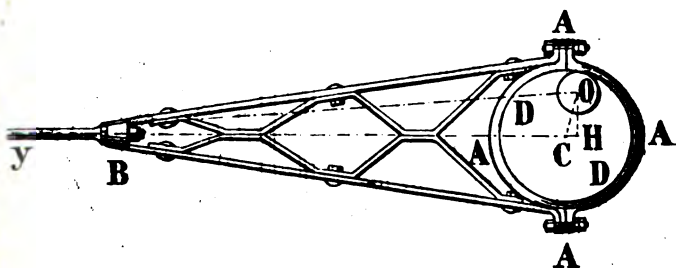


Fig. 122.

qu'on appelle excentrique. Au pourtour du cercle est placé un collier AA, qui enveloppe tout l'excentrique et à l'intérieur duquel cette pièce peut glisser à frottement doux. Au collier est fixé un système de barres rigides qui s'attachent en un point B d'une tige By mobile suivant la droite BO.

Il est clair que, si l'arbre O est animé d'un mouvement de rotation, il tend à entraîner avec lui l'excentrique, le collier, et les barres rigides; mais, le collier n'étant pas serré contre l'excentrique, ce mouvement de rotation se transforme en un mouvement de translation du point B, absolument comme dans le cas d'une bielle CB et d'une manivelle OC. En résumé, tout se passe comme si la manivelle OC menait

la bielle CB; le mouvement circulaire continu de l'excentrique imprime donc au point B, le long de sa trajectoire, un mouvement alternatif dont l'amplitude est égale à $2OC$.

La transformation par excentrique n'est pas réciproque, parce que la poussée qu'on exercerait au point B pour faire tourner l'excentrique développerait une résistance considérable au frottement.

55. Excentrique en cœur. — Assez fréquemment, on se propose de conduire alternativement dans un sens rectiligne une tige MN au moyen d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe O (fig. 123), et avec la condition que, pour des angles égaux décrits par l'arbre tournant, la tige avance ou recule de quantités égales. Cette transmission peut être réalisée au moyen d'une courbe en cœur.

Le tracé ordinairement appliqué est le suivant : par le centre O de la rotation, menons des droites OC, OD, OE, OF, OG, OH, OI, faisant entre elles et avec les droites OA, OB des angles égaux à une fraction quelconque, $1/8$ par exemple, de deux angles droits. Le mouvement de la courbe en cœur se faisant dans le sens de la flèche, au bout de $1/16$ de tour le point C sera parvenu en c, et, par suite, l'extrémité d'une pièce mobile assujettie à suivre la droite fixe MN sera poussée de la quantité Ac. Au bout de $2/16$ de tour, elle sera poussée de même en d; au bout de $3/16$, en e, et ainsi de suite.

Pour que le mouvement soit uniforme pendant tout le demi-tour, il faut que les intervalles Ac, cd, de, ..., ib, soient égaux, Ab représentant la course totale de la pièce mobile MN. On devra donc partager Ab en 8 parties égales; les divi-

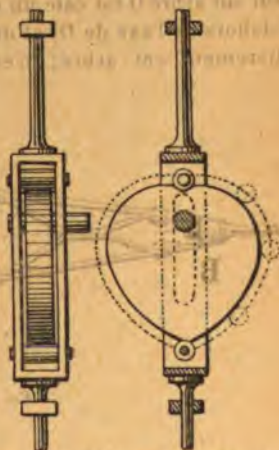


Fig. 123.

sions feront connaître les longueurs des rayons OC , OD , OE , OI , OB , et permettront de tracer la courbe AB , qui est une spirale d'Archimède.

Plus généralement, l'excentrique en cœur permet de transformer un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe O en un mouvement rectiligne alternatif quelconque, soit uniforme ou uniformément varié, ou uniforme avec

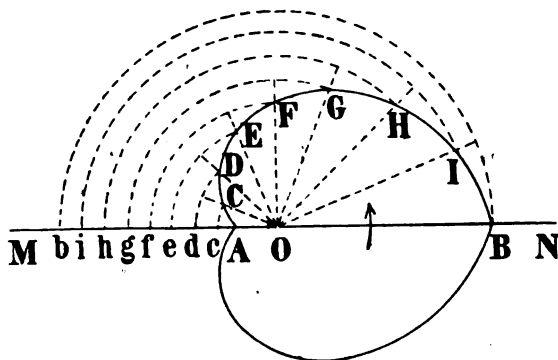


Fig. 124.

intermittences; il suffit de disposer convenablement l'appareil. Cet excentrique a été modifié par le général Morin pour supprimer les changements brusques de vitesse aux extrémités de la course, qui produisent des chocs nuisibles au bon fonctionnement de l'appareil.

56. Parallélogramme de Watt. — On nomme ainsi un système de pièces articulées dont la principale disposition a été imaginée pour assurer la direction rectiligne du mouvement de la tête d'un piston de machine à vapeur, assemblé à l'extrémité d'un balancier qui tend à lui faire décrire un arc de cercle.

Considérons une manivelle ou balancier OA , et trois tiges AB , BC , CD , articulées en A , B , C , D , de manière à former, avec la partie AD du balancier, un parallélogramme $ABCD$; pour une position quelconque du balancier, le paral-

le parallélogramme peut affecter une infinité de formes différentes, puisque les angles en sont variables. Si donc, ainsi qu'on le fait dans le cas de la bielle, on assujettit le sommet B à se mouvoir sur une ligne donnée EF, le mouvement de l'appareil sera déterminé, aussi bien que les variations de formes du parallélogramme; en particulier, le sommet C décrira une ligne GH dont la nature dépend de la directrice EF.

Or, Watt a reconnu à l'aide d'épures soigneusement faites que, si EF est une ligne droite, GH diffère très peu d'un arc de

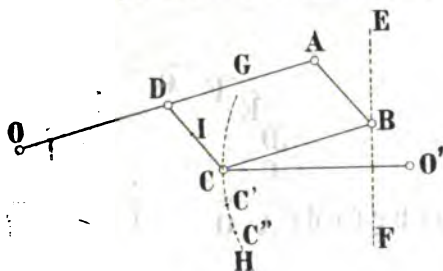


FIG. 125.

cercle, pourvu que les diverses parties de la machine aient des dimensions convenables et que le balancier OA ne s'écarte pas d'une certaine position moyenne. Inversement, si le sommet C parcourt un arc de cercle, le sommet B décrit, à fort peu près, une ligne droite EF. Rigoureusement, le lieu du point B est une lemniscate très allongée (fig. 127), que l'on peut pratiquement confondre avec une droite sur un certain parcours si les proportions de la figure sont convenablement choisies.

Pour faire parcourir un arc de cercle au point C, il suffit de le lier à un point fixe O' au moyen d'une tige O'C articulée avec BC et DC.

Pour trouver le centre O' et le rayon CO', on donne au parallé-

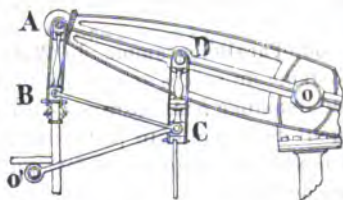


FIG. 126.

gramme trois positions différentes après avoir articulé en B la tige à laquelle on veut donner un mouvement rectiligne alternatif, et l'on a ainsi trois points C, C', C'', qui déterminent l'arc GH.

Dans les machines à vapeur à balancier, la tige du piston,

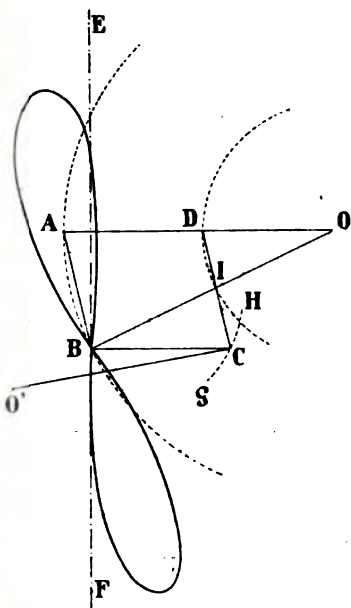


FIG. 127.

qui a un mouvement rectiligne alternatif, est attachée en B; le point C, relié au point fixe O', décrit un arc de cercle d'un mouvement également alternatif. Sur la figure 127 on voit nettement qu'un arc de la lemniscate, lieu du sommet B, se confond sensiblement avec la droite EF.

Si l'on considère le point I milieu de DC, ce point décrit une courbe homothétique de la lemniscate, laquelle se confond aussi sur un certain parcours avec un segment de droite, c'est-à-dire que le mouvement du point I est à peu près rectiligne. On utilise

cette propriété en attachant à ce point la tige du piston de la pompe à air.

57. Inverseur Peaucellier. — Cet appareil donne une solution rigoureuse du problème de la transformation du mouvement circulaire alternatif en un mouvement rectiligne alternatif. Le parallélogramme de Watt ne donne qu'une solution approchée, mais suffisante dans la pratique.

On a un balancier OA et quatre tiges égales AB, BD, DC, CA, articulées en A, B, D, C, et qui forment un losange ABDC. Les sommets A et D décrivent des arcs de cercle de centre O; le sommet C est également assujéti à demeurer sur une circonférence

dont le centre O' est fixe. Alors on peut démontrer que, si $OO' = O'C$, le lieu du quatrième sommet B est une droite EF perpendiculaire à OO' .

La démonstration se fait par l'analyse en écrivant les équations des cercles O et O' , et exprimant que les quatre côtés du losange sont égaux. On peut aussi raisonner par la géométrie et montrer que le point B décrit la droite transformée par rayons vecteurs

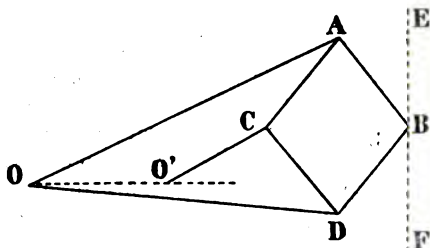


FIG. 128.

réciroques de la circonférence lieu du point C . En effet, on observe d'abord que les trois points O , C , B sont situés sur la bissectrice de l'angle AOD perpendiculaire à AD . On a ensuite :

$$OC = OB - CH,$$

$$OB = OH + CH,$$

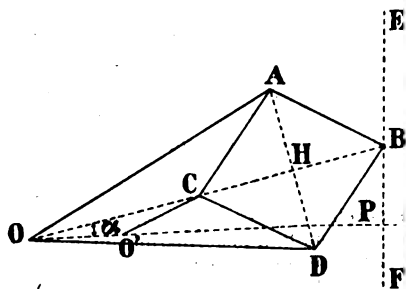


FIG. 129.

d'où, en faisant le produit :

$$OC \times OB = OH^2 - CH^2.$$

D'autre part, la figure donne :

$$\overline{OH}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AH}^2, \quad \overline{CH}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{AH}^2,$$

c'est-à-dire :

$$\overline{OH}^2 - \overline{CH}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{CA}^2 = \text{const.}$$

Ainsi on a :

$$OC \times OB = \text{const.},$$

ce qui montre bien que le point B décrit la transformée de la courbe lieu du point C.

D'ailleurs, si l'on désigne par α l'angle COO' , on a les relations :

$$OC = 2OO' \cos \alpha, \quad OB \cos \alpha = OP,$$

d'où

$$OC \times OB = 2OO' \times OP = \text{const.}$$

La distance OP est donc constante, c'est-à-dire que le lieu du point B est la perpendiculaire EF à OO' .

CHAPITRE II

STATIQUE

§ 1. — PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA MÉCANIQUE

58. La mécanique repose sur trois principes qui sont en quelque sorte comme les axiomes de cette science ; ces principes ne sont pas évidents *a priori* ; ils ne sont susceptibles d'aucune démonstration ni de vérification expérimentale immédiate, et pourraient avec plus de raison se comparer au célèbre postulatum d'Euclide. On a été conduit à ces principes par une longue suite d'inductions, et ils n'ont été reçus comme vrais que parce que toutes les conséquences logiques que l'on a pu en déduire se sont toujours trouvées vérifiées dans les phénomènes de la nature. La vérification la plus remarquable qui ait été faite se trouve dans la mécanique céleste.

59. **Principe de l'inertie.** — *Un point matériel au repos ou en mouvement ne peut modifier par lui-même son état de repos ou de mouvement.*

Ce principe est dû à Képler ; il en résulte qu'un point matériel au repos persistera indéfiniment dans cet état, et qu'un autre point en mouvement aura un mouvement rectiligne et uniforme, tant qu'aucune action extérieure ne viendra s'exercer sur ces points.

La première conclusion est évidente, et il n'y a pas de raison pour qu'un point matériel au repos se dirige vers une région de l'espace plutôt que vers une autre. La seconde n'est pas moins évidente, car on ne voit pas pourquoi le point

matériel en mouvement s'écarterait de la ligne droite dans un sens plutôt que dans un autre. Mais la constance de la vitesse n'apparaît pas de prime abord avec autant d'évidence, car tous les mouvements que l'on produit à la surface de la terre se détruisent rapidement, dès que la cause cesse d'agir. Cependant, si l'on y réfléchit avec attention, on reconnaît que ce sont des causes étrangères qui diminuent et qui finissent par annuler la vitesse du point. Par exemple, une bille d'ivoire lancée sur un billard recouvert en drap s'arrête au bout de quelques instants; si le billard est en marbre, le mouvement a une durée plus longue; plus la surface est polie, moins la vitesse diminue, et l'on conçoit que, si le frottement pouvait être supprimé, la vitesse demeurerait constante.

On donne le nom de *force* à toute cause capable de produire ou de modifier le mouvement d'un point matériel. Les forces reçoivent diverses dénominations suivant les circonstances où elles agissent; par exemple il y a des forces d'attraction ou de répulsion; certaines forces se nomment poids, d'autres sont des moteurs animés, des forces moléculaires, forces élastiques, etc. Lorsqu'une force ne produit pas de mouvement, elle détermine une pression ou une tension.

Dans la force, il y a trois éléments à considérer : 1° le *point d'application*, c'est-à-dire le point matériel sur lequel elle agit; 2° la *direction*, c'est-à-dire la direction de la droite suivant laquelle elle tend à déplacer le point d'application; 3° l'*intensité*.

60. Principe des mouvements relatifs. -- *Quand, sous l'action de certaines forces, un système de points matériels libres est animé d'un mouvement de translation dans l'espace, toute force nouvelle agissant sur l'un des points lui imprime un mouvement relatif indépendant du mouvement de translation du système, c'est-à-dire le même que si ce système était au repos.*

Par exemple, un corps abandonné dans un wagon vient tomber au même point, que le wagon soit au repos ou qu'il ait un mouvement rectiligne.

Il résulte du principe ci-dessus, énoncé pour la première fois par Galilée, que si, parmi toutes les forces agissant sur

un point matériel M, on en considère une en particulier, le mouvement du point s'obtiendra en composant par la règle des mouvements relatifs celui que prendrait le point M partant du repos et soumis seulement à la force en question, avec celui que prendrait le point si l'on supprimait la même force.

On énonce quelquefois la loi des mouvements relatifs en disant que *l'effet d'une force sur un point matériel est indépendant du mouvement antérieurement acquis par ce point, ou encore que, lorsque plusieurs forces agissent simultanément sur un point matériel, chacune d'elles produit son effet comme si les autres n'existaient pas.* C'est ce dernier énoncé qui constitue le principe de l'indépendance des effets des forces.

61. Forces constantes. — Une force reste constante lorsqu'elle conserve la même direction et la même intensité pendant toute la durée du mouvement.

THÉORÈME I. — *Une force constante imprime à un point matériel au repos un mouvement rectiligne uniformément accéléré.*

En effet, sous l'action de la force, le point matériel acquiert dans le premier élément de temps Δt une vitesse Δv dirigée dans le sens de la force elle-même. Pendant le second instant Δt , le point conserve sa vitesse acquise Δv (59) et en acquiert une égale dans le même sens (60), puisque la force est constante en grandeur et en direction.

Ainsi, à la fin du temps $2\Delta t$, le point possède une vitesse $2\Delta v$. En continuant ce raisonnement, on voit qu'à la fin du troisième instant il possède dans le même sens la vitesse $3\Delta v$, et qu'en général la vitesse est proportionnelle au temps écoulé et est toujours dirigée dans le même sens. Donc le mouvement est rectiligne et uniformément accéléré.

RÉCIPROQUE. — *Lorsqu'un point matériel est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié, il est soumis à l'action d'une force constante dirigée suivant la même droite que ce mouvement.*

En effet : 1° le point matériel est sollicité par une force, autrement son mouvement serait uniforme ; 2° cette force a la même direction que le mouvement lui-même, autrement

elle produirait à un instant donné une vitesse dirigée comme elle, et qui, se composant avec la vitesse acquise, modifierait la direction de cette dernière; 3° enfin, cette force est constante, car, le mouvement étant uniformément varié, la vitesse varie de quantités égales dans des temps égaux, quelque petits que soient ces temps; et la force, qui, à chaque instant Δt , produit constamment la même variation de vitesse, ne peut agir sur le point qu'avec une intensité constante, la même que s'il était au repos.

D'ailleurs il est évident que la force est dirigée dans le sens du mouvement s'il est accéléré, et en sens contraire s'il est retardé.

Comme conséquence, on voit que la pesanteur est une force constante, puisque la chute d'un corps est un mouvement uniformément varié.

THÉORÈME II. — *Il existe un rapport constant entre les forces appliquées successivement à un même point matériel et les accélérations qu'elles produisent.*

En effet, soient deux forces constantes F et F' , qui produisent sur le même point des accélérations J et J' . Supposons qu'il existe entre ces forces une commune mesure f , de telle sorte que l'on ait :

$$F = nf, \quad F' = n'f, \quad \text{d'où} \quad \frac{F}{F'} = \frac{n}{n'}.$$

D'autre part, appelons j l'accélération produite par la force f ; en vertu de la loi du mouvement relatif, si l'on applique au point matériel n forces égales à f dans le même sens, elles produisent n accélérations indépendantes dont chacune sera égale à j , et l'accélération résultante sera nj . Ainsi la force nf produira l'accélération nj . De même la force $n'f$ produira l'accélération $n'j$. On aura donc :

$$J = nj, \quad J' = n'j, \quad \text{d'où} \quad \frac{J}{J'} = \frac{n}{n'};$$

et par suite, d'après la relation ci-dessus :

$$\frac{F}{F'} = \frac{J}{J'}. \quad (1)$$

Comme le raisonnement subsiste, quelque petite que soit la commune mesure f , on peut en conclure que la relation (1) est générale.

Si d'autres forces constantes F', F'', F''', \dots , sont appliquées successivement sur le même point et produisent des accélérations J', J'', J''', \dots , on aura de même :

$$\frac{F}{J} = \frac{F'}{J'} = \frac{F''}{J''} = C^{\text{te}}.$$

Ce rapport entre la force et l'accélération, qui reste constant pour un même point matériel, varie au contraire d'un point à un autre ; on lui donne le nom de *masse* du point considéré, et, en le désignant par m , on a :

$$\frac{F}{J} = m, \quad \text{d'où} \quad F = mJ. \quad (2)$$

Il résulte de cette dernière relation qu'une force constante est mesurée par le produit de la masse du point matériel sur lequel elle agit par l'accélération qu'elle lui communique.

Si la force qui agit sur le point matériel est son poids p , l'accélération n'est autre chose que la valeur de g , c'est-à-dire que l'on a $J = g$; par suite :

$$\frac{F}{J} = \frac{p}{g} = m.$$

La masse est un coefficient constant qui caractérise chaque point matériel, qui correspond en quelque sorte à une propriété spéciale du point matériel au point de vue mécanique. Un point matériel diffère d'un autre par l'accélération différente qu'il prend sous l'action d'une même force ; deux points matériels diffèrent l'un de l'autre par leur masse.

La masse d'un corps est la somme des masses des points matériels qui le composent. En désignant les poids de ces derniers par p, p', p'', \dots , la masse M du corps sera :

$$M = \frac{p}{g} + \frac{p'}{g} + \frac{p''}{g} + \dots = \frac{p + p' + p'' + \dots}{g},$$

ou, en désignant par P le poids du corps :

$$M = \frac{P}{g}, \quad P = Mg. \quad (3)$$

Lorsque $F = J$, la relation (2) donne $m = 1$, c'est-à-dire que l'unité de masse est celle pour laquelle la force a même mesure que l'accélération. Dans le cas de la pesanteur, lorsque $M = 1$, on a $P = g$, ce qui revient à dire que le poids de l'unité de masse en un lieu quelconque est exprimé par le même nombre que la valeur de g en ce lieu. A Paris, l'unité de masse pèse $9^{kg},8088$.

Si l'on observe que, pour $F = 1$ et $J = 1$, on a $m = 1$, on peut encore dire que l'unité de masse est la masse d'un corps auquel une force de 1 kilogramme imprime une accélération de 1 mètre.

La *densité* d'un corps homogène est la masse de l'unité de volume de ce corps; si on désigne la densité par ρ et le volume par V , on a :

$$M = \rho V, \quad \text{d'où} \quad P = \rho g V.$$

82. THÉORÈME. — *Lorsqu'un point matériel libre est en mouvement, la force qui le sollicite à chaque instant a pour direction celle de l'accélération du point mobile; son intensité est mesurée par le produit de la masse du point par l'accélération qu'il possède à cet instant.*

Supposons, d'abord, que le point matériel ait un mouvement rectiligne dont l'accélération à l'instant t soit J ; on sait que cette accélération est dirigée, ainsi que la force, suivant la droite que décrit le point matériel. Pendant l'intervalle de temps très petit qui comprend l'instant considéré, l'accélération varie d'une manière continue, et, si on appelle J_1 et J_2 sa plus petite et sa plus grande valeur, on a les inégalités :

$$J_1 < J < J_2,$$

d'où l'on déduit :

$$mJ_1 < mJ < mJ_2.$$

Or la force F est évidemment comprise entre les forces

constantes mJ_1 et mJ_2 , donc F et le produit mJ sont compris entre les mêmes limites. D'ailleurs, comme ces limites deviennent égales quand on réduit l'intervalle de temps à l'instant considéré, on en conclut que $F = mJ$.

Lorsque le point matériel a un mouvement curviligne, ce dernier, à une époque quelconque t et pendant un temps infiniment petit dt , peut être considéré comme résultant du mouvement dû à la vitesse acquise et du mouvement dû à l'action de la force F pendant le temps dt . Par conséquent l'accélération du mouvement est la résultante des accélérations de ces mouvements composants. Or le mouvement dû à la vitesse acquise étant uniforme d'après l'inertie, son accélération est nulle; donc l'accélération résultante n'est autre chose que l'accélération due à la force F . Comme cette force peut être considérée comme constante pendant l'élément de temps dt , elle est donc égale à mJ et dirigée dans le même sens que J .

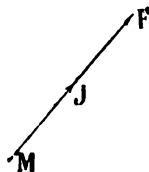


FIG. 130.

Ce théorème donne le moyen de représenter l'intensité d'une force F constante ou variable, agissant sur un point matériel M , par un vecteur MF ayant même direction et même sens que le vecteur MJ représentant l'accélération, et tel que l'on ait constamment :

$$\frac{MF}{MJ} = m, \quad \text{d'où} \quad F = mJ.$$

83. Mesure des forces. — Quand deux forces égales et directement opposées sont appliquées en un même point matériel au repos, l'accélération totale qu'elles impriment à ce point est nulle en vertu du principe de Galilée, de sorte que le point reste au repos; il résulte de là que deux forces égales et de sens contraires agissant simultanément sur le même point matériel sont impuissantes à modifier l'état de repos ou de mouvement de ce point; on exprime ce fait en disant que les forces en question se font *équilibre*, ou encore que le point est en équilibre sous l'action de ces forces. L'équi-

libre est statique si le point est au repos, dynamique s'il a un mouvement rectiligne et uniforme.

Il est évident, d'après cela, que l'on ne modifie pas l'état de repos ou de mouvement d'un point matériel en lui appliquant des forces deux à deux égales et de sens contraires.

Inversement, si deux forces appliquées en sens contraires à un même point matériel en repos ne lui communiquent aucun mouvement, on dit qu'elles sont égales; une force est alors double, triple, etc., d'une autre, lorsque, dans les mêmes conditions, elle produit le même effet que deux, trois... forces égales à la première. On voit par là que les forces, comme les autres grandeurs mathématiques, sont susceptibles d'être mesurées, et qu'il suffit pour cela de les comparer séparément à une autre force prise pour unité; cette façon de mesurer les forces est d'ailleurs plus commode que celle qui consiste à comparer entre elles les accélérations produites par ces forces sur une même masse. Il y a des forces de natures différentes : la pesanteur, la chaleur, les actions électriques..., etc., mais c'est à la pesanteur que l'on compare les forces.

En dynamique, tout problème combine trois éléments irréductibles : le temps, l'espace et la force; il est donc nécessaire de faire choix de trois unités fondamentales pour mesurer les différentes grandeurs que l'on peut rencontrer.

Lors de l'introduction du système métrique, les unités choisies furent la *seconde* sexagésimale pour le temps, le *mètre* pour l'espace, et le *kilogramme* pour la force. Ces unités sont encore en usage aujourd'hui; mais le système présente un inconvénient à cause de l'unité de force, qui est un poids, et qui est par conséquent variable d'un point à un autre du globe. Pour remédier à cet inconvénient, Gauss avait proposé de remplacer l'unité de force par l'unité de masse.

En 1881, le Congrès international des électriciens, réuni à Paris pour étudier un système rationnel d'unités, s'est arrêté au système C. G. S., dont l'usage est devenu définitif depuis 1889. Dans ce système, les unités fondamentales sont la *seconde sexagésimale* pour le temps, le *centimètre* pour l'es-

pace, et le *gramme-masse* pour la masse; le *gramme-masse* est la masse d'un centimètre cube d'eau distillée à 4°. L'unité de force est alors la force qui, agissant sur un corps dont la masse égale l'unité, lui imprime une accélération de 1 centimètre par seconde; cette unité est la *dyne*, dont la valeur est très petite, car de la relation $P = mJ$ on déduit, en observant que $p = mg$:

$$1 \text{ dyne} = 1 \text{ gramme-masse} \times 1 \text{ centimètre},$$

$$1 \text{ gramme-poids} = 1 \text{ gramme-masse} \times 980^{\text{m}},88;$$

de sorte qu'un gramme-poids vaut 980,88 dynes. Comme unité pratique on prend souvent la *mégadyne*, qui vaut un million de dynes.

64. Principe de la réaction. — *Toutes les fois qu'un point matériel agit sur un autre point matériel, celui-ci réagit sur le premier avec une force égale et directement opposée.*

Par exemple, lorsque la main exerce une certaine pression sur une table, on sent que la table réagit contre la main. L'action et la réaction sont deux forces égales et directement opposées; mais il importe d'observer qu'elles n'agissent pas sur le même point matériel.

Cette réaction du second point matériel se nomme *force d'inertie*. Pour comprendre le sens de cette expression, il faut observer que, lorsqu'on cherche à faire mouvoir un point ou un corps, on éprouve une certaine résistance qui constate l'inertie de la matière; c'est à ce point de vue que cette réaction a été appelée *force d'inertie*. Mais on a étendu cette notion au cas où l'action s'exerce sur le corps sans intermédiaire visible, et l'on a toujours trouvé les phénomènes observés en accord parfait avec les calculs fondés sur cette hypothèse. C'est ainsi que l'attraction du Soleil sur la Terre est nécessairement accompagnée d'une attraction égale et opposée de la Terre sur le Soleil; l'une est l'action exercée sur la Terre, l'autre est la réaction ou la force d'inertie de la Terre. Le principe de la réaction est dû à Newton.

§ 2. — ÉQUILIBRE DU POINT MATÉRIEL

65. **Composition des forces.** — Considérons les deux forces MF_1 et MF_2 qui, appliquées successivement au point M , lui communiquent, dans le même intervalle de temps t , des accélérations J_1 et J_2 ; les valeurs de ces forces sont, d'après ce que l'on a vu plus haut:

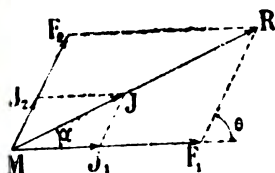


FIG. 131.

$$F_1 = mJ_1, \quad F_2 = mJ_2.$$

Mais ces deux forces agissant simultanément sur le point M lui communiquent dans le temps t une accélération totale J qui, d'après le principe de la composition des accélérations, est la somme géométrique de J_1 et J_2 , c'est-à-dire que l'on a :

$$(J) = (J_1) + (J_2).$$

Or la force unique R qui, dans le même intervalle de temps, serait capable de communiquer au point matériel cette accélération J , est évidemment :

$$R = mJ;$$

par conséquent :

$$(R) = (F_1) + (F_2).$$

Cette force R , que l'on nomme *résultante* des forces F_1 et F_2 , est donc à chaque instant représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs MF_1 et MF_2 représentant les forces composantes.

Le triangle MF_1R donne, en observant que $F_1R = mF_2$,

$$\frac{F_1}{\sin(\theta - \alpha)} = \frac{F_2}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \theta},$$

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \theta.$$

Ces équations permettent de calculer la résultante R et l'angle α quand on connaît les forces F_1 , F_2 , et l'angle θ .

Inversement, connaissant la résultante R et les directions MF_1 et MF_2 , rien n'est plus facile de déterminer les composantes F_1 et F_2 .

Lorsque les forces F_1 et F_2 sont rectangulaires, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\sin \theta = 1$, $\sin(\theta - \alpha) = \cos \alpha$; par suite :

$$F_1 = R \cos \alpha, \quad F_2 = R \sin \alpha, \quad R^2 = F_1^2 + F_2^2.$$

Dans ce cas, on voit que chaque force est la projection de la résultante sur la direction de la force.

Plus généralement, supposons le point O (fig. 132) sollicité par n forces F_1, F_2, \dots, F_n , qui, agissant séparément pendant un temps t , communiqueraient à ce point des accélérations J_1, J_2, \dots, J_n ; on a :

$$F_1 = mJ_1, \quad F_2 = mJ_2, \quad \dots, \quad F_n = mJ_n;$$

et l'accélération totale J , communiquée au point pendant le

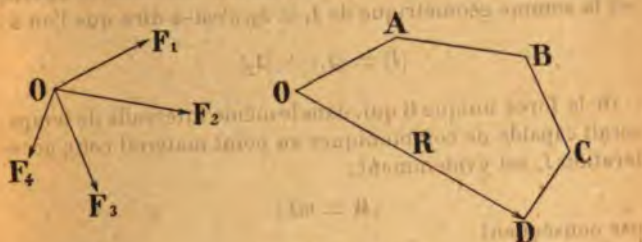


Fig. 132.

même temps t par les n forces agissant simultanément, est :

$$(J) = (J_1) + (J_2) + \dots + (J_n).$$

Si l'on multiplie par la masse m du point, il vient :

$$(mJ) = (mJ_1) + (mJ_2) + \dots + (mJ_n);$$

mais la force R capable de communiquer au point O , dans le temps t , l'accélération J , est évidemment $R = mJ$; par conséquent on peut écrire :

$$(R) = (F_1) + (F_2) + (F_3) + \dots + (F_n).$$

Cette égalité montre que la résultante R est représentée à chaque instant par la somme géométrique des vecteurs représentatifs des forces composantes $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$.

Par conséquent, si plusieurs forces sont appliquées à un même point matériel, et qu'on construise une ligne polygonale partant de ce point, dont les côtés consécutifs représentent ces forces en grandeur et en direction, la droite qui

ferme le polygone représente leur résultante en grandeur et en direction. Cette construction constitue le *polygone des forces*.

Si toutes les forces sont dirigées suivant la même droite, la résultante est leur somme algébrique.

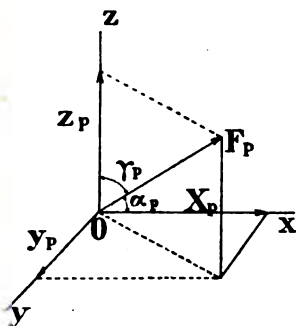


FIG. 183.

Par le point O , où sont appliquées un certain nombre de forces F_1, F_2, \dots, F_n , faisons passer trois axes rectangulaires OX, OY, OZ ; soient: $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, ..., $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$, les angles directeurs de ces forces. Désignons généralement par X_p, Y_p, Z_p , les composantes de la force F_p suivant les axes; on a, puisque chaque composante, telle que X_p par exemple, est la projection de la force F_p sur OX :

$$\begin{aligned} X_1 &= F_1 \cos \alpha_1, & X_2 &= F_2 \cos \alpha_2, & \dots, & X_n &= F_n \cos \alpha_n; \\ Y_1 &= F_1 \cos \beta_1, & Y_2 &= F_2 \cos \beta_2, & \dots, & Y_n &= F_n \cos \beta_n; \\ Z_1 &= F_1 \cos \gamma_1, & Z_2 &= F_2 \cos \gamma_2, & \dots, & Z_n &= F_n \cos \gamma_n. \end{aligned}$$

Mais, si X, Y, Z sont les composantes de la résultante R , et a, b, c les angles directeurs de cette force, on a d'autre part, en additionnant les forces dirigées suivant chaque axe,

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n; \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n; \\ Z &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n; \end{aligned}$$

puis :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \cos a = \frac{X}{R}, \quad \cos b = \frac{Y}{R}, \quad \cos c = \frac{Z}{R}.$$

Ces formules déterminent complètement la résultante R lorsque les forces F_1, F_2, \dots, F_n sont données en grandeur et en direction.

66. Équilibre d'un point matériel libre. — Plusieurs forces appliquées à un point matériel se font équilibre à un instant donné, lorsque l'état du point matériel n'est pas influencé par la présence de ces forces. Dans ce cas, leur résultante est nécessairement nulle, car sans cela le point aurait un mouvement varié; par conséquent le polygone des forces se ferme de lui-même, et cette condition nécessaire est suffisante pour l'équilibre. Ainsi on a $R = 0$, c'est-à-dire :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$$

ce qui exige que l'on ait séparément :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0. \quad (1)$$

Inversement, si ces conditions sont satisfaites, on a $R = 0$, et le point est en équilibre. Les relations (1) sont donc les conditions nécessaires et suffisantes pour que le point M soit en équilibre.

Dans le cas de trois forces F_1, F_2, F_3 , la force F_3 par exemple doit être égale et directement opposée à la résultante R des deux autres pour que le polygone des forces se ferme. Si donc on appelle $\theta_1, \theta_2, \theta$, les angles $F_2MF_3, F_1MF_3, F_1MF_2$, on doit avoir :

$$F_3 = R, \quad \theta_2 = \pi - \alpha, \quad \theta_1 = \pi - (\theta - \alpha);$$

par suite :

$$\frac{F_1}{\sin \theta_1} = \frac{F_2}{\sin \theta_2} = \frac{F_3}{\sin \theta}. \quad (2)$$

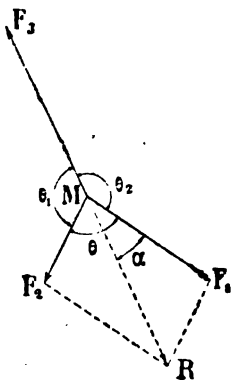


FIG. 134.

Il faut donc pour l'équilibre: 1° que les trois forces F_1, F_2, F_3 soient situées dans un même plan; 2° que chacune d'elles soit proportionnelle au sinus de l'angle des deux autres.

APPLICATION. — Prenons un point M à l'intérieur d'un triangle isocèle ABC , et proposons-nous de déterminer sa position d'équilibre lorsqu'on le suppose attiré par les trois sommets de ce triangle proportionnellement à la distance.

Posons $MA = \alpha$, $MB = MC = \beta$, $BMC = \theta$. La force dirigée suivant la droite MA peut s'exprimer par la formule $mk^2\alpha$, m désignant la masse du point attiré, et k^2 une constante d'attraction; de même, les forces égales dirigées suivant MB et MC peuvent s'écrire $mk^2\beta$; on voit d'ailleurs que AM doit être bissectrice de l'angle BMC . Les formules (2) donnent :

$$\frac{mk^2\alpha}{\sin \theta} = \frac{mk^2\beta}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

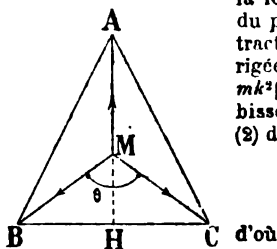


FIG. 135

d'où

$$\frac{\alpha}{2 \cos \frac{\theta}{2}} = \beta; \quad (a)$$

or, si h désigne la hauteur AH du triangle, on a :

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{h - \alpha}{\beta}. \quad (b)$$

Rapprochant les équations (a) et (b), on obtient immédiatement $\alpha = \frac{2h}{3}$, ce qui montre que la position d'équilibre cherchée se confond avec le centre de gravité du triangle ABC .

Stabilité de l'équilibre. — Lorsqu'un point matériel est dans une position d'équilibre, et qu'on le déplace infiniment peu de cette position, s'il y revient de lui-même on dit que l'équilibre est *stable*. Dans le cas contraire, l'équilibre est *instable*.

Considérons, par exemple, un point matériel M attiré par deux centres fixes A et B en raison inverse de la distance, le coefficient d'attraction étant le même pour les deux centres.

Quand le point M est situé au milieu de AB en M' , il est soumis à deux forces égales et de sens contraires, de sorte que M' est une position d'équilibre. Si l'on rapproche le point

du centre B, la force attractive émanant de ce centre devient plus grande que celle qui émane de A, puisque $MA > MB$, de sorte que la résultante des deux forces est dirigée vers B, et que le point abandonne sa position d'équilibre M' pour se rapprocher du centre B. Ainsi M' est une position d'équilibre instable.



FIG. 136.

Au contraire, si le point matériel était repoussé par les centres A et B, M' serait encore une position d'équilibre; mais, en rapprochant le point du centre B, la force répulsive émanant de ce centre deviendrait plus grande que celle qui émanerait de A, et le point serait immédiatement ramené vers M' . Dans ce cas, M' serait une position d'équilibre stable.

Dans l'application ci-dessus, le centre de gravité du triangle est une position d'équilibre stable.

67. Équilibre d'un point qui se déplace sur une surface fixe.

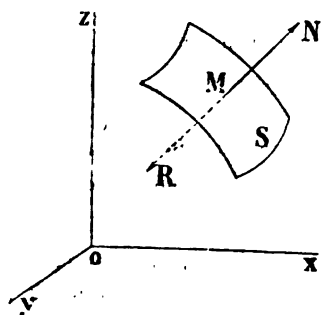


FIG. 137.

— Quand le point M est assujéti à glisser sans frottement sur une surface fixe S, l'équilibre exige que la résultante R des forces auxquelles il est soumis, si elle n'est pas nulle, soit *normale* à la surface. On voit en effet que, lorsque cette condition n'est pas remplie, la force R se décompose en deux autres R' et R'' , la première normale et la seconde tangente à la surface; R' presse le point sur la surface et R''

tend à le faire glisser sur cette surface; l'équilibre ne saurait donc avoir lieu.

Si le point M est retenu sur la surface par ses liaisons, c'est-à-dire ne peut la quitter ni d'un côté ni de l'autre, la condition précédente suffit pour que l'équilibre soit réalisé; mais, lorsque ce point est simplement posé sur la surface,

comme un objet sur une table, il faut, en outre, pour qu'il y ait équilibre, que la résultante des forces agissant sur le point M soit dirigée de façon à presser le point contre la surface.

Soient X, Y, Z les composantes rectangulaires de la résultante R ; λ, μ, ν , les angles directeurs de la normale à la surface au point M ; $f(x, y, z) = 0$, l'équation de cette surface.

On doit avoir :

$$X = R \cos \lambda, \quad Y = R \cos \mu, \quad Z = R \cos \nu,$$

d'où :

$$\frac{X}{\cos \lambda} = \frac{Y}{\cos \mu} = \frac{Z}{\cos \nu} = R;$$

or les cosinus directeurs de la normale sont respectivement proportionnels à $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$; on peut donc écrire :

$$\frac{X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \quad (1)$$

Ces deux équations, jointes à celle de la surface, forment un système de trois équations permettant de déterminer les coordonnées x, y, z de chaque position d'équilibre.

Réaction normale. — Le point M, assujéti à rester sur la surface, exerce sur celle-ci une certaine pression qui donne lieu, d'après le principe de Newton, à une réaction égale et opposée de la surface sur le point ; mais, la surface n'opposant par hypothèse aucune résistance au glissement du point, cette réaction est nécessairement normale à la surface, de sorte que, dans les positions d'équilibre, la résultante R et la réaction normale de la surface sont deux forces égales et directement opposées. On a donc, en désignant par N la réaction normale :

$$N = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \text{avec} \quad N \cos \lambda = -X.$$

Cette dernière équation fait connaître le signe de $\cos \lambda$ et

permet de préciser le sens dans lequel agit la réaction normale.

Dans les surfaces naturelles, l'hypothèse du glissement sans frottement n'est jamais réalisée d'une façon complète, de sorte que la réaction de la surface est toujours oblique à celle-ci et développe une composante tangentielle dont il faut tenir compte.

Les conditions d'équilibre se déterminent comme ci-dessus, mais en comprenant dans les forces qui agissent sur le point M la réaction tangentielle en question, réaction qui reste d'ailleurs comprise entre certaines limites fixées par l'expérience.

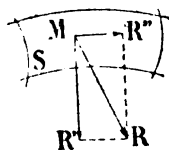


FIG. 138.

68. Équilibre d'un point qui se déplace sur une courbe

fixe. — Considérons un point M assujéti à glisser sans frottement sur la courbe fixe C; un raisonnement identique à celui du paragraphe précédent montrerait que l'équilibre ne peut avoir lieu que si la résultante R est normale à la courbe.

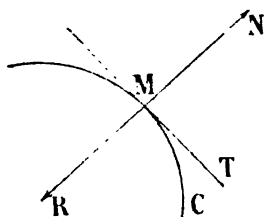


FIG. 139.

Appelons X, Y, Z les composantes rectangulaires de la résultante R; λ , μ , ν , les angles directs

teurs de la normale à la courbe au point M; on doit avoir, puisque R a la direction de la normale,

$$X = R \cos \lambda, \quad Y = R \cos \mu, \quad Z = R \cos \nu;$$

d'où :

$$\frac{X}{\cos \lambda} = \frac{Y}{\cos \mu} = \frac{Z}{\cos \nu} = R.$$

Soit MT la tangente à la courbe; en écrivant que l'angle RMT est droit, il vient :

$$\cos \lambda dx + \cos \mu dy + \cos \nu dz = 0.$$

L'élimination des angles λ, μ, ν , est immédiate et donne :

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0. \quad (1)$$

Cette équation d'équilibre jointe aux deux équations de la courbe C :

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0,$$

fournit trois équations pour déterminer les coordonnées x, y, z de chaque position d'équilibre.

Quand l'équilibre est réalisé, la réaction normale N de la courbe est égale et directement opposée à la résultante R , qui presse le point sur la courbe ; on a par conséquent :

$$N = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

PROBLÈME. — *Un point pesant est placé sur une ellipse dont le petit axe est vertical, et exerce sur ce point une action répulsive horizontale proportionnelle à la distance du point à l'axe. Rechercher les positions d'équilibre du point et la réaction normale.*

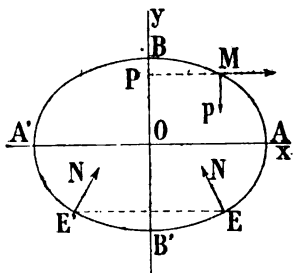


FIG. 110.

Soient x et y les coordonnées du point M ; la force R qui sollicite ce point a pour composantes :

$$X = \mu^2 MP = \mu^2 x, \quad Y = -p, \\ Z = 0.$$

μ^2 étant une constante de répulsion et p le poids du point, pris avec le signe — puisque la pesanteur agit dans le sens des y négatifs.

L'équation d'équilibre (1) se réduit à :

$$Xdx + Ydy = 0, \quad \text{ou} \quad \mu^2 x dx - p dy = 0, \quad (a)$$

car la force R n'a pas de composante perpendiculaire au plan de l'ellipse. D'autre part, l'équation de la courbe :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donne en différentiant :

$$\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} = 0 \quad (b)$$

et l'élimination de $\frac{dy}{dx}$ entre (α) et (β) conduit à la relation d'équilibre :

$$x \left(\frac{p}{a^2} + \frac{\mu^2 y}{b^2} \right) = 0.$$

La solution $x = 0$ montre que les extrémités B et B' du petit axe sont des positions d'équilibre; la réaction normale de la courbe est alors égale à p .

La solution :

$$\frac{p}{a^2} + \frac{\mu^2 y}{b^2} = 0, \text{ d'où } y = -\frac{pb^2}{\mu^2 a^2}, \quad x = \pm \frac{1}{\mu^2 a} \sqrt{\mu^4 a^4 - p^2 b^2},$$

donne deux positions d'équilibre E et E', lorsque $\mu^2 a^2 > pb$; la réaction normale de la courbe a dans ce cas pour composantes :

$$X = \mp \frac{1}{a} \sqrt{\mu^4 a^4 - p^2 b^2}, \quad Y = p.$$

Le point est appuyé contre la partie concave de l'ellipse.

59. Moments des forces concourantes. — Le moment d'un vecteur MF ou d'une force F par rapport à un point O est le produit $F \times OP$ de l'intensité de cette force par sa distance au point O; ce point est le *centre des moments* et OP le *bras de levier* de la force.

Suivant les positions relatives du centre des moments et de la direction de la force, cette dernière paraît entraîner son bras de levier dans un sens ou dans l'autre. Sur la figure, la force MF tend à faire tourner son bras de levier OP dans le sens des aiguilles d'une montre, tandis que la force M'F' tend à faire tourner OP' dans le sens opposé. Pour distinguer ces deux cas, on convient de regarder comme positifs les moments analogues à celui de MF, comme négatifs les moments tels que celui de M'F'.

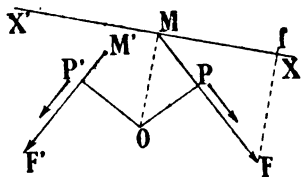


FIG. 141.

On peut donner une expression différente du moment de la force F. Par le point M, menons XX' perpendiculaire à OM

et projetons le point F sur cette droite ; les triangles semblables OMP et FMf donnent :

$$\frac{MF}{OM} = \frac{Mf}{Op};$$

d'où :

$$MF \times OP = Mf \times OM,$$

c'est-à-dire :

$$M'F = \text{proj. } F \times OM.$$

Cette expression est encore celle du moment quand il est négatif, le

signe est le même que celui de la projection Mf .

70. THÉORÈME DE VARIGNON. — *Le moment de la résultante de plusieurs forces appliquées au même point, dans un même plan, par rapport à un point du plan, égale la somme algébrique des moments des composantes.*

Menons XX' perpendiculaire en M sur OM , et projetons les forces et leur résultante sur cet axe, il vient :

$$\text{proj. } R = \text{proj. } F + \text{proj. } F' + \dots;$$

multipliant les deux membres de cette égalité par OM , on obtient :

$$OM \text{ proj. } R = OM \text{ proj. } F + OM \text{ proj. } F' + \dots;$$

c'est-à-dire :

$$M'R = M'F + M'F' + \dots$$

§ 3. — ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES MATÉRIELS

71. Après l'équilibre du point matériel, nous étudierons l'équilibre d'un *système de points matériels*, et tout d'abord l'équilibre d'un solide invariable, ou simplement d'un corps solide.

Le solide invariable est un assemblage de points matériels dont les distances respectives sont invariables. Ce solide

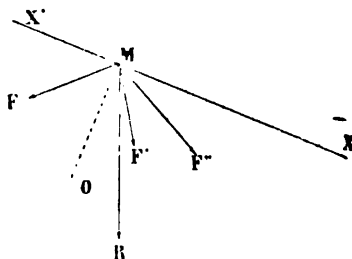


FIG. 142.

l'état peut être considéré comme l'état limite des solides naturels, qui sont tous plus ou moins déformables.

Plusieurs forces appliquées à un corps solide se font équilibre à un instant donné, lorsque l'état du solide n'est pas influencé par la présence de ces forces. Si le corps solide est au repos, l'effet des forces ne doit pas troubler cet état, et il y a équilibre statique. Si le corps est en mouvement, les forces ne doivent pas modifier le mouvement, et il y a équilibre dynamique.

L'équilibre de deux forces appliquées à un même point matériel exige qu'elles soient égales et directement opposées.

L'équilibre de deux forces F et F' , appliquées en deux points M et M' dont la distance est invariable, exige qu'elles soient égales, dirigées suivant la droite MM' et de sens contraire. Cette seconde proposition est généralement considérée comme un axiome.

On voit donc que l'on peut appliquer en un même point d'un corps solide deux forces égales et directement opposées sans rien changer à l'état du solide. On voit aussi que l'on peut transporter le point d'application M d'une force F en un point quelconque M' de sa direction, la distance MM' étant invariable. En effet, appliquons au point M' en sens contraire deux forces F' et F'' égales et parallèles à F ; l'état de repos ou de mouvement du corps n'en est pas altéré, car ces forces se détruisent immédiatement. Or les forces F et F'' se détruisent aussi d'après l'axiome précédent; on peut donc les supprimer, et il ne reste plus que la force F' , laquelle peut être regardée comme la force F qu'on aurait transportée du point M au point M' parallèlement à elle-même.

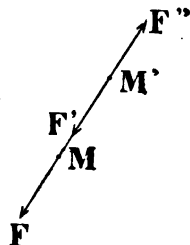


FIG. 143.

72. Composition des forces concourantes. — Si des forces, en nombre quelconque, sont appliquées en différents points d'un corps solide, de telle sorte que leurs directions concourent en un même point de l'espace, ces forces se composent d'après la règle du polygone établie pour le cas d'un

point matériel isolé. En effet, si le point de concours appartient au corps solide, on peut y transporter toutes les forces, qui se trouvent ainsi appliquées en un même point du corps. Si, au contraire, le point de concours n'appartient pas au corps, on peut supposer que ce point est invariablement lié avec le corps, et l'on retombe dans le premier cas. Par conséquent, on peut appliquer à ces forces, dans tous les cas, les règles démontrées du parallélogramme, du parallélépipède et du polygone.

Soient : $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2, \dots$, les composantes suivant les axes des forces concourantes appliquées au solide; désignons par X, Y, Z , les composantes de la résultante. On a :

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n; \\ Y &= Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n; \\ Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n. \end{aligned}$$

La résultante a pour expression :

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Les conditions d'équilibre obliques en écrivant que la résultante est nulle sont : $X = 0, Y = 0, Z = 0$.

73. Composition des forces parallèles. — Composer un système de forces appliquées à un corps solide, c'est remplacer ce système par un autre système, équivalent au point de vue de l'équilibre ou du mouvement, mais plus simple. En particulier, composer deux forces appliquées à un même point matériel, c'est remplacer ces deux forces par leur résultante.

1° Soient F et F' deux forces parallèles et de même sens appliquées en M et M' , la distance MM' étant invariable. On n'altère pas l'état du système formé par les deux forces F et F' si l'on applique aux points M et M' , suivant la direction MM' , deux forces f et f' égales et de sens contraires.

Actuellement composons les forces F et f , puis les forces F' et f' ; et transportons les points d'application des deux résultantes au point de concours I de leurs directions. Enfin, décomposons en ce point les deux résultantes pour retrou-

ver leurs composantes primitives. Les deux forces auxiliaires f et f' égales et opposées se détruisent et peuvent être supprimées; et il ne reste que les deux forces φ et φ' égales et parallèles aux forces F et F' et appliquées toutes deux au point I suivant la direction IA. Or ces deux forces s'ajoutent pour former la résultante; ainsi la résultante est $R = F + F'$, elle est parallèle aux deux forces et de même

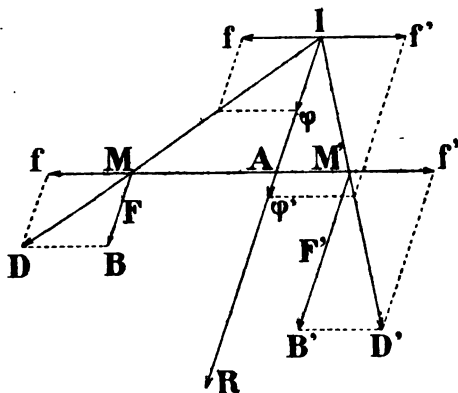


FIG. 144.

sens qu'elles. En outre, les triangles semblables MBD et MIA donnent :

$$\frac{F}{IA} = \frac{f}{MA}, \quad \text{d'où} \quad F \times MA = f \times IA.$$

Les triangles semblables $M'B'D'$ et $M'IA$ donnent de même :

$$\frac{\mathbf{F}}{IA} = \frac{\mathbf{f}}{M'A}, \quad \text{d'où} \quad \mathbf{F} \times M'A = \mathbf{f} \times IA.$$

C'est-à-dire que l'on a, puisque $f = f'$:

$$\mathbf{F} \times \mathbf{MA} = \mathbf{F}' \times \mathbf{M'A}.$$

ON ENSOFO :

$$\frac{F}{F'} = \frac{M'A}{MA};$$

on voit que le point A partage la distance MM' en parties inversement proportionnelles aux intensités des forces. On considère le point A comme le point d'application de la résultante.

Ainsi, la résultante de deux forces parallèles et de même sens appliquées en M et M' est une troisième force parallèle à leur direction, de même sens qu'elles, égale à leur somme, et appliquée en un point A qui divise la droite MM' en deux parties inversement proportionnelles aux intensités des forces.

La proportion (1) donne immédiatement, d'après une propriété des rapports,

$$\frac{F}{M'A} = \frac{F'}{MA} = \frac{R}{MM'}, \quad (2)$$

ce qui montre que chacune des forces F, F', R est proportionnelle à la distance qui sépare les points d'application des deux autres.

2° Soient maintenant deux forces inégales F et F' parallèles et de sens contraires. Supposons $F > F'$ et prenons sur le prolongement de M'M et du côté de F un point A tel que l'on ait :

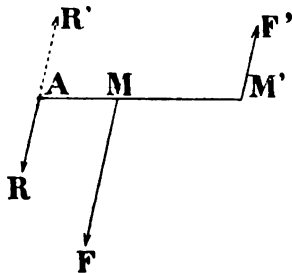


FIG. 143.

$$\frac{M'A}{MA} = \frac{F}{F'} \quad (3)$$

Ensuite appliquons au point A, en sens contraires, deux forces R et R' égales chacune à $F - F'$ et parallèles aux forces données ; l'état du système ne sera pas changé. Mais, d'après la théorie précédente, les deux forces R' et F' parallèles et de même sens ont une résultante égale à leur somme, $F - F' + F' = F$, et parallèle à leur direction ; de plus, cette résultante est appliquée au point M, car la proportion (3) donne :

$$\frac{M'A - MA}{MA} = \frac{F - F'}{F'} = \frac{MM'}{MA} = \frac{R'}{F'}.$$

Donc la résultante des forces R' et F' est égale et directement opposée à la force F , et l'annule. Il ne reste plus que la force R appliquée en A , laquelle est par conséquent la résultante.

Ainsi, la résultante de deux forces parallèles et de sens contraires appliquées en M et M' est une troisième force parallèle à leur direction, de même sens que la plus grande, égale à leur différence, et appliquée en un point A du prolongement de $M'M$, du côté de la plus grande force, qui divise la droite $M'M$ en deux parties inversement proportionnelles aux forces.

La suite de rapports (2) subsiste dans le cas des forces parallèles et de sens contraires, comme il est facile de le vérifier.

Couple. — Dans le cas particulier de deux forces égales parallèles et de sens contraires, le théorème précédent ne s'applique plus, car il donnerait une résultante nulle dont le point d'application serait rejeté à l'infini sur MM' . On donne le nom de couple à un pareil système de deux forces parallèles, égales et de sens contraires; le couple est un élément irréductible dépourvu de résultante et ne pouvant communiquer aucun mouvement de translation au corps sur lequel il agit; il lui imprime seulement un mouvement de rotation, c'est le cas de l'aiguille aimantée.

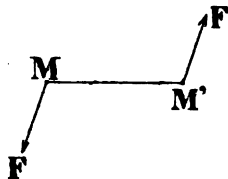


FIG. 146.

3° Pour obtenir la résultante de plusieurs forces parallèles et de même sens F_1, F_2, F_3, \dots , etc., on compose d'abord F_1 et F_2 , puis leur résultante R_1 avec F_3 , et ainsi de suite; la résultante finale R est égale à la somme des forces proposées.

Lorsqu'il y a des forces de sens contraires, celles qui agissent dans un sens donnent une résultante R_1 , celles qui agissent dans le sens opposé une résultante R_2 ; si $R_1 \neq R_2$, on peut obtenir une résultante unique $R = R_1 - R_2$, qui est celle du système; si $R_1 = R_2$, on obtient un couple, à moins que ces forces ne soient appliquées au même point, auquel cas la résultante est nulle et le corps est en équilibre.

On appelle *centre des forces parallèles* le point d'application

de la résultante unique R ; la position de ce point dépend seulement de celles des points d'application des composantes et des rapports de leurs intensités, nullement de leur direction.

74. Moments des forces parallèles par rapport à un point. — Lorsqu'un système de forces parallèles agit dans un même plan, on peut prendre les moments de ces forces par rapport à un point du plan; ces moments sont encore

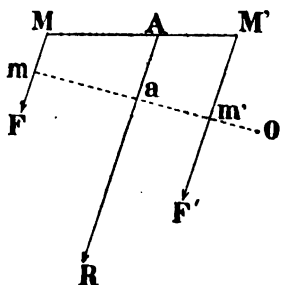


FIG. 147.

positifs ou négatifs, suivant que les forces tendent à entraîner leurs bras de levier dans le sens de la rotation des aiguilles d'une montre, ou dans le sens opposé.

Le théorème de Varignon est applicable aux forces parallèles.

Le moment de la résultante de plusieurs forces parallèles situées dans un même plan, par rapport à un point du plan, égale la somme algébrique des moments des composantes.

Soient les deux forces parallèles F et F' , leur résultante R , et le centre des moments O . Le moment de F est le produit $F \times Om$, le moment de F' égale $F' \times Om'$, et le moment de R a pour expression $R \times Oa$; les trois distances Om , Om' , Oa sont comptées sur la perpendiculaire en O à la direction commune des forces, avec un signe convenable.

On a la proportion :

$$\frac{F}{AM'} = \frac{F'}{AM},$$

que l'on peut écrire, puisque $\frac{AM'}{am'} = \frac{AM}{am}$:

$$\frac{F}{am'} = \frac{F'}{am},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{F}{Oa - Om} = \frac{F'}{Om - Oa}.$$

On déduit de là :

$$F \times (Om - Oa) = F' (Oa - Om'),$$

ou bien :

$$F \times Om + F' \times Om' = (F + F') Oa = R \times Oa;$$

enfin

$$M'R = M'F + M'F'.$$

Le théorème s'étend sans difficulté au cas de deux forces parallèles et de sens contraires, et au cas d'un nombre quelconque de forces parallèles, en ayant égard aux signes des forces et des bras de levier.

Quand les forces se réduisent à un couple, le moment de la résultante est constant et égal à :

$$F \times Om - F \times Om' = F \times mm'.$$

On donne à ce produit le nom de *moment du couple*; mm' est le bras de levier du couple.

75. Moments des forces parallèles par rapport à un plan.

— Le moment d'une force F , par rapport à un plan P , est le produit de l'intensité de cette force par la distance Mm de son point d'application au plan. Pour évaluer les moments des forces parallèles, on convient de regarder comme positives les forces qui agissent dans un sens déterminé, comme négatives celles qui agissent dans le sens opposé. De même, pour les distances, on les affecte des signes $+$ ou $-$ suivant que les points d'application des forces sont d'un côté ou de l'autre du plan. Le moment d'une force est positif quand ses deux facteurs sont de même signe, négatif s'ils sont de signes contraires.

Par exemple, le moment d'une force F appliquée au point $M(x, y, z)$ par rapport au plan coordonné XOY est

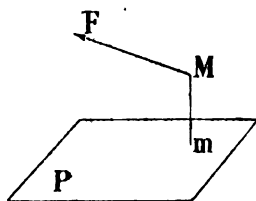


FIG. 148.

égal à Fz ; de même son moment par rapport au plan YOZ est Fx ; son moment par rapport au plan ZOX est Fy .

La notion des moments par rapport à un plan ne s'applique qu'aux forces parallèles, que l'on peut toujours supposer parallèles au plan.

THÉORÈME. — *Le moment de la résultante de plusieurs forces parallèles par rapport à un plan égale la somme algébrique des moments des composantes.*

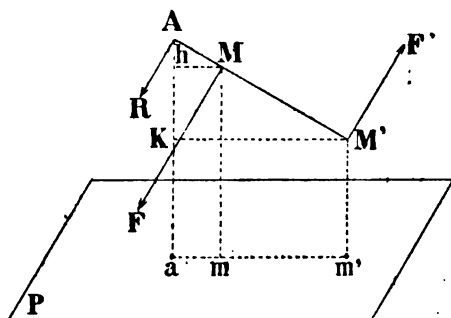


FIG. 149.

Sur la figure 149 on a immédiatement pour le cas de deux forces parallèles et de sens contraires :

$$\frac{AM}{AM'} = \frac{F'}{F} = \frac{Ah}{Ak} = \frac{Aa - Mm}{Aa - M'm'},$$

d'où l'on déduit :

$$F' \times Aa - F' \times M'm' = F \times Aa - F \times Mm;$$

ce que l'on peut écrire :

$$(F - F') \times Aa = F \times Mm - F' \times M'm',$$

c'est-à-dire :

$$M'R = M'F + M'F'.$$

La proposition s'étend sans difficulté au cas de deux forces

de même sens et au cas d'un nombre quelconque de forces parallèles.

On peut appliquer ce théorème à la recherche du centre d'un système de forces parallèles F_1, F_2, \dots, F_n . Désignons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point d'application de F_1 ; par x_2, y_2, z_2 celles du point d'application de F_2, \dots , etc., et par x, y, z celles du centre cherché A.

Prenant successivement les moments de toutes les forces par rapport aux trois plans coordonnés YOZ, ZOX, XOY, on obtient :

$$Rx = F_1x_1 + F_2x_2 + \dots + F_nx_n = \Sigma . Fx,$$

$$Ry = F_1y_1 + F_2y_2 + \dots + F_ny_n = \Sigma . Fy,$$

$$Rz = F_1z_1 + F_2z_2 + \dots + F_nz_n = \Sigma . Fz;$$

d'où l'on déduit, en posant $F_1 + F_2 + F_3 + \dots = \Sigma . F$:

$$x = \frac{\Sigma . Fx}{\Sigma . F}, \quad y = \frac{\Sigma . Fy}{\Sigma . F}, \quad z = \frac{\Sigma . Fz}{\Sigma . F}. \quad (1)$$

Ces trois expressions font connaître les coordonnées du point A. On voit que les seconds membres dépendent seulement des intensités des forces et des positions de leurs points d'application, nullement de leur direction. Si donc, laissant fixes les points d'application M_1, M_2, M_3, \dots , on fait varier d'une manière quelconque la direction commune de toutes les forces en conservant leurs intensités, les coordonnées du point d'application A de la résultante ne changent pas, et ce point reste fixe.

Si toutes les forces ont une valeur commune F , les coordonnées du centre des forces parallèles deviennent, en supposant qu'il y a n forces,

$$x = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3 + \dots}{F_1 + F_2 + F_3 + \dots} = \frac{F(x_1 + x_2 + x_3 + \dots)}{nF},$$

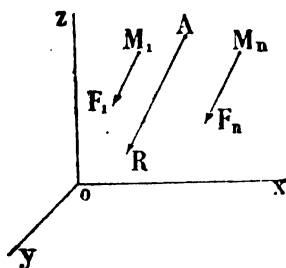


FIG. 150.

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}x &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}, \\y &= \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n}{n}, \\z &= \frac{z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n}{n}.\end{aligned}$$

Dans ce cas, les coordonnées du point A sont les moyennes arithmétiques des coordonnées correspondantes des points d'application des forces. Le point A est alors le centre des moyennes distances des points M_1, M_2, M_3, \dots

76. Équilibre d'un système de forces parallèles. — Il faut et il suffit, pour qu'il y ait équilibre, que les deux résultantes partielles R_1 et R_2 (73) soient égales et directement opposées, c'est-à-dire qu'on ait :

$$R = R_1 - R_2 = 0, \quad (1)$$

et que les quatre points R_1, M_1, M_2, R_2 , soient en ligne droite. Désignons par ξ_1, η_1, ζ_1 et ξ_2, η_2, ζ_2 les coordonnées des points M_1 et M_2 , supposés invariablement liés;

par α, β, γ les angles directeurs par rapport aux axes de la direction commune des forces; on doit avoir :

$$\frac{\xi_1 - \xi_2}{\cos \alpha} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\cos \beta} = \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\cos \gamma};$$

mais, d'autre part :

$$\begin{aligned}\Sigma. Fx &= R_1 \xi_1 - R_2 \xi_2 = R_1 (\xi_1 - \xi_2), \\ \Sigma. Fy &= R_1 \eta_1 - R_2 \eta_2 = R_1 (\eta_1 - \eta_2), \\ \Sigma. Fz &= R_1 \zeta_1 - R_2 \zeta_2 = R_1 (\zeta_1 - \zeta_2).\end{aligned}$$

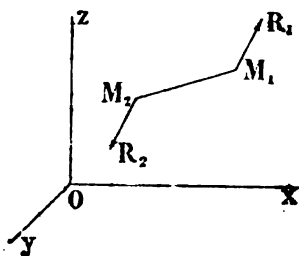


FIG. 151.

On déduit de ces relations :

$$\frac{\Sigma . Fx}{\cos \alpha} = \frac{\Sigma . Fy}{\cos \beta} = \frac{\Sigma . Fz}{\cos \gamma}. \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système soit en équilibre ; si la condition (1) était seule satisfaite, le système des forces se réduirait à un couple.

Pour que l'équilibre ait lieu quelle que soit la direction α, β, γ , il faut que $\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z$ soient nuls ; quand ces conditions sont remplies, si l'on change non pas la direction des forces, mais l'orientation du corps où elles sont appliquées, il y aura encore équilibre et le système est dit *astatique*.

77. Moments par rapport à un axe. — Le moment d'un vecteur \mathbf{MF} , ou d'une force F , par rapport à un axe Oz , est le moment de sa projection f sur un plan perpendiculaire à l'axe, par rapport à la trace O de l'axe sur ce plan ; ainsi :

$$M^z F = f \times Op.$$

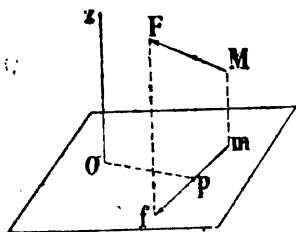


FIG. 152.

Ce moment peut être nul dans deux cas : 1° lorsque la distance Op est nulle, auquel cas la force rencontre l'axe ; 2° si la projection f est nulle, alors la force est parallèle à l'axe.

Les signes des moments par rapport à un axe découlent naturellement des signes adoptés pour les moments par rapport à un point.

THÉORÈME. — *Le moment de la résultante d'un système de forces parallèles ou concourantes par rapport à un axe est égal à la somme des moments des composantes par rapport à cet axe.*

En effet, projetant les forces et leur résultante sur un plan

perpendiculaire à l'axe, la projection de la résultante est la résultante des projections, de sorte qu'on est ramené au théorème de Varignon.

78. Moments d'une force par rapport à trois axes rectangulaires. — Soient la force F appliquée au point $M(x, y, z)$,

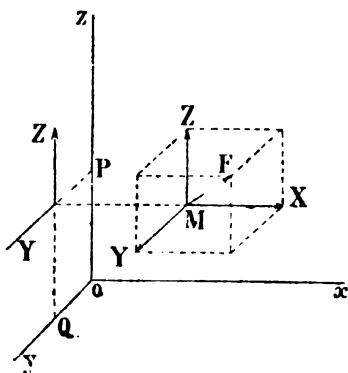


FIG. 153.

et X, Y, Z ses composantes. Le moment de F par rapport à Ox est égal à la somme des moments de X, Y, Z par rapport au même axe; or, le moment de X est nul, puisque X est parallèle à Ox ; le moment de Y est $-zY$, avec le signe $-$ car le bras de levier $OP = z$ de la force est entraîné en sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre. Enfin le moment de Z est yZ . Donc le moment de F par rapport à Ox est $yZ - zY$. Si l'on désigne par λ, μ, ν les moments de F par rapport aux trois axes, on a :

$$\lambda = yZ - zY, \quad \mu = zX - xZ, \quad \nu = xY - yX;$$

μ et ν se déduisent de λ par permutation tournante.

79. Théorie des couples. — On a défini un couple le système de deux forces égales, parallèles et de sens contraires, mais non directement opposées; ce système est dépourvu de résultante. Le bras de levier du couple est la plus courte distance des deux forces; le moment du couple est le produit constant de l'une des forces par le bras de levier; le plan du couple est le plan déterminé par les deux forces parallèles.

La considération des couples pour la recherche des conditions d'équilibre d'un corps solide repose sur les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Un couple appliqué à un solide peut être transporté d'une façon quelconque dans son plan, ou dans tout autre plan parallèle au premier, sans changer son effet.*

Cette proposition résulte immédiatement des deux propriétés suivantes, relatives à la rotation et à la translation d'un couple : 1° on peut faire tourner un couple dans son plan autour du milieu de son bras de levier sans changer son effet ; 2° on peut transporter un couple parallèlement à lui-même dans son plan, ou dans tout autre plan parallèle, sans changer son effet.

1° Soient $MF, M'F$ un couple et M_1M_1' une nouvelle position de son bras de levier lorsqu'il a tourné d'un certain angle autour de son milieu O . L'effet du couple n'est pas changé par l'introduction en M_1 et M_1' des forces F_1 et F_2 égales à F et deux à deux directement opposées. Mais les forces F et F_1 appliquées en M et M_1 admettent une résultante dirigée suivant ON ; de même les forces F et F_1 appliquées en M' et M_1' admettent une résultante égale à la première et appliquée en N' ; ces deux résultantes égales et opposées se faisant équilibre, le solide ne reste plus soumis qu'à l'action du couple $M_1F_2, M_1'F_2$;

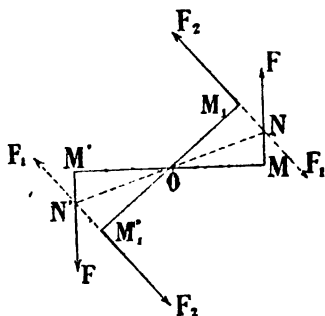


FIG. 154.

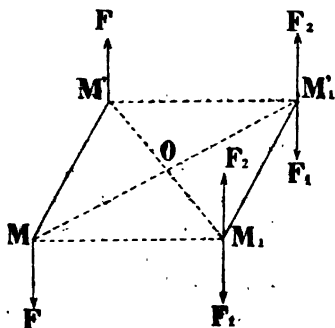


FIG. 155.

2° Soient $MF, M'F$ un couple et M_1M_1' une nouvelle position de son bras de levier lorsqu'il s'est déplacé parallèlement à

lui-même dans le plan du couple ou dans un plan parallèle. L'effet du couple sur le solide n'est pas changé, par l'introduction en M_1 et M_1' des forces F_1 et F_2 égales à F et deux à deux directement opposées. Mais les forces parallèles et de même sens F et F_1 appliquées en M et M_1 ont une résultante égale à leur somme et appliquée au milieu O de MM_1 ; de même les forces F et F_2 appliquées en M et M_1 admettent une résultante égale à la première appliquée en O et de sens contraire; ces deux résultantes se détruisant, le solide ne reste plus soumis qu'à l'action du couple M_1F_1 , M_1F_2 .

THÉORÈME II. — *On peut toujours remplacer un couple appliqué à un solide par un autre de même moment agissant dans le même plan ou dans un plan parallèle.*

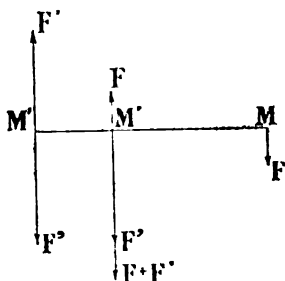


Fig. 156.

En d'autres termes, on peut, sans changer l'effet du couple, modifier à la fois son bras de levier et l'intensité commune des forces, pourvu que son moment ne change pas.

Soit le couple MF , $M'F$ que l'on veut remplacer par un autre ayant $M'M'$ pour bras de levier. Appliquons au solide en M' deux forces égales et direc-

tement opposées F' satisfaisant à la proportion :

$$\frac{F'}{F} = \frac{MM'}{M'M'};$$

l'effet du couple sur le solide n'est pas changé, et les forces F et F' de même sens donnent une résultante $F + F'$ appliquée au point M' . Mais $F + F'$ et F étant directement opposées peuvent être remplacées par la force unique F' ; le solide reste donc soumis au couple $M'F'$, $M'F'$ qui, d'après l'égalité

$$F' \times M'M' = F \times MM',$$

a même moment que le couple proposé.

Si les bras de levier des deux couples n'étaient pas tout d'abord sur la même droite, on pourrait, d'après le théorème I, déplacer l'un d'eux parallèlement, puis le faire tourner autour de son milieu, de façon à faire coïncider ce bras de levier avec celui de l'autre couple.

Il résulte des théorèmes précédents que l'action d'un couple sur un solide est entièrement définie par son moment et par un plan parallèle à celui dans lequel il agit. On a l'habitude de représenter un couple, à la manière d'une rotation, par un vecteur OG dont la direction est perpendiculaire au plan dans lequel agit le couple, dont la longueur OG égale le moment de ce couple, et dont le

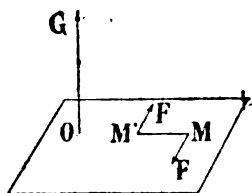


FIG. 157.

sens est choisi de façon qu'un observateur couché le long du vecteur les pieds en O voie le couple agir de gauche à droite dans le sens des aiguilles d'une montre. L'emploi des vecteurs pour représenter les couples a l'avantage de rapprocher les règles de leur composition de celles de la composition des forces ou des rotations.

Composition des couples. — Lorsque plusieurs couples agissent simultanément sur un solide, on peut se proposer de les remplacer par un couple unique produisant le même effet; c'est le problème de la composition des couples.

THÉORÈME III. — *Un nombre quelconque de couples dont les vecteurs sont parallèles, appliqués à un même solide, ont un couple résultant dont le vecteur est parallèle et égal à la somme des vecteurs des couples composants.*

Les vecteurs des couples proposés étant parallèles, ce qui revient à dire que ces couples agissent dans un même plan ou dans des plans parallèles, il résulte du premier théorème que l'on peut amener tous ces couples à agir dans un même plan; mais le second théorème permet de remplacer ces couples par d'autres ayant respectivement même moment et un bras de levier commun. Cette opération faite, si l'on

compose séparément les forces appliquées aux extrémités du bras de levier, tous les couples proposés seront remplacés par un couple unique dont la force sera la résultante des forces de ces couples, et dont le moment sera égal à la somme algébrique des moments des couples proposés. Ainsi le vecteur du couple résultant sera bien parallèle et égal à la somme algébrique des vecteurs des couples composants.

THÉORÈME IV. — *Un système de couples appliqués à un même solide, ayant pour vecteurs G_1, G_2, \dots, G_n , peut être remplacé par un couple résultant Γ appliqué au même solide, ayant pour vecteur la somme géométrique de G_1, G_2, \dots, G_n .*

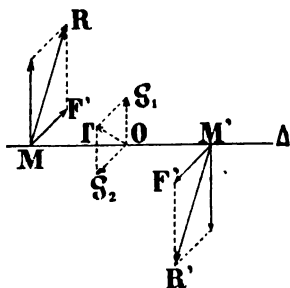


FIG. 158.

Considérons d'abord deux couples quelconques agissant dans des plans qui se coupent suivant une droite Δ ; d'après le théorème I on peut, en déplaçant chacun des couples dans son plan, amener leurs bras de levier sur l'intersection Δ des deux plans; puis,

d'après le théorème II, en faisant varier la grandeur des forces, on peut amener les bras de levier à être égaux et à coïncider exactement.

Cette opération faite, si l'on compose séparément les forces appliquées aux extrémités M et M' du bras de levier, les couples proposés seront remplacés par un couple unique $MR, M'R$, dont la force sera la résultante des forces de ces couples, et dont le moment sera égal à la somme géométrique des moments des deux couples proposés.

On voit, en effet, d'après l'égalité des parallélogrammes MR et $M'R$, que les deux résultantes sont égales et parallèles; et les triangles semblables $OG_1\Gamma$ et $M\Gamma R$ montrent que le vecteur $O\Gamma$ du couple résultant est la somme géométrique des vecteurs OG_1 et OG_2 des couples composants.

La démonstration se généralise sans difficulté pour le cas d'un nombre quelconque de couples composants. Les deux

théorèmes ci-dessus ramènent la composition des couples à la composition de leurs vecteurs.

Considérons en particulier un couple $o\varphi$, $o'\varphi$ dont le vecteur est Γ ; soient φ' , φ'' , φ''' les projections de la force φ sur les plans de coordonnées zoy , zox , xoy , et L , M , N les composantes du vecteur Γ suivant les axes ox , oy , oz ; la force φ

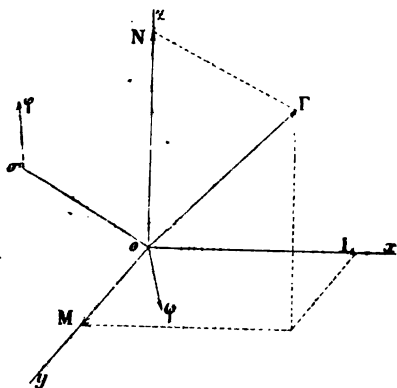


FIG. 159.

est la résultante de φ' , φ'' , φ''' . Comme Γ est égal au moment de φ par rapport au point o , le vecteur L est égal au moment de la force φ' par rapport au même point, c'est-à-dire égal au moment de la force φ par rapport à l'axe ox . De même, les vecteurs M et N sont respectivement égaux aux moments de la même force par rapport aux axes oy et oz .

80. Composition des forces appliquées à un solide. —

THÉORÈME I. — *Un système de forces appliquées à un solide est réductible à une force agissant sur un point arbitraire du solide et à un couple.*

Soient F , F_1 , F_2 , ..., les forces agissant sur le solide, O un point quelconque de ce solide; on ne modifie pas l'effet des premières forces en appliquant au point O deux nouvelles forces égales à F et directement opposées; mais l'introduction de ces forces a pour résultat de substituer à F , appli-

quée en M , la force F appliquée en O et le couple MF , OF . Comme on peut opérer de même pour toutes les autres forces F_1 , F_2 , ..., puis composer séparément au point O toutes les forces et tous les couples obtenus, il en résulte bien que le système des forces proposées peut se réduire à une force R et à un couple Γ .

La force R n'est autre chose que la résultante de toutes les forces F , F_1 , F_2 , ..., transportées parallèlement à elles-mêmes au centre de réduction O ; il suit de là que cette force reste

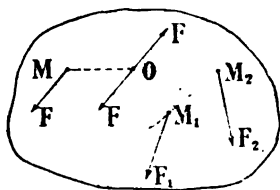


Fig. 160.

invariable en grandeur et en direction, quel que soit le centre de réduction adopté; on lui donne le nom de *résultante générale* ou de *résultante de translation*.

Le moment du couple résultant Γ est égal à la somme des moments des forces F , F_1 , F_2 , ..., par rapport au centre de réduction,

car le moment de la résultante générale par rapport à ce point est nul; il suit de là que le moment du couple résultant varie avec la position du centre de réduction dans le solide. Nous allons faire voir que l'on peut trouver un centre de réduction, et même une infinité de centres, tels que le vecteur du couple résultant et la résultante générale aient même direction. Soient OR la résultante générale et OF le vecteur du couple résultant; décomposons ce vecteur en deux autres OF' et OF'' , le premier suivant

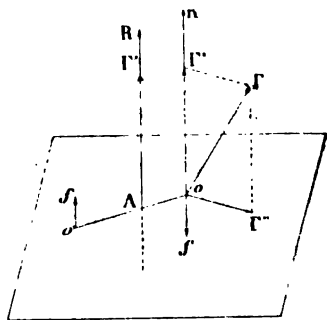


Fig. 161.

OR et le second perpendiculaire à cette direction; si Of et $O'f$ sont les forces du couple Γ'' , on voit que ces deux forces et la résultante R peuvent se composer en une seule

force, encore égale à R , et appliquée en un point A de OO' ; après cela, il ne reste plus que la force R et le couple Γ' . Ainsi la réduction au point A de toutes les forces appliquées au solide donne en ce point une résultante générale R et un couple Γ' dont le vecteur représentatif est dirigé suivant cette résultante.

On pourrait compléter la démonstration en montrant que, pour tous les centres de réduction pris sur la droite AR, le vecteur du couple résultant est le plus petit possible et a même direction que la résultante générale. La droite AR est l'axe principal des couples, et I'' est le couple minimum.

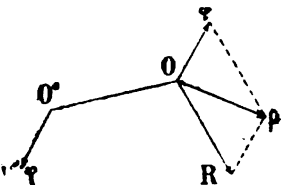


FIG. 162

THÉORÈME II. — *Un système quelconque de forces appliquées à un solide peut être remplacé par deux forces dont une agit sur un point arbitraire.*

Soit $O\vec{r}$, $O\vec{\varphi}$ le couple résultant Γ , $O\vec{r}$ la résultante générale; en composant $O\vec{\varphi}$ et $O\vec{r}$, on réduit toutes les forces appliquées au solide à deux forces $O\vec{\varphi}$ et $O\vec{r}$, la seconde passant par le point arbitraire O .

81. Calcul de la résultante générale et du couple résultant d'un système de forces appliquées à un solide. — Soient, par rapport à trois axes rectangulaires passant par le centre de réduction arbitraire :

X_i, Y_i, Z_i , les composantes de l'une des forces F_i ;
 x_i, y_i, z_i , les coordonnées de son point d'application;
 Σ , une somme s'étendant à toutes les forces agissant sur le solide.

Les composantes X, Y, Z de la résultante R sont, puisque cette résultante est la somme géométrique de F_1, F_2, F_3, \dots :

$$\mathbf{X} = \Sigma \mathbf{X}_i, \quad \mathbf{Y} = \Sigma \mathbf{Y}_i, \quad \mathbf{Z} = \Sigma \mathbf{Z}_i. \quad (1)$$

D'autre part, puisque le moment du couple résultant Γ est

égal à la somme des moments de toutes les forces par rapport au point O, il en résulte que les couples composants L, M, N ont respectivement pour moments la somme des moments de toutes les forces par rapport aux trois axes OX, OY, OZ (79). On a donc, d'après les formules du numéro 78 :

$$L = \Sigma (y_i Z_i - z_i Y_i), M = \Sigma (z_i X_i - x_i Z_i), N = \Sigma (x_i Y_i - y_i X_i). \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) déterminent complètement R et Γ :

$$\Gamma = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}.$$

Résultante unique. — Pour que toutes les forces appliquées au solide se réduisent à une résultante unique, il suffit évidemment que la résultante générale R soit située dans le

plan des forces $O\varphi$, $O'\varphi$ du couple résultant Γ ; alors le vecteur $O\Gamma$ est perpendiculaire à OR.

Or les cosinus directeurs de OR ont respectivement pour valeurs :

$$\frac{X}{R}, \quad \frac{Y}{R}, \quad \frac{Z}{R};$$

ceux de $O\Gamma$ sont :

$$\frac{L}{\Gamma}, \quad \frac{M}{\Gamma}, \quad \frac{N}{\Gamma};$$

et, pour que ces deux droites soient rectangulaires, il faut que l'on ait, d'après la formule qui donne le cosinus de l'angle de deux directions :

$$\frac{LX}{\Gamma R} + \frac{MY}{\Gamma R} + \frac{NZ}{\Gamma R} = 0,$$

ou encore :

$$LX + MY + NZ = 0. \quad (3)$$

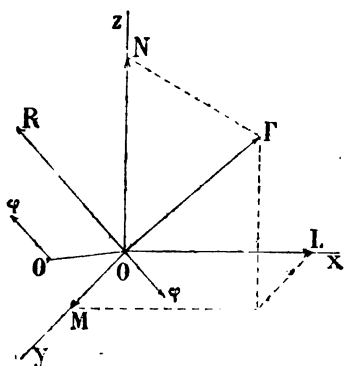


FIG. 163.

Telle est la relation qui exprime que toutes les forces appliquées au solide se réduisent à une résultante unique.

Couple unique. — Pour que toutes les forces se ramènent à un couple unique, il faut et il suffit que la résultante générale soit nulle, sans que le couple résultant le soit, c'est-à-dire que l'on ait :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

L, M, N étant différents de zéro.

82. Équilibre d'un solide libre. — **THÉORÈME.** — *Pour qu'un système de forces appliquées à un solide le laisse en équilibre, il faut et il suffit que la résultante générale et que le couple résultant soient nuls séparément.*

Soit un corps en équilibre sous l'action de la résultante générale R et du couple résultant Γ ($O\varphi$, $O'\varphi$) de toutes les forces appliquées à ce corps (fig. 162).

L'état d'équilibre du corps n'est évidemment pas troublé si l'on rend fixe le centre de réduction O; mais alors les forces φ et R appliquées à ce point ne produisent plus d'effet, et les choses se passent comme si le solide n'était plus soumis qu'à l'action de la force φ appliquée en O'. L'équilibre ayant lieu, cette force est nécessairement nulle, ce qui revient à dire que le couple résultant est nul; mais, le couple étant nul, il doit en être de même de la résultante générale. Ainsi l'équilibre du solide exige que la résultante générale et le couple résultant soient nuls séparément.

Inversement, si ces conditions sont satisfaites, le solide se trouve placé, au point de vue de l'équilibre, comme s'il n'était soumis à l'action d'aucune force, ce qui revient à dire qu'il est réellement en équilibre.

Il résulte de ce théorème et des formules du paragraphe précédent que les conditions de l'équilibre d'un solide libre soumis à l'action d'un système de forces se traduisent par les équations $R = 0$, $\Gamma = 0$, c'est-à-dire :

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X_i &= 0, & \Sigma (y_i Z_i - z_i Y_i) &= 0, \\ \Sigma Y_i &= 0, & \Sigma (z_i X_i - x_i Z_i) &= 0, \\ \Sigma Z_i &= 0, & \Sigma (x_i Y_i - y_i X_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

1° La somme des projections de ces forces sur trois axes rectangulaires doit être nulle pour chacun des axes;

2° La somme des moments de ces forces par rapport à trois axes rectangulaires doit être nulle pour chacun d'eux.

Forces dans un même plan. — Si toutes les forces qui agissent sur le solide sont situées dans un même plan, le plan XOY par exemple, on a constamment $z = Z = 0$, et les six équations précédentes se réduisent à trois :

$$\Sigma X_i = 0, \quad \Sigma Y_i = 0, \quad \Sigma (x_i Y_i - y_i X_i) = 0. \quad (2)$$

1° La somme des projections des forces sur deux axes rectangulaires situés dans leur plan doit être nulle pour chacun des axes;

2° La somme des moments de ces forces par rapport à un point arbitraire du plan doit être également nulle.

REMARQUE. — On pourrait, à l'aide des équations (1), retrouver très simplement les conditions d'équilibre d'un point matériel libre et celles d'un système de forces parallèles.

PROBLÈME. — Les extrémités m et n d'une tige pesante homogène peuvent glisser sans frottement sur deux droites fixes OA et OB, situées dans un plan vertical et dont les directions sont définies par les angles $XOA = \alpha$, $XOB = \beta$, qu'elles font avec l'horizontale OX. On demande les positions d'équilibre de la tige.

Prenons pour inconnue l'angle x que fait la direction nm avec l'horizon. La tige est soumise à son poids P appliqué en son milieu l , et l'introduction des réactions normales R et R' des droites OA et OB permet de la considérer comme libre. Les trois forces P , R , R' agissent d'ailleurs dans un même plan vertical.

On trouve immédiatement pour les sommes des projections des forces sur OX et OY :

$$\begin{aligned} \Sigma X_i &= R \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + R' \cos \left(\beta - \frac{\pi}{2} \right), \\ \Sigma Y_i &= R \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + R' \sin \left(\beta - \frac{\pi}{2} \right) - P. \end{aligned}$$

Les deux premières équations d'équilibre sont donc :

$$\begin{aligned} R \sin \alpha - R' \sin \beta &= 0, \\ R \cos \alpha - R' \cos \beta - P &= 0; \end{aligned}$$

on en déduit :

$$\frac{R}{\sin \beta} = \frac{R'}{\sin \alpha} = \frac{P}{\sin (\beta - \alpha)},$$

d'où l'on tire :

$$R = \frac{P \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}, \quad R' = \frac{P \sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)}, \quad (1)$$

ce qui détermine les réactions.

Au lieu de prendre les moments des forces par rapport à l'ori-

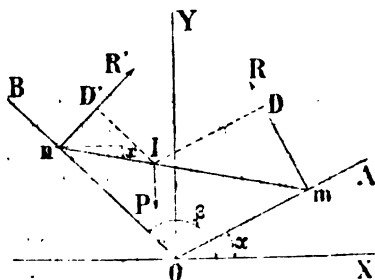


FIG. 164.

gine O, il est plus avantageux de les prendre par rapport au point I; on doit donc avoir :

$$R \times ID - R' \times ID' = 0,$$

ou :

$$Rl \sin ImD - R'l \sin ImD' = 0,$$

l désignant la demi-longueur de la tige.

Mais la figure donne :

$$ImD = \frac{\pi}{2} - \alpha - x, \quad ImD' = \frac{\pi}{2} - (\pi - \beta - x);$$

on a par suite :

$$R \cos (\alpha + x) + R' \cos (\beta + x) = 0;$$

remplaçant R et R' par leurs valeurs (1), cette équation devient :

$$\sin \beta \cos (\alpha + x) + \sin \alpha \cos (\beta + x) = 0,$$

d'où :

$$\tan x = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta},$$

ou encore :

$$\operatorname{tang} x = \frac{1}{2} (\cotg \alpha + \cotg \beta).$$

Cette équation fait connaître la valeur de x qui correspond à la position d'équilibre de la tige.

83. Solide gêné par un obstacle. — Nous venons d'étudier les conditions d'équilibre d'un solide soumis à l'action d'un certain nombre de forces, mais libre de se déplacer d'une façon quelconque dans l'espace. Quand le mouvement du solide est gêné par un obstacle quelconque, par exemple la présence d'un point fixe, ou bien lorsque plusieurs points de ce solide sont assujettis à rester sur un ou des plans fixes, on peut encore appliquer les mêmes formules d'équilibre, sous réserve d'introduire les *réactions* provenant des liaisons imposées au solide; c'est la méthode que nous avons suivie dans le problème précédent.

On a l'habitude de considérer trois cas, suivant que l'obstacle fixe est un point, un axe ou un plan.

84. Équilibre d'un solide ayant un point fixe. — Ce cas se présente dans le levier, la balance, le peson.

Soit O le point fixe; prenons trois axes rectangulaires passant par ce point, et désignons par X', Y', Z' les composantes de la réaction du point O sur le solide. On a pour l'équilibre, avec les notations du paragraphe 82 :

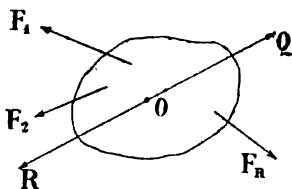


FIG. 165.

$$\begin{aligned} X + X' &= 0, & Y + Y' &= 0, \\ Z + Z' &= 0; & (1) \\ L &= 0, & M &= 0, \\ N &= 0. & (2) \end{aligned}$$

Les formules (2), qui ne contiennent pas les réactions, sont les conditions nécessaires de l'équilibre; elles signifient que toutes les forces agissant sur le solide doivent se réduire à une résultante unique R passant par le point fixe O . Cette conclusion est évidente : en effet, lorsqu'un corps a un point fixe O autour duquel il ne peut

que tourner, on peut prendre ce point pour point d'application de l'une des deux forces p et p (80); l'effet de l'autre sera de faire tourner le corps, à moins que sa direction ne passe par le point fixe. Les formules (1) montrent que la réaction Q (X', Y', Z') est égale et directement opposée à la résultante unique R (X, Y, Z), qui représente la pression du solide sur le point fixe.

85. Équilibre d'un solide ayant un axe fixe. — C'est le cas du treuil, de la poulie, des moufles. On peut toujours admettre que la fixité de l'axe OO' a été obtenue en rendant invariables deux de ses points O et O' . Soient alors Q et Q' les réactions de ces points; $X, Y, Z; X', Y', Z'$ leurs composantes; h la distance OO' . Les équations d'équilibre s'écrivent en prenant le point O pour origine, et OO' pour axe Oz :

$$\begin{aligned} X + X' + X'' &= 0, & Y + Y' + Y'' &= 0, & Z + Z' + Z'' &= 0; & (1) \\ L - hY'' &= 0, & M + hX'' &= 0, & N &= 0. & (2) \end{aligned}$$

La dernière équation $N = 0$, indépendante des réactions, est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équilibre ait lieu; elle signifie que la somme des moments de toutes les forces appliquées au solide par rapport à l'axe fixe doit être nulle, condition qui est suffisante, car alors la résultante générale R et les forces du couple résultant Γ , se trouvant respectivement dans un même plan avec l'axe fixe, sont détruites par la résistance de cet axe.

On peut encore observer que, lorsqu'un corps a deux points fixes ou un axe fixe autour duquel il ne peut que tourner, on peut prendre un point de l'axe pour point d'application de la force p . L'effet de la force p sera alors de faire tourner le corps, à moins qu'elle ne soit

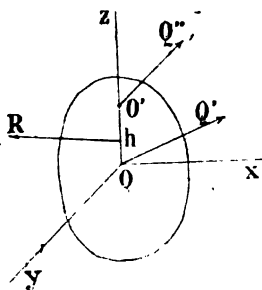


FIG. 166.

dans un même plan avec l'axe; car on peut la décomposer en deux forces, l'une parallèle à l'axe et qui est détruite, l'autre normale et qui fait tourner. Ainsi, *il faut et il suffit pour l'équilibre que la résultante R et les forces du couple Γ soient dans un même plan avec l'axe fixe.*

Les deux premières équations des groupes (1) et (2) permettent de calculer les composantes X' , Y' , X'' , Y'' , mais Z' et Z'' , assujetties seulement à satisfaire à l'équation $Z + Z' + Z'' = 0$, restent indéterminées, de sorte qu'il est impossible de déterminer complètement les réactions Q' et Q'' ; il faudrait pour cela leur imposer une autre condition.

Si le corps pouvait glisser le long de l'axe, cet axe ne pourrait détruire que des forces normales; ses deux réactions seraient donc, dans ce cas, perpendiculaires à l'axe OZ , et, par suite, leurs composantes Z' et Z'' seraient nulles, c'est-à-dire que l'on aurait aussi $Z = 0$. Ainsi il faut, pour l'équilibre dans ce cas, de plus que dans le cas précédent, que la somme des projections des forces sur l'axe fixe soit nulle.

86. Équilibre d'un solide s'appuyant sur un plan fixe. — C'est le cas d'un corps solide glissant sur un plan incliné. *Pour qu'un solide appuyé sur un plan fixe soit en équilibre sous l'action d'un système quelconque de forces, il faut et il suffit que toutes ces forces aient une résultante unique R normale au plan, qui appuie le corps sur le plan, et qui passe à l'intérieur du polygone d'appui.*

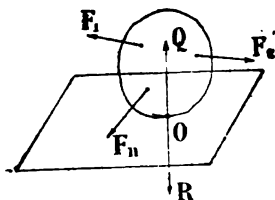


FIG. 167.

En effet, les réactions du plan fixe sur les points de contact tels que A, B, C (fig. 169) ne peuvent être que normales; comme d'ailleurs ces réactions sont de même

sens, elles ont une résultante Q égale à leur somme et normale au plan, et l'équilibre du solide exige que les forces R et Q soient égales et directement opposées.

Le *polygone d'appui* est un polygone convexe dont les sommets sont des points d'appui et qui renferme tous les autres.

Dans le cas d'un seul point d'appui O (fig. 167), la réaction normale du plan est égale et directement opposée à la résultante R, qui représente la pression du corps sur le plan fixe.

S'il y a deux points d'appui A et B (fig. 168), on peut obtenir les réactions du plan en ces points en décomposant la force Q, égale et directement opposée à R, en deux autres qui lui soient parallèles et appliquées respectivement en A et B.

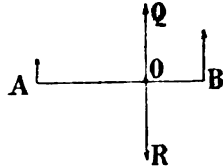


FIG. 168.

Dans le cas de trois points d'appui A, B, C, non en ligne droite, les réactions du plan en ces points sont encore déterminées, parce qu'on peut décomposer la réaction totale Q en trois autres appliquées respectivement en A, B, C.

Si q, q', q'' représentent ces composantes, on a les relations bien connues :

$$\frac{q}{BOC} = \frac{q'}{AOC} = \frac{q''}{AOB} = \frac{Q}{ABC};$$

BOC, par exemple, désigne l'aire du triangle BOC.

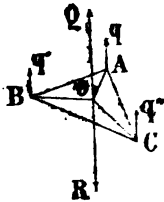


FIG. 169.

En effet, si l'on prend les moments des forces q, q', q'', Q , par rapport à un plan perpendiculaire au plan d'appui ABC et passant par AC, on obtient, en désignant par h et H

les distances des sommets O et B à la base AC :

$$q'H = Qh,$$

d'où l'on déduit en multipliant par AC :

$$\frac{q'}{AC \times h} = \frac{Q}{AC \times H},$$

ce que l'on peut écrire :

$$\frac{q'}{AOC} = \frac{Q}{ABC}.$$

On établirait de même les deux autres proportions en prenant les moments par rapport à AB et BC.

Au delà de trois points d'appui, le calcul des réactions partielles devient indéterminé, car on peut d'une infinité de manières décomposer une force Q en plus de trois autres qui lui soient parallèles et appliquées en des points donnés. Par exemple, on ne saurait déterminer *a priori* la pression exercée sur un plancher par chacun des quatre pieds d'une table; cette pression dépend de l'élasticité de la table et de celle du plancher.

§ 4. — CENTRES DE GRAVITÉ

87. Définitions. — On sait que la *pesanteur* est la force constante qui sollicite tous les corps vers le centre de la Terre; en chaque point du globe, cette force est dirigée suivant la verticale du lieu, et, comme toutes les verticales de la surface terrestre supposée sphérique vont concourir au centre de la Terre, dont le rayon moyen est de 6.366 kilomètres, on peut admettre sans erreur appréciable que les verticales de deux points très rapprochés ont des directions parallèles.

Le *poids* d'un corps est la résultante des actions de la pesanteur sur les différents points de ce corps; le centre de ces forces, considérées comme parallèles, est le *centre de gravité* du corps. On sait que ce centre ne change pas quelle que soit l'orientation que l'on donne au corps par rapport à la direction de la pesanteur. Le centre de gravité d'un corps peut s'obtenir expérimentalement en suspendant le corps à un fil dans deux positions différentes.

La densité moyenne d'un corps est la masse de l'unité de volume de ce corps; en la désignant par ρ , on a :

$$\rho = \frac{M}{V};$$

M représente la masse totale du corps, et V son volume.

La densité d'un corps en un point quelconque M est la limite vers laquelle tend la densité moyenne d'un volume de matière pris autour du point M quand ce volume tend vers

zéro. Si dV est ce volume infiniment petit, dM sa masse, et ρ la densité au point M , on a :

$$\rho = \frac{dM}{dV}.$$

La densité en un point dépend de la position de ce point dans le corps, c'est-à-dire de ses coordonnées x, y, z .

Le poids spécifique moyen d'un corps est le poids de l'unité de volume de ce corps ; en le représentant par π , on a $P = \pi V$, avec $P = Mg$, c'est-à-dire $P = \rho g V$.

Dans les *corps homogènes*, la densité et le poids spécifique sont les mêmes en un point quelconque du corps.

88. Centre de gravité d'un système de points matériels.

— Considérons un système de points matériels isolés et pesants, assujettis entre eux d'une manière invariable. Les poids de ces points matériels sont autant de forces verticales, parallèles entre elles, par lesquelles ils sont sollicités. Si on désigne par p l'un quelconque de ces poids, et par x, y, z les distances des points à trois plans rectangulaires, les distances ξ, η, ζ du centre des forces parallèles aux mêmes plans seront exprimées par les formules (75) :

$$\xi = \frac{\sum px}{\sum p}, \quad \eta = \frac{\sum py}{\sum p}, \quad \zeta = \frac{\sum pz}{\sum p}.$$

Ces formules font donc connaître les coordonnées du centre de gravité du système de points matériels en fonction des coordonnées de ces points et de leur poids respectif.

Si l'on substitue les masses aux poids, comme on a $p = mg$, les relations précédentes deviennent, en supprimant le facteur commun g ,

$$\xi = \frac{\sum mx}{\sum m}, \quad \eta = \frac{\sum my}{\sum m}, \quad \zeta = \frac{\sum mz}{\sum m}. \quad (\alpha)$$

Si, au lieu de considérer un système de points matériels, on considère un système de corps pesants, on pourra lui appliquer les mêmes formules ; les coordonnées x, y, z appartiendront respectivement aux centres de gravité de

chacun de ces corps, et ξ , η , ζ seront les coordonnées de leur centre de gravité commun. Dans ce cas, Σm représente la somme des masses de tous les corps.

80. Coordonnées du centre de gravité d'un corps. — Décomposons le corps en éléments de volumes infiniment petits dV assimilables à des points matériels. Désignons par :

x, y, z , les coordonnées d'un point quelconque du corps ;

ρ , la densité en ce point ;

dM , la masse de ce point ;

ξ, η, ζ , les coordonnées du centre de gravité du corps.

L'action de la pesanteur sur un point matériel étant représentée par son poids est proportionnelle à la masse de ce point ; on a donc, d'après les formules (a) étendues à un système continu de points,

$$\xi = \frac{\int x dM}{\int dM}, \quad \eta = \frac{\int y dM}{\int dM}, \quad \zeta = \frac{\int z dM}{\int dM};$$

c'est-à-dire, puisque $dM = \rho dV$:

$$\xi = \frac{\int \rho x dV}{\int \rho dV}, \quad \eta = \frac{\int \rho y dV}{\int \rho dV}, \quad \zeta = \frac{\int \rho z dV}{\int \rho dV}.$$

Le signe \int s'étend à tous les éléments de volume qui composent le solide considéré, de sorte qu'en réalité on est en présence d'intégrales triples.

Lorsque le corps est homogène, ρ est constant et sort des intégrales ; il reste alors, en le supprimant comme facteur commun aux deux termes de chaque fraction, et en observant que $\int dV = V =$ volume du corps :

$$\xi = \frac{\int x dV}{V}, \quad \eta = \frac{\int y dV}{V}, \quad \zeta = \frac{\int z dV}{V}. \quad (1)$$

La position du centre de gravité d'un corps homogène est indépendante de la densité, elle ne dépend que de la forme du corps.

Pour concevoir le centre de gravité d'une surface ou d'une

més à
présen-

ligne, il suffit de la matérialiser par la pensée. Dans le cas d'une surface, l'élément de volume dV est remplacé par l'élément d'aire dA , le volume V par l'aire finie A de la surface. On a par conséquent, en supposant cette surface homogène :

rs. -
inimé-
signes

$$\xi = \frac{\int x dA}{A}, \quad \eta = \frac{\int y dA}{A}, \quad \zeta = \frac{\int z dA}{A}. \quad (2)$$

corps.

On n'a plus que des intégrales doubles à effectuer.

Dans le cas d'une ligne, dV est remplacé par l'élément d'arc ds , V par la longueur s de l'arc; on a donc pour une ligne homogène :

ps.
repré-
de et
un sy-

$$\xi = \frac{\int x ds}{s}, \quad \eta = \frac{\int y ds}{s}, \quad \zeta = \frac{\int z ds}{s}. \quad (3)$$

Le problème ne comporte plus que des intégrales simples.

Le centre de gravité d'une surface ou d'une ligne est le centre d'une infinité de forces parallèles appliquées en leurs différents points.

Une surface et une ligne sont homogènes lorsque des portions égales de cette surface et de cette ligne ont des résultantes égales ou des poids égaux.

com-
st en

90. Principes géométriques. — La recherche du centre de gravité d'une ligne, d'une surface ou d'un solide homogènes est très souvent facilitée par l'emploi d'un certain nombre de principes géométriques simples que nous allons indiquer.

sort
fac-
en

1° Quand une figure est décomposable en parties ayant toutes leurs centres de gravité sur un même plan ou sur une même droite, le centre de gravité de la figure est dans ce plan ou sur cette droite.

1)

Cela résulte de la composition des forces parallèles ou du théorème des moments.

est
me

2° Quand une figure a un plan de symétrie, son centre de gravité est dans ce plan.

me

En effet, deux éléments symétriques quelconques ayant des poids égaux et des centres de gravité à égale distance du

plan, le centre de gravité de leur système est dans ce plan ; par conséquent le centre de gravité de l'ensemble s'y trouve aussi.

3° Quand une figure (volume, surface, ligne homogènes) a un axe de symétrie, son centre de gravité est sur cet axe. Car un axe de symétrie est l'intersection de deux plans de symétrie.

4° Quand une figure a un centre de figure, ce point est le centre de gravité.

En effet, la résultante des poids de deux éléments symétriques également pesants et situés à égale distance du centre de figure passe par ce centre ; par conséquent la résultante totale y passe également, c'est-à-dire que le centre de gravité se confond avec le centre de figure.

91. Centre de gravité des lignes homogènes. — 1° Le centre de gravité d'un segment de droite est au milieu de sa longueur.

2° Pour le contour d'un triangle ABC, on observe que les centres de gravité des trois côtés sont en leurs milieux L, H, K, et que les forces appliquées en ces points sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés. Donc, si l'on joint les points L, H, K, on forme un triangle LHK semblable à ABC, et dans lequel chaque force appliquée à un sommet est proportionnelle au côté opposé. Mais les deux forces appliquées en H et K se composent en une seule appliquée en un point M, tel que :

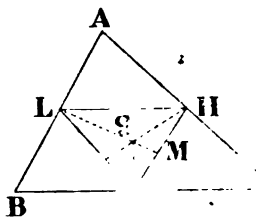


FIG. 170.

$$\frac{MH}{MK} = \frac{BC}{AC} = \frac{LH}{LK};$$

donc le point M est sur la bissectrice de l'angle L. Il faudrait alors composer la force appliquée en M avec la troisième force appliquée en L, mais, sans déterminer le résultat, on peut dire que le centre de gravité demandé est sur la bissectrice LM. On prouverait de même qu'il est sur les bissectrices des angles H et K ; de sorte que le centre de gravité du contour homogène d'un triangle est au point de rencontre des bissectrices des angles du triangle obtenu en joignant deux à deux les milieux des côtés du triangle proposé.

3^e Pour un arc de cycloïde homogène OM, on a d'abord les équations de la courbe :

$$\begin{aligned}x &= a(\alpha - \sin \alpha), \\y &= a(1 - \cos \alpha);\end{aligned}$$

puis successivement, en observant que l'ordonnée z est constamment nulle, puisque la courbe est située dans le plan $yo\alpha$, et que $ds^2 = dx^2 + dy^2$:

$$ds = 2a \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha,$$

$$s = 2a \int_0^{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha = 4a \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\int x ds = 2a^2 \int (\alpha - \sin \alpha) \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha,$$

$$\int y ds = 2a^2 \int (1 - \cos \alpha) \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha.$$

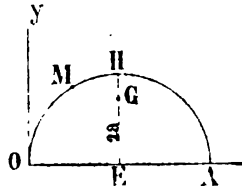


FIG. 171.

Mais, d'autre part, l'intégration donne :

$$\begin{aligned}\int (\alpha - \sin \alpha) \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha &= -2(\alpha - \sin \alpha) \cos \frac{\alpha}{2} + \int (1 - \cos \alpha) \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha, \\&= -2(\alpha - \sin \alpha) \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{8}{3} \sin^3 \frac{\alpha}{2} + C.\end{aligned}$$

$$\int (1 - \cos \alpha) \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha = 2 \int \sin^3 \frac{\alpha}{2} d\alpha = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \left(-1 + \frac{1}{3} \cos^3 \frac{\alpha}{2}\right) + C.$$

On a donc avec les formules (3), en intégrant entre les limites 0 et α ,

$$s\xi = -4a^2 \left[(\alpha - \sin \alpha) \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{4}{3} \sin^3 \frac{\alpha}{2} \right],$$

$$s\eta = 8a^2 \left(\frac{2}{3} - \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3} \cos^3 \frac{\alpha}{2} \right).$$

Pour une arcade entière OMA, il faut faire $\alpha = 2\pi$ dans les formules, ce qui donne :

$$s = 8a, \quad s\xi = 8\pi a^2, \quad s\eta = \frac{32}{3} a^2,$$

d'où l'on déduit :

$$\xi = \pi a, \quad \eta = \frac{4}{3} a.$$

Le centre de gravité est donc sur l'ordonnée maximum EH, à une distance EG de la base égale aux deux tiers de cette ordonnée.

4° Pour un arc AM d'hélice, les coordonnées d'un point quelconque de la courbe ont pour expressions :

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = m\varphi.$$

On obtient en différenciant, et observant que $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$:

$$ds = \sqrt{a^2 + m^2} d\varphi,$$

$$s = \frac{\sqrt{a^2 + m^2}}{m} z.$$

L'intégration donne successivement :

$$\int x ds = a \sqrt{a^2 + m^2} \int_0^\varphi \cos \varphi d\varphi =$$

$$\sqrt{a^2 + m^2} y;$$

$$\int y ds = a \sqrt{a^2 + m^2} \int_0^\varphi \sin \varphi d\varphi =$$

$$\sqrt{a^2 + m^2} (a - x);$$

$$\int z ds = \frac{\sqrt{a^2 + m^2}}{2m} z^2.$$

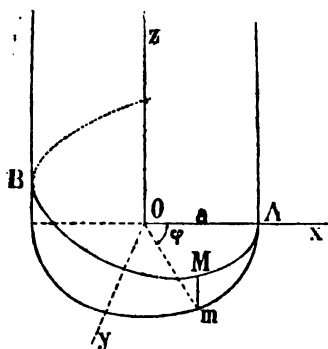


FIG. 172.

Les formules (3) donnent ensuite :

$$\xi = \frac{my}{z}, \quad \eta = \frac{m(a-x)}{z}, \quad \zeta = \frac{z}{2}.$$

La longueur a représente le rayon du cylindre et m est une constante.

92. Centre de gravité des surfaces homogènes. — 1° Le centre de gravité de l'aire d'un triangle est sur la droite qui joint un sommet au milieu du côté opposé, aux deux tiers de cette droite à partir du sommet.

En effet, la médiane AM est un diamètre du triangle correspondant à la direction BC, car toute corde parallèle à BC est divisée en deux parties égales par AM. Le centre de gravité G est donc sur la médiane AM; il doit être également sur chacune des deux autres médianes; il est donc à leur point de rencontre. On peut observer que, si l'on compose trois forces égales et parallèles

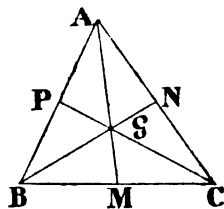


FIG. 172 bis.

appliquées aux sommets d'un triangle, le point d'application

de la résultante se confond avec le centre de gravité du triangle.

2° Dans un trapèze ABCD, le centre de gravité G est sur la médiane FE qui joint les milieux des bases parallèles, car cette

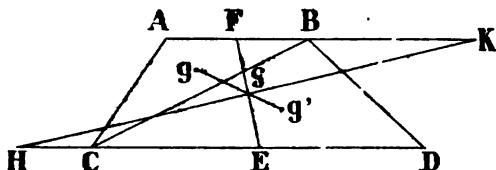


FIG. 173.

médiane est un diamètre pour les cordes parallèles à AB. Le centre de gravité se trouve également sur la droite gg' qui joint les centres de gravité des triangles partiels ACB et CBD. Le point G est donc à l'intersection de FE et de gg' .

On peut encore procéder de la façon suivante : on prolonge la base supérieure à droite de la longueur BK égale à la moitié de CD ; puis on prolonge la base inférieure à gauche de la quantité CH égale à la moitié de AB. La droite HK coupe la médiane EP au point G, comme il est aisé de le vérifier.

3° Si la figure ABCD est un quadrilatère quelconque, homogène, on décompose ce quadrilatère en deux triangles en menant une diagonale AC.

On détermine ensuite les centres de gravité g et g' de ces deux triangles. Le centre de gravité cherché est sur la droite gg' , en un point G qui partage cette droite proportionnellement aux aires des triangles ADC et ABC. Pour obtenir ce point il n'y a qu'à déterminer l'intersection K de gg' avec la diagonale AC, et à prendre $gG = g'K$.

4° On obtient le centre de gravité d'un polygone quelconque en le décomposant en triangles, et en supposant appliquée au centre de gravité de chacun d'eux une force proportionnelle à sa surface. Le centre de toutes ces forces parallèles est le centre de gravité cherché. Par exemple, pour un

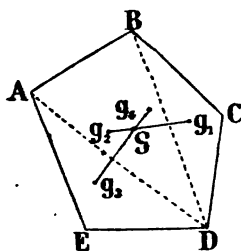


FIG. 175.

pentagone ABCDE, la diagonale BD le décompose en un quadri-

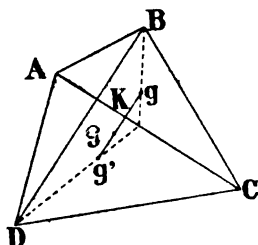


FIG. 174.

latère ABDE et en un triangle BCD dont on sait déterminer les centres de gravité g_1 et g_2 ; une seconde diagonale AD le décompose de même en un quadrilatère ABCD et en un triangle AED dont les centres de gravité sont en g_3 et g_4 ; le point G est à l'intersection des droites g_1g_2 et g_3g_4 . La même méthode s'étend à un profil hexagonal, octogonal, etc.; on peut aussi l'appliquer au quadrilatère en le décomposant successivement en deux triangles par chacune des diagonales.

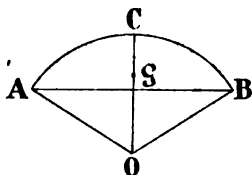


FIG. 176.

Dans le cas d'un *secteur circulaire* OAB, le centre de gravité est sur le rayon bissecteur OC, et sa distance au centre est donnée par la formule :

$$OG = \frac{2}{3} \cdot \frac{OA \times \text{corde AB}}{\text{arc AB}}.$$

Pour le *demi-cercle*, on trouve :

$$OG = \frac{2}{3} \cdot \frac{R \times 2R}{\pi R} = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}.$$

5°. Soit l'aire OAB limitée par l'arc OB de *parabole*, $y^2 = 2px$. On a pour l'élément d'aire dA qui entoure le point M (xy) :

$$dA = dx dy;$$

et pour l'aire finie $A = OBA$, en posant $OA = x$, $AB = y$:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^x \int_0^y dx dy = \int_0^x dx \int_0^y dy \\ &= \int_0^x y dx = \sqrt{2p} \int_0^x x^{\frac{1}{2}} dx, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$A = \frac{2}{3} \sqrt{2p} x^{\frac{3}{2}}. \quad (1)$$

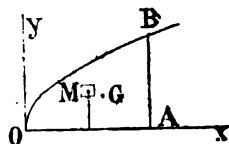


FIG. 177.

Ensuite les formules (2) donnent :

$$Ax = \int_0^x \int_0^y x dx dy = \int_0^x x dx \int_0^y dy = \int_0^x xy dx = \sqrt{2p} \int_0^x x^{\frac{3}{2}} dx,$$

ou encore :

$$A\xi = \frac{2}{5} \sqrt{2p} \frac{8}{x^2}, \quad \text{et, d'après (1),} \quad \xi = \frac{3}{8} x.$$

On obtient de même :

$$A\eta = \int_0^x dx \int_0^y y dy = \frac{1}{2} \int_0^x y^2 dx = p \int_0^x x dx = \frac{px^2}{2},$$

et encore, d'après (1) :

$$\eta = \frac{px^2}{2A} = \frac{3}{8} y.$$

Ainsi les coordonnées du centre de gravité G sont :

$$\xi = \frac{3}{8} x, \quad \eta = \frac{3}{8} y.$$

6° Soit la surface de révolution engendrée par la courbe CMD, $y = f(x)$, tournant autour de OX. Le centre de gravité de cette surface est évidemment sur l'axe de rotation à cause de la symétrie, de sorte qu'il suffit de déterminer son abscisse ξ . Posons $OA = a$, $OB = x$, $CD = s$, $MM' = ds$; on a, d'après un théorème connu,

$$A = 2\pi \int_a^x y ds,$$

$$\text{et} \quad A\xi = 2\pi \int_a^x xy ds.$$

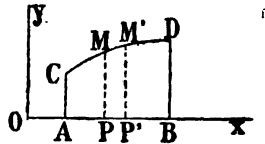


FIG. 178.

Ces deux équations font connaître A et ensuite ξ après deux quadratures simples.

Soit, par exemple, la surface latérale du tronc de cône dont la section méridienne est le trapèze ACBD; dans ce cas on trouve, en effectuant les calculs :

$$y = mx, \quad ds = \sqrt{1 + m^2} dx, \quad A = \pi m \sqrt{1 + m^2} (x^2 - a^2);$$

puis :

$$A\xi = 2\pi m \sqrt{1 + m^2} \int_a^x x^2 dx = \frac{2}{3} \pi m \sqrt{1 + m^2} (x^3 - a^3);$$

enfin :

$$\xi = \frac{2}{3} \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}.$$

Si l'on fait $a = 0$, on obtient l'abscisse du centre de gravité de la surface latérale du cône de révolution dont l'axe est OB ; la formule donne :

$$\xi = \frac{2}{3} x.$$

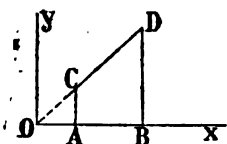


Fig. 179.

Pour la zone $ABCD$ on trouverait pareillement, en appelant a et b les abscisses des points A et B :

$$\xi = \frac{1}{2} (a + b).$$

7° Considérons enfin une portion d'aire A de la surface dont l'équation est $z = f(x, y)$. Si dA est l'élément d'aire en coordonnées rectangulaires, on a d'après l'analyse, en posant

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy};$$

$$dA = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy,$$

puis d'après les formules (2) :

$$A\xi = \iint x dA, \quad A\eta = \iint y dA, \quad A\zeta = \iint z dA,$$

avec

$$A = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy.$$

En particulier, si l'on considère la portion de surface du paraboloïde

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b},$$

qui se projette sur le plan des xy entre les parties positives des axes de l'ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

on obtient d'après les formules ci-dessus :

$$A = \frac{\pi ab}{6} (2\sqrt{2} - 1), \quad A\xi = \frac{a^2 b}{8} \left[3\sqrt{2} - L(1 + \sqrt{2}) \right],$$

$$A\eta = \frac{ab^2}{8} \left[2\sqrt{2} - L(1 + \sqrt{2}) \right], \quad A\zeta = \frac{\pi ab}{60} (a + b)(1 + \sqrt{2}).$$

93. Centre de gravité des volumes homogènes. — 1° Considérons d'abord un solide terminé par deux faces planes parallèles, et tel que l'aire de la section A faite par un plan parallèle à la base s'exprime par une fonction entière et du second degré de la distance du plan sécant à la base.

Soient $2h$ la hauteur du solide, z la distance de la base inférieure à un plan parallèle horizontal, et

$$A = az^2 + bz + c$$

l'aire de la section déterminée par ce plan.

Le volume du solide a pour expression :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2h} (az^2 + bz + c) dz \\ &= \frac{h}{3} (8ah^2 + 6bh + 6c); \end{aligned}$$

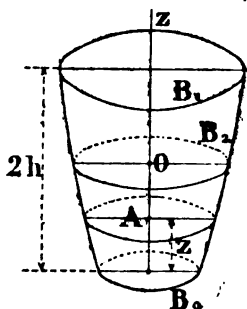


FIG. 180.

ce que l'on peut écrire :

$$V = \frac{2h}{6} \left[(4ah^2 + 2bh + c) + 4(ah^2 + bh + c) + c \right].$$

Les trois parties de la parenthèse représentent : la première l'aire de la base supérieure B_1 , la seconde l'aire de section moyenne B_2 , la dernière l'aire de la base inférieure B_0 . On a donc, en posant $2h = H$,

$$V = \frac{H}{6} (B_0 + B_1 + 4B_2).$$

La distance du centre de gravité du solide à la base inférieure est, d'après la troisième des formules (1),

$$\zeta = \frac{1}{V} \int_0^{2h} (az^2 + bz + c) z dz,$$

c'est-à-dire

$$\zeta = \frac{2h^2}{3V} (6ah^2 + 4bh + 3) = \frac{2h^2}{3V} (B_1 + 2B_2);$$

on obtiendrait de même pour la distance ζ' à la base supérieure :

$$\zeta' = \frac{2h^2}{3V} (B_0 + 2B_2);$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\zeta}{\zeta'} = \frac{B_1 + 2B_2}{B_0 + 2B_2}. \quad (m)$$

Dans la classe des solides que nous venons de considérer rentrent les segments de surfaces du second ordre, et les polyèdres limités par des bases parallèles et latéralement par des triangles ou des trapèzes dont les sommets coïncident avec ceux des bases.

La formule (m) est souvent utile, surtout quand on connaît à l'avance une ligne sur laquelle doit être le centre de gravité du solide. Par exemple, pour une pyramide triangulaire, on sait

que le centre de gravité se trouve sur la droite qui joint un sommet au centre de gravité de la base opposée, car cette droite est l'intersection de trois plans diamétraux qui passent par les arêtes issues du sommet. Si l'on fait $B_1 = 0$

et $B_2 = \frac{1}{4} B_0$ dans la formule (m), on obtient :

$$\frac{\zeta}{\zeta'} = \frac{1}{3},$$

ou :

$$\zeta' = \frac{H}{4}.$$

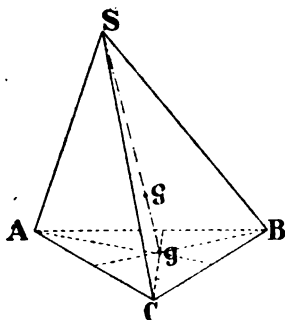


FIG. 181.

Dans ce cas, le centre de gravité G est sur la droite Sg, au quart de la hauteur à partir de la base. Le résultat est le même pour une pyramide quelconque et pour un cône.

On peut observer que, si l'on compose quatre forces égales et parallèles appliquées aux sommets d'un tétraèdre, le point d'application de la résultante se confond avec le centre de gravité du tétraèdre.

Dans un *tronc de pyramide*, le centre de gravité est également sur la droite III qui joint les centres de gravité des bases parallèles, car si l'on rétablit la pyramide complète, les centres de gra-

vité de cette pyramide et de la pyramide enlevée sont sur la droite HI; donc le centre de gravité du tronc se trouve sur cette droite. D'ailleurs on sait que l'aire d'une section parallèle aux bases varie comme le carré de la distance au sommet de la pyramide, ou bien comme le carré de la distance à la base; on a donc, d'après la formule (m), en observant que :

$$2B_2 = \frac{B_0 + B_1}{2} + \sqrt{B_0 B_1},$$

$$\bar{\zeta} = \frac{B_0 + 3B_1 + 2\sqrt{B_0 B_1}}{B_1 + 3B_0 + 2\sqrt{B_0 B_1}}.$$

Cette formule s'applique aussi au tronc de cône.

Pour un segment de sphère à une base, le centre de gravité se trouve sur le rayon OC perpendiculaire au plan AB; sa distance $\bar{\zeta} = CG$ au sommet C se déduit aisément de la formule (m); on obtient, en posant $OC = R$, $CD = h$, et observant que $B_1 = 0$:

$$\bar{\zeta} = \frac{h}{4} \frac{8R - 3h}{3R - h},$$

ou bien :

$$OG = \frac{3}{4} \frac{(2R - h)^2}{3R - h}.$$

Pour $h = R$, on obtient une demi-sphère et $OG = \bar{\zeta}$; alors :

$$\bar{\zeta} = \frac{5}{8} R, \quad \bar{\zeta} = \frac{3}{8} R.$$

Pour un secteur sphérique CAB, le centre de gravité est sur le rayon bissecteur OC, et l'on trouverait $OG = \frac{3}{8} (2R - h)$.

2° Soit le volume engendré par l'aire ABCD tournant autour de OX; on a d'après une formule d'analyse :

$$V = \pi \int_a^x y^2 dx;$$

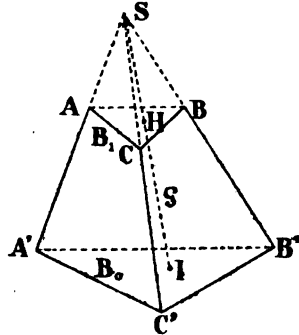


Fig. 182.

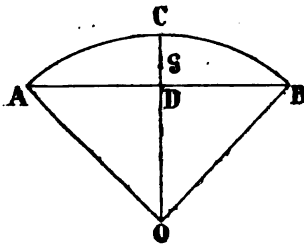


Fig. 183.

mais le centre de gravité du volume est évidemment sur l'axe de rotation par raison de symétrie, de sorte qu'il suffit de déterminer son abscisse ξ . L'équation des moments par rapport au plan ZOY donne :

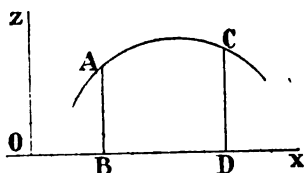


FIG. 184.

$$V\xi = \pi \int_a^x y^2 x dx.$$

Cette équation intégrée fait connaître ξ après que l'on a

calculé V par la formule précédente.

Considérons par exemple le *paraboloïde de révolution* engendré par la rotation autour de OX de la parabole $y^2 = 2px$. On obtient :

$$\xi = \frac{\pi \int_0^x y^2 x dx}{\pi \int_0^x y^2 dx} = \frac{\int_0^x 2p x^2 dx}{\int_0^x 2p x dx},$$

c'est-à-dire :

$$\xi = \frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{3} x.$$

Le centre de gravité du segment de paraboloïde est donc sur l'axe aux deux tiers à partir du sommet O.

3° Considérons enfin, comme application des formules (1) (89), le solide compris entre le plan des xy , le plan des xz , la sphère de rayon a dont le centre est à l'origine, et le cylindre :

$$x^2 + y^2 - ax = 0.$$

Il est commode, pour ce cas, d'utiliser les coordonnées cylindriques r, θ, z . Sur la base du cylindre, on a $r = a \cos \theta$, et les formules (1) conduisent à des quadratures simples. On trouve :

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} r \sqrt{a^2 - r^2} dr = \frac{3\pi - 4}{18} a^3,$$

$$V\xi = \iint r^2 \cos \theta \sqrt{a^2 - r^2} d\theta dr = \frac{2}{15} a^4,$$

$$V\eta = \iint r^2 \sin \theta \sqrt{a^2 - r^2} d\theta dr = \frac{4\pi - 32}{240} a^4,$$

$$Vz = \iint \frac{1}{2} (a^2 - r^2) r d\theta dr = \frac{5\pi}{123} a^4.$$

Ces équations font connaître immédiatement les coordonnées ξ , η , ζ du centre de gravité.

94. Théorèmes de Guldin. — Ces théorèmes permettent de calculer les surfaces et les volumes engendrés par la rotation d'une figure autour d'un axe fixe.

1° Si entre la formule :

$$A = 2\pi \int_a^x y ds,$$

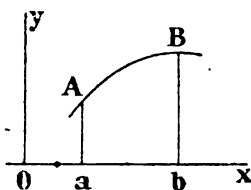


FIG. 185.

qui exprime l'aire de la surface de révolution engendrée par la courbe plane AB en tournant autour de OX, et l'équation (3) (89) :

$$S\eta = \int_a^x y ds,$$

qui fait connaître l'ordonnée η du centre de gravité de l'arc de courbe $AB = s$, on élimine l'intégrale qui leur est commune, il vient :

$$A = s \cdot 2\pi\eta. \quad (4)$$

Cette formule montre que l'aire engendrée par un arc de courbe plane, tournant autour d'un axe situé dans son plan, a pour mesure le produit de l'arc générateur par la circonférence que décrit son centre de gravité :

2° Si entre la formule

$$V = \pi \int_a^x y^2 dx,$$

qui exprime le volume du solide de révolution engendré par le trapèze curviligne AaBb tournant autour de OX, et l'équation :

$$A\eta = \int y dA,$$

qui fait connaître l'ordonnée η du centre de gravité du trapèze AaBb, et que l'on peut écrire :

$$A\eta = \int_a^x dx \int_0^y y dy = \frac{1}{2} \int_a^x y^2 dx,$$

on élimine l'intégrale $\int_a^x y^2 dx$, il vient :

$$V = A \cdot 2\pi\eta. \quad (2)$$

Cette formule montre que le volume engendré par une aire plane, tournant autour d'un axe situé dans son plan, a pour mesure le produit de l'aire génératrice par la circonférence que décrit son centre de gravité.

Remarques. — Si l'arc AB = s et l'aire AaBb = A ne décrivaient qu'une portion déterminée de la révolution, l'aire ou le volume engendré s'obtiendraient en multipliant l'arc s ou l'aire A par l'arc que décrirait le centre de gravité. On peut également vérifier que, si une aire plane se transporte dans l'espace, de telle sorte qu'un de ses points restant toujours sur une courbe son plan demeure constamment normal à cette courbe, le volume engendré par le mouvement de cette aire aura pour mesure sa surface multipliée par la courbe que décrit son centre de gravité.

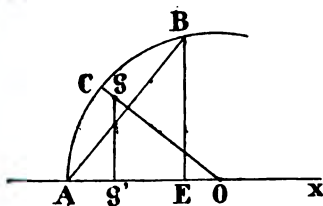


FIG. 186.

Applications. — Les théorèmes de Guldin sont d'un emploi commode pour déterminer les centres de gravité

de certaines figures et pour évaluer les surfaces et les volumes de révolution.

1° Soit par exemple l'arc de cercle AB dont le centre de gravité est G; en tournant autour du diamètre AO, il engendre une zone ACBE dont l'aire a pour expression, d'après la géométrie,

$$A = 2\pi R \times AE,$$

et d'après le premier théorème de Guldin :

$$A = 2\pi GG' \times \text{arc AB.}$$

Les triangles semblables GG'O et ABE donnent la proportion :

$$\frac{AB}{GO} = \frac{AE}{GG'},$$

d'où l'on déduit :

$$GG' = \frac{AE \times OG}{AB};$$

par suite, la seconde expression de l'aire de la zone peut s'écrire :

$$A = 2\pi \cdot AE \times \frac{\text{arc AB}}{AB} \times OG,$$

et, comme elle est égale à la première, on obtient l'équation :

$$OG = \frac{R \times \text{corde AB}}{\text{arc AB}}.$$

Pour une demi-circonférence, on obtient en faisant $AB = 2R$,
arc $AB = \pi R$:

$$OG = \frac{2R}{\pi};$$

pour un quart de circonférence, on a $AB = R\sqrt{2}$, arc $AB = \frac{\pi R}{2}$,
d'où :

$$OG = \frac{2R\sqrt{2}}{\pi}.$$

Soit encore le *segment de cercle* ACBDA dont le centre de gravité est G et qui tourne autour de l'axe XY passant par son centre et parallèle à la corde AB. Le solide de révolution engendré a pour volume, d'après la géométrie,

$$V = \frac{1}{6} \pi \overline{AB}^3,$$

et d'après le théorème de Guldin :

$$V = 2\pi OG \times \text{surf. ACBDA.}$$

Le rapprochement des deux expressions donne, en appelant S l'aire du segment :

$$OG = \frac{\overline{AB}^3}{12S}.$$

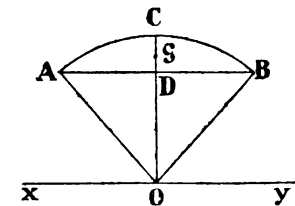


FIG. 187.

- 2° Soit, par exemple, le tore engendré par la révolution du cercle C de rayon r tournant autour de AB; appelons d la distance du centre O à l'axe, S la surface du tore, et V son volume; on a immédiatement, en observant que O est à la fois le centre de gravité de la circonférence et de la surface du cercle,

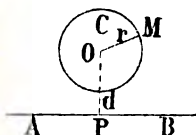


FIG. 188.

$$S = 2\pi r \times 2\pi d = 4\pi^2 r d,$$

$$V = \pi r^2 \times 2\pi d = 2\pi^2 r^2 d.$$

§ 5. — ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES DÉFORMABLES

95. Dans les systèmes invariables, la forme du système est connue et les forces qui lui sont appliquées sont censées ne pas pouvoir l'altérer; dans les systèmes déformables, au contraire, la configuration du système est essentiellement variable et dépend à chaque instant de l'action simultanée des forces auxquelles il est soumis. Dans l'état d'équilibre d'un système déformable, il est évident que les forces qui lui sont appliquées doivent remplir les mêmes conditions que si le système était invariable, mais ces conditions nécessaires ne sont pas toujours suffisantes.

96. **Systèmes articulés.** — Deux corps sont dits articulés lorsque dans tous leurs mouvements ils conservent soit un point commun, soit une droite commune. Dans le premier cas, l'articulation est *sphérique*; on en a un exemple dans le genou à coquille du graphomètre ou de la planchette de l'arpenteur. L'articulation est *cylindrique* lorsque les deux solides ont une droite commune, par exemple les charnières et les tourillons.

Si les deux corps ont plus de deux points communs, ils ne peuvent se déplacer l'un par rapport à l'autre.

97. **Articulations sphériques.** — On peut réaliser l'articulation sphérique de la façon suivante: l'un des corps se termine par une sphère pleine qui peut glisser sans frottement à l'intérieur d'une sphère creuse de même rayon portée par

l'autre corps. Le centre commun des deux sphères est le centre de l'articulation.

Considérons un ensemble de corps solides reliés entre eux par des articulations, par exemple un système de barres pesantes $OMM'M' \dots M_n$ (fig. 190). Chacun de ces solides peut être considéré comme libre à condition d'introduire la réaction du solide adjacent qui est inconnue et qui passe par le centre d'articulation. Chacune des articulations donne lieu à deux réactions égales et contraires; de plus, le premier et le dernier corps doivent, pour l'équilibre, reposer sur des appuis fixes O et M_n ou être reliés à des points fixes par des articulations.

Si l'on suppose que le système est en équilibre, on peut, sans troubler ce dernier, solidifier toutes les articulations O, M, M', \dots , c'est-à-dire rendre tous les corps invariablement liés entre eux. Le système devient alors un corps solide et l'ensemble des forces qui lui sont appliquées doit satisfaire aux six équations d'équilibre. Si l'on considère en particulier un centre d'articulation, M' par exemple, on peut également solidifier toutes les articulations placées à gauche de ce centre sans troubler l'équilibre; les corps situés de même côté forment alors un solide mobile autour d'un point fixe M' , et l'on sait que la condition d'équilibre d'un pareil solide consiste en ce que la somme des moments des forces appliquées doit être nulle par rapport à un axe quelconque issu du point fixe.

En résumé, les conditions nécessaires pour l'équilibre sont :

1° *L'ensemble des forces appliquées aux différents corps articulés, y compris les réactions des appuis fixes, doivent satisfaire aux conditions d'équilibre d'un solide libre.*

2° *Si l'on considère un centre d'articulation quelconque, la somme des moments des forces appliquées aux corps situés d'un même côté de ce centre doit être nulle par rapport à tout axe passant par ce centre.*

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes, comme il serait aisé de le démontrer.

Supposons qu'il y ait n corps solides reliés entre eux par $n - 1$ articulations. On a pour chacun des solides six équations

tions d'équilibre, et le nombre de ces équations est $6n$. Le nombre des réactions inconnues est égal à $n + 1$, et, comme chacune d'elles peut être décomposée en trois autres parallèlement à trois axes rectangulaires, le nombre total des composantes inconnues provenant des articulations et des appuis est $3(n + 1)$. Si entre les $6n$ équations on élimine ces $3(n + 1)$ composantes, il reste $3(n - 1)$ conditions auxquelles les données doivent satisfaire pour que le système soit en équilibre; ces conditions sont précisément celles des moments par rapport aux axes passant par les centres d'articulation. Si ces conditions sont remplies, on aura le nombre d'équations nécessaires pour déterminer les réactions inconnues.

Considérons, par exemple, une suite de pièces droites OM, MM', MM'', \dots , articulées aux œuxs M, M', M'', \dots , et chargées uniformément à raison de p kilogrammes par mètre courant de projection

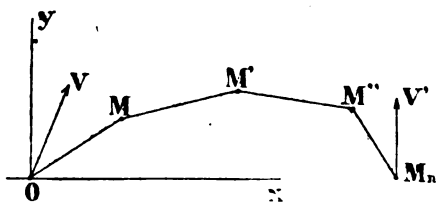


FIG. 193.

horizontale. On suppose les points d'appui O et M_n et les points d'articulation situés dans un même plan vertical, dans lequel on prend deux axes rectangulaires oy et ox , le premier horizontal et l'autre vertical.

Désignons par $x, y; x', y'; x'', y''; \dots; x_n, y_n$, les coordonnées des divers points d'articulation et du point d'appui M_n ; soient V et V' les réactions en O et M_n ; appelons enfin $X, Y; X', Y'; X'', Y''; \dots$ les composantes des réactions qui s'exercent aux points d'articulation.

L'équilibre de la pièce OM donne, en observant que la charge totale est égale à px , et qu'elle est appliquée au milieu de OM :

$$V_x - X = 0, \quad V_y - px - Y = 0, \quad Xy - Yx - \frac{px^2}{2} = 0,$$

Les moments sont pris par rapport au point O. Éliminant X et Y à l'aide des deux premières équations, la troisième devient :

$$V_x y - V_y x + \frac{px^2}{2} = 0. \quad (1)$$

Si l'on écrit les équations analogues pour l'ensemble des pièces OM et MM', on obtient de même :

$$V_x - X = 0, \quad V_y - px' - Y' = 0, \quad V_x y' - V_y x' + \frac{px'^2}{2} = 0;$$

puis pour l'ensemble des trois pièces OM, MM', M'M' :

$$V_x - X' = 0, \quad V_y - px' - Y' = 0, \quad V_x y' - V_y x' + \frac{px'^2}{2} = 0;$$

et ainsi de suite. Enfin, pour l'ensemble de toutes les pièces, on trouve :

$$V_x - V_x' = 0, \quad V_y - px_n - V_y' = 0, \quad V_x y_n - V_y x_n + \frac{px_n^2}{2} = 0.$$

Connaissant les positions des divers points d'articulation et de l'appui M_n , deux quelconques des équations analogues à (1) font connaître les composantes V_x et V_y de la réaction de l'appui O, puis V_x' et V_y' pour M_n . Les deux premières équations de chaque groupe permettent ensuite de calculer X, X', X'', ... et Y, Y', Y''...

Les considérations qui précèdent trouvent de nombreuses applications dans le calcul des diverses pièces solides des fermes simples, combles à la Mansard, fermes Polonceau, treillis des ponts métalliques, etc. On suppose que ces pièces sont articulées en leurs sommets, et l'équilibre réalisé dans cette hypothèse subsiste *a fortiori* quand, au lieu d'articulations, on est en présence d'assemblages rigides.

98. Équilibre des cordons. — Si F_1 et F_2 sont deux forces agissant aux extrémités d'une corde flexible et inextensible AB, il faut et il suffit pour qu'il y ait équilibre que la corde soit tendue en ligne droite et que les forces F_1 et F_2 soient égales et directement opposées. La valeur commune de ces forces est la *tension* de la corde.

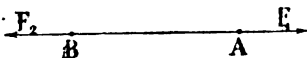


FIG. 191.

Lorsque trois forces F_1 , F_2 , F_3 , agissant sur un point A par l'intermédiaire de trois cordons, se font équilibre, ces trois cordons sont nécessairement dans un même plan, et

chaque force est égale et directement opposée à la résultante des deux autres; on a d'ailleurs, comme au paragraphe 65 :

$$\frac{F_1}{\sin \theta_1} = \frac{F_2}{\sin \theta_2} = \frac{F_3}{\sin \theta_3}.$$

Si le cordon AF_3 est attaché à un point fixe B, la réaction de ce point est égale et opposée à la résultante des forces F_1 et F_2 , c'est-à-dire égale à F_3 .

Il arrive quelquefois que les forces F_1 et F_2 agissent aux

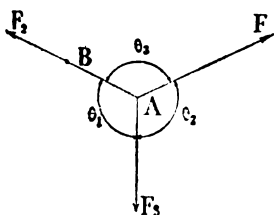


FIG. 192.

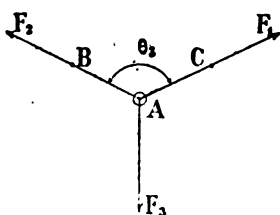


FIG. 193.

extrémités d'une corde BAC traversant un anneau retenu par la troisième force F_3 ; dans ce cas, l'équilibre a évidemment lieu lorsque $F_1 = F_2$; alors

$$F_3 = 2F_1 \cos \frac{\theta_3}{2}.$$

99. Polygone funiculaire. — On donne ce nom à un système de points matériels $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots, A_n$, tels que chacun de ces points soit relié au suivant par un cordon flexible et inextensible. Les différents sommets sont sollicités par des forces $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n$, et les cordons extrêmes doivent en outre, pour l'équilibre, être soumis à des forces déterminées T_0, T_n respectivement égales aux tensions de ces cordons et dirigées suivant leurs prolongements.

Dans l'état d'équilibre, chaque sommet A_i peut être considéré comme tel sous l'action de la force F_i , de la tension T_{i-1} du cordon $A_i A_{i-1}$, et de la réaction opposée T_i du cor-

don $A_i A_{i+1}$; de sorte que T_i est égale et directement opposée à la résultante de T_{i-1} et F_i . Ainsi T_1 est égale et opposée à la résultante T_0 et F_1 ; T_2 est égale et opposée à la résultante de T_1 et F_2 , c'est-à-dire à la résultante de T_0 , F_1 , F_2 ; enfin, T_n doit être égale et opposée à la résultante de T_0 , F_1 , F_2 , ..., F_n . Il suit de là que, lorsque le polygone funiculaire est en équilibre, les forces T_0 , F_1 , ..., F_n , T_n , transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque, s'y font équilibre. La réciproque est vraie, c'est-à-dire que, si ces forces sont telles que, transportées parallèlement à elles-

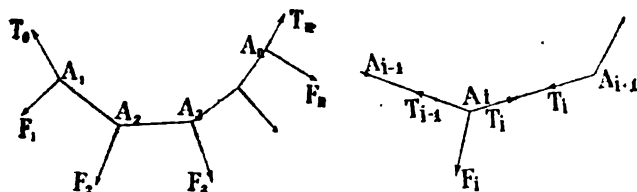


FIG. 191.

mêmes en un point quelconque, elles s'y fassent équilibre, il existe pour le polygone une figure d'équilibre. La tension T_i d'un cordon quelconque $A_{i+1} A_i$ est donnée en grandeur et en direction par la résultante des forces T_0 , F_1 , F_2 , ..., F_i appliquées au polygone depuis une de ses extrémités A_1 jusqu'au sommet A_i où commence ce cordon.

Considérons en particulier le polygone funiculaire $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ en équilibre, et par un point quelconque O de l'espace menons un vecteur OA égal et parallèle à F_1 , puis un vecteur AB égal et parallèle à F_2 , BC égal et parallèle à F_3 , ..., etc. La résultante générale des forces F_1 , F_2 , F_3 , ..., F_n étant nulle pour l'équilibre, la ligne polygonale $OABCD$ se ferme en O . De plus, le côté OA est parallèle à la force F_1 , c'est-à-dire parallèle au côté $A_1 A_2$ du polygone funiculaire. Le vecteur OB est la résultante de OA et AB , c'est-à-dire la résultante des forces F_1 et F_2 ; mais on a vu plus haut que la résultante de F_1 et F_2 était dirigée suivant $A_2 A_3$ dans le sens voulu pour tendre le cordon, donc OB est parallèle à $A_2 A_3$. De même OC est paral-

lèle à A_3A_4 , et OD parallèle à A_1A_5 . On voit donc que, si un polygone funiculaire est en équilibre, le polygone correspondant de Varignon en un point O pour les forces extérieures se ferme exactement, et les cordons successifs du polygone funiculaire sont parallèles aux diagonales issues de O du polygone de Varignon. En outre, on voit que ces diagonales représentent les tensions des différents cordons du polygone.

Si toutes les forces F_1, F_2, \dots , sont parallèles à un même plan, le polygone de Varignon est situé tout entier dans un plan parallèle au premier; et le polygone funiculaire en

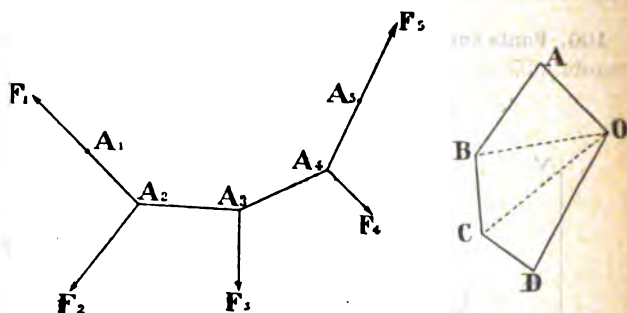


FIG. 195.

équilibre sera de même situé dans un plan parallèle, puisque ses côtés sont parallèles aux diagonales du polygone de Varignon.

La théorie est la même pour un polygone funiculaire en équilibre (fig. 194), dont les extrémités sont soumises à des tensions T_0 et T_n ; mais, pour la construction du polygone de Varignon, il faut considérer ces tensions comme les autres forces extérieures F_1, F_2, \dots, F_n .

Si tous les sommets A_1, A_2, \dots , portent des anneaux qui peuvent glisser librement le long du fil, les tensions de tous les cordons sont égales, c'est-à-dire que l'on a $T_0 = T_n$, et :

$$F_1 = 2T_0 \cos \frac{A_1}{2}, \quad F_2 = 2T_0 \cos \frac{A_2}{2}, \quad \dots$$

Si l'on se donnait la figure d'équilibre du polygone funiculaire, on connaîtrait par cela même en grandeur et en direction les forces qu'il faudrait appliquer à chaque sommet pour le tenir en équilibre.

Si les cordons extrêmes sont dans un même plan, pour avoir leur tension il suffit de décomposer suivant leurs directions la résultante de toutes les forces transportées parallèlement à elles-mêmes au point de rencontre de ces cordons.

Enfin, si les cordons extrêmes étaient fixés à deux points M et N, et les forces F_1, F_2, \dots , toutes verticales, le polygone funiculaire serait dans le plan vertical des deux points fixes.

100. Ponts suspendus. — L'un des câbles d'un pont suspendu offre un exemple de polygone funiculaire en équi-

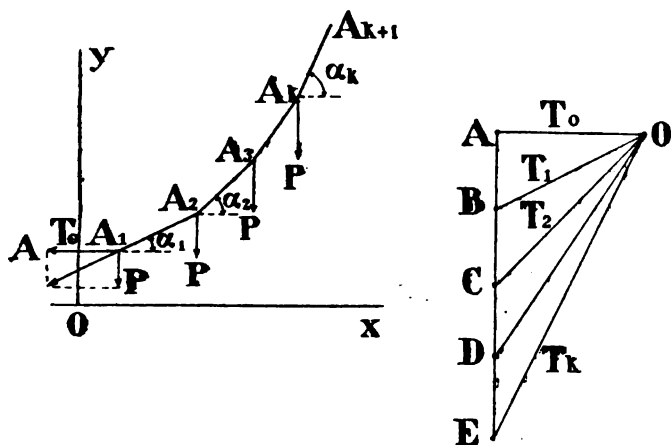


FIG. 196.

libre fixé à ses deux extrémités. Le poids du tablier agit sur le câble par l'intermédiaire de tringles verticales équidistantes, dont chacune supporte une même fraction P du poids du tablier. Toutes les forces étant parallèles à un même plan vertical, le polygone funiculaire en équilibre sera tout entier situé dans un plan vertical.

Pour simplifier la théorie, nous négligerons le poids du câble et nous supposerons ce dernier symétrique par rapport à un axe Oy ; nous admettrons que les tringles sont en nombre pair, de sorte que le côté AA_1 , situé au milieu du polygone, sera horizontal.

Prenons pour axe des x la trace du tablier du pont supposé horizontal et appelons :

$T_0, T_1, \dots, T_k, \dots, T_n$, les tensions respectives des côtés $AA_1, A_1A_2, \dots, A_kA_{k+1}, \dots$;

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n$, les inclinaisons de ces côtés sur l'horizon;

a , l'équidistance des tringles;

b , l'ordonnée du côté horizontal AA_1 ;

x_k, y_k , les coordonnées du sommet A_k .

La tension T_1 étant égale et opposée à la résultante de T_0 et de P , on a pour l'équilibre du sommet A_1 :

$$\operatorname{tang} \alpha_1 = \frac{P}{T_0}, \quad T_0 = T_1 \cos \alpha_1;$$

T_2 étant égale et opposée à la résultante de T_1 et de P , c'est-à-dire à la résultante de T_0 et de $2P$, on a de même pour l'équilibre du sommet A_2 :

$$\operatorname{tang} \alpha_2 = \frac{2P}{T_0}, \quad T_0 = T_2 \cos \alpha_2.$$

Pareillement au sommet A_3 , T_3 étant égale et opposée à la résultante de T_0 et de $3P$, on peut écrire :

$$\operatorname{tang} \alpha_3 = \frac{3P}{T_0}, \quad T_0 = T_3 \cos \alpha_3.$$

Au sommet A_k , T_k est égale et opposée à la résultante de T_0 et de k forces égales à P ; par suite :

$$\operatorname{tang} \alpha_k = \frac{kP}{T_0}, \quad T_0 = T_k \cos \alpha_k. \quad (m)$$

Les coordonnées du point A_1 sont $\frac{a}{2}$ et b ; celles du point A_2 sont :

$$x_2 = \frac{a}{2} + a, \quad y_2 = b + a \tan \alpha_1;$$

celles du point A_3 :

$$x_3 = \frac{a}{2} + 2a, \quad y_3 = y_2 + a \tan \alpha_2,$$

et celles du sommet A_k :

$$x_k = \frac{a}{2} + (k-1)a, \quad y_k = y_{k-1} + a \tan \alpha_{k-1};$$

si l'on tient compte des relations précédentes, ces dernières formules peuvent s'écrire :

$$x_k = \frac{a}{2} + (k-1)a,$$

$$y_k = b + \frac{aP}{T_0} [1+2+3+\dots+(k-1)] = b + \frac{aP}{T_0} \frac{k(k-1)}{1.2}, \quad (1)$$

et l'élimination du paramètre k donne :

$$y_k = b + \frac{P}{2aT_0} \left(x_k^2 - \frac{a^2}{4} \right).$$

Cette équation montre que tous les sommets A_1, A_2, \dots, A_k sont situés sur une *parabole* d'axe vertical.

Soit h la flèche du câble, c'est-à-dire l'ordonnée généralement connue du point d'attache du dernier sommet; on devra avoir d'après la formule (1) :

$$h = b + \frac{aP}{T_0} \frac{n(n-1)}{2}.$$

Cette équation permet de calculer la tension inconnue T_0 , on obtient :

$$T_0 = \frac{2(h-b)}{n(n-1)aP}.$$

On calcule ensuite les coordonnées des différents sommets, ce qui permet de tracer la forme du câble.

Le polygone de Varignon est figuré à droite. Le vecteur OA est horizontal et représente, à une certaine échelle, la tension T_0 du côté AA_1 ; les vecteurs égaux AB, BC, \dots , sont verticaux et proportionnels au poids P . Les résultantes partielles OB, OC, \dots , font connaître les tensions des divers cordons A_1A_2, A_2A_3, \dots . La considération du polygone de Varignon facilite beaucoup le tracé du câble.

101. Équilibre d'un fil homogène et pesant. — Soit AMB un fil flexible et inextensible, d'une très petite épaisseur, attaché par ses extrémités à deux points fixes A et B , et dont tous les points sont sollicités par de très petites forces. Soit M un point quelconque de ce fil. Les deux parties AM et MB exercent l'une sur l'autre, dans l'état d'équilibre, des actions égales et de sens contraires. On admet que toutes les forces qui proviennent de AM et agissent sur MB se réduisent à une force unique T

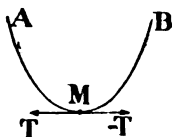


FIG. 197.

appliquée au point M , et, de même, que la partie MB exerce sur AM une action qui se réduit à une force égale et contraire à T . La valeur commune de ces deux forces est la tension du fil au point M ; cette tension s'exerce suivant la tangente au point M à la courbe que dessine le fil.

Si les forces qui agissent sur le fil se réduisent à son poids, alors chaque élément ds de ce fil est soumis à une force verticale pds , en désignant par p le poids de l'unité de longueur du fil; de sorte que la courbe d'équilibre peut être assimilée à un polygone funiculaire aux sommets duquel sont appliquées des forces verticales égales entre elles. En effet, soient MM' et $M'M''$ deux éléments consécutifs de la courbe, que l'on peut toujours supposer d'égale longueur ds ; le premier supporte un poids pds qui est appliqué au milieu de l'élément, mais que l'on peut décomposer en deux autres égaux chacun à $\frac{1}{2} pds$ et appliqués respectivement en M et M' . En opérant de même pour l'élément $M'M''$, on aura

en M' deux forces $\frac{1}{2} pds$ qui donneront une résultante pds .

Et comme on peut en dire autant de chacun des sommets du polygone infinitésimal qui se confond avec la courbe, on voit que cette courbe peut être assimilée à un polygone funiculaire dont tous les sommets sont les points d'application d'autant de forces verticales égales à pds .

Il résulte de cette assimilation que la courbe tout entière est située dans le plan vertical qui passe par les points fixes, que la tension en un point, qui a la direction d'un élément, est dirigée suivant la tangente à la courbe au même point, et que la projection horizontale de la tension d'un côté quelconque est une quantité constante.

Soient C le point le plus bas de la courbe, T_0 la tension du fil en ce point qui est horizontale, α l'angle que fait la tangente à la courbe au point M avec l'axe OX , s la longueur de l'arc CM . Le poids de l'arc CM est égal à ps , et les formules (n^o) (100) donnent, par une analogie évidente :

$$\tan \alpha = \frac{ps}{T_0}, \quad T_0 = T \cos \alpha.$$

D'autre part, on a les relations connues :

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx}, \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds}, \\ \cos \alpha = \frac{dx}{ds};$$

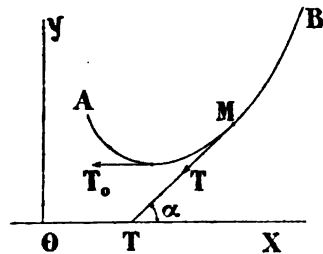


Fig. 129.

par suite, on peut écrire, en posant $T_0 = pa$, a désignant une constante convenablement déterminée :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a}, \quad \text{d'où} \quad s = a \frac{dy}{dx}.$$

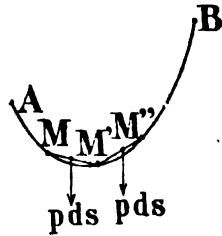


Fig. 128.

Pour intégrer, il est commode de poser $\frac{dy}{dx} = q$, d'où l'on déduit :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dq}{dx} = \frac{1}{a} \frac{ds}{dx};$$

enfin, comme on a :

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \sqrt{1 + q^2},$$

il en résulte l'équation du second ordre :

$$\frac{dq}{\sqrt{1 + q^2}} = \frac{dx}{a}.$$

Une première intégration donne, d'après une formule connue :

$$x = a [L(q + \sqrt{1 + q^2}) + x_0];$$

x_0 est une constante. On tire de là :

$$q + \sqrt{1 + q^2} = e^{\frac{x}{a} - x_0}; \quad (\alpha)$$

mais on observe que l'on a identiquement :

$$(q + \sqrt{1 + q^2})(q - \sqrt{1 + q^2}) = -1,$$

et comme on a aussi l'identité :

$$e^{\frac{x}{a} - x_0} \times -e^{-\frac{x}{a} + x_0} = -1,$$

on peut écrire :

$$q - \sqrt{1 + q^2} = -e^{-\frac{x}{a} + x_0}. \quad (\beta)$$

Additionnant membre à membre les équations (α) et (β) , on obtient :

$$q = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a} - x_0} - e^{-\frac{x}{a} + x_0} \right);$$

observant enfin que $q = \frac{dy}{dx}$ et intégrant une seconde fois, il vient :

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a} - x_0} + e^{-\frac{x}{a} + x_0} \right) + y_0. \quad (\gamma)$$

C'est l'équation de la courbe dessinée par le fil dans sa position d'équilibre; cette courbe a reçu le nom de *chainette*.

En choisissant convenablement les axes de coordonnées, il est possible de mettre l'équation (γ) sous une forme plus simple. En effet, prenons pour axe des y la verticale qui passe par le point le plus bas de la courbe, et pour origine un point O tel que $OC = a$.

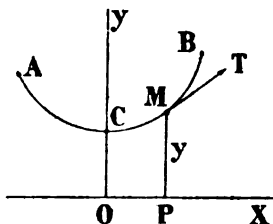


FIG. 200.

Dans ces conditions, pour $x = 0$ on doit avoir $q = 0$, puis-que au point C la tangente est horizontale, ce qui exige, d'après (α) , que $x_0 = 0$. En outre, pour $x = 0$, on doit avoir aussi $y = a$; alors il en résulte, d'après (γ) : $y_0 = 0$.

L'équation de la chainette rapportée aux nouveaux axes est donc :

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

Pour calculer la tension en un point M , observons que :

$$T = \frac{T_0}{\cos \alpha} = \frac{T_0 ds}{dx} = \frac{p a ds}{dx};$$

mais l'élément d'arc ds se calcule par la relation $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 (1 + q^2)$, d'où l'on déduit :

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + q^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)^2} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right);$$

par conséquent :

$$T = \frac{p a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

c'est-à-dire :

$$T = p y,$$

Ainsi, la tension de la chaînette en un point quelconque est proportionnelle à l'ordonnée de ce point.

La chaînette est une courbe qui jouit de propriétés géométriques remarquables.

Elle est symétrique par rapport à l'axe des y . La projec-



Fig. 201.

tion MK de l'ordonnée de la courbe sur la normale MN est constante et égale à a . La projection MI de l'ordonnée sur la tangente MT est égale à l'arc CM compté à partir du point le plus bas de la courbe. La longueur désignée par a , l'arc MC, et l'ordonnée y forment un triangle rectangle dont l'ordonnée

est l'hypoténuse. Le rayon de courbure est égal à la normale MN, mais dirigé en sens contraire. Enfin, de toutes les courbes d'une longueur donnée tracées sur un plan entre deux points donnés, la chaînette est celle dont le centre de gravité est le plus bas.

102. *Equilibre d'un fil sollicité par des forces quelconques.* — Dans le cas plus général où tous les points du fil sont sollicités par des forces quelconques, on considère encore un arc $MM' = ds$: cet arc est en équilibre sous l'action de la tension T appliquée en M suivant la tangente, de la force Fds qui agit sur l'élément ds , et de la tension $T + dT$ au point M' .

La tension T , étant dirigée suivant la tangente dont les cosinus directeurs sont dx, dy, dz , a pour composantes :

$$T \frac{dx}{ds}, \quad T \frac{dy}{ds}, \quad T \frac{dz}{ds}$$

Si l'on désigne par X, Y, Z les projections de la force F sur les axes, les composantes de cette force sont :

$$Xds, \quad Yds, \quad Zds.$$

Enfin, comme la tension $T + dT$ est précisément ce que devient

la tension T quand on passe du point M au point M' , on a pour les composantes de $T + dT$:

$$T \frac{dx}{ds} + d\left(T \frac{dx}{ds}\right), \quad T \frac{dy}{ds} + d\left(T \frac{dy}{ds}\right), \quad T \frac{dz}{ds} + d\left(T \frac{dz}{ds}\right).$$

Pour exprimer que l'arc MM' est en équilibre, il suffit d'écrire les trois équations des projections; on obtient, en observant que les tensions T et $T + dT$ sont opposées :

$$-T \frac{dx}{ds} + T \frac{dx}{ds} + d\left(T \frac{dx}{ds}\right) + Xds = 0,$$

et deux équations analogues pour les axes oy et oz . On trouve enfin après réductions :

$$d\left(T \frac{dx}{ds}\right) + Xds = 0,$$

$$d\left(T \frac{dy}{ds}\right) + Yds = 0,$$

$$d\left(T \frac{dz}{ds}\right) + Zds = 0.$$

Telles sont les équations générales de l'équilibre d'un fil; ce sont des différentielles du second ordre, et, en y ajoutant la relation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, on obtient quatre équations qui déterminent x , y , z , T , en fonction de s .

On déduit aisément des équations ci-dessus, en développant les différentielles et observant que la tangente est perpendiculaire à la normale principale à la courbe,

$$dT = -(Xdx + Ydy + Zdz).$$

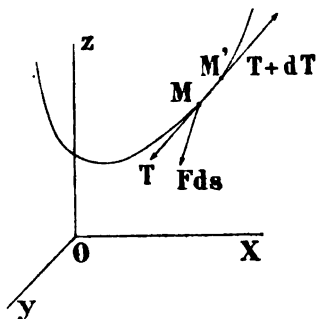


FIG. 202.

CHAPITRE III

DYNAMIQUE

§ 1. — MOUVEMENT DU POINT MATÉRIEL

103. **Équations du mouvement.** — La force variable F qui agit sur un point matériel en mouvement étant dirigée dans le sens de l'accélération et égale à cette dernière multipliée par un facteur constant m , qui est la masse du point, il en résulte que cette force suit tous les modes de décomposition indiqués en cinématique pour l'accélération. On a d'abord pour les composantes *tangentielle* et *normale* :

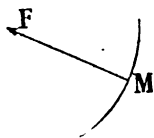


FIG. 203.

$$F_t = m \frac{dV}{dt}, \quad F_n = \frac{mV^2}{R}; \quad (1)$$

puis, pour les composantes suivant les axes ox , oy , oz ,

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = m \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (2)$$

Enfin, dans le cas du mouvement plan, on a, pour les composantes *centrale* et *perpendiculaire* :

$$F_r = m \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \frac{d\theta^2}{dt^2} \right), \quad F_m = \frac{m}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right). \quad (3)$$

Si le point M était soumis aux actions simultanées de plusieurs forces F_1, F_2, \dots , il est évident que les formules précédentes s'appliqueraient à leur résultante R ; ainsi, dans les formules (2), X, Y, Z représenteraient les composantes rectangulaires de cette résultante.

En général, la force F qui agit sur le point M , et, par suite, ses composantes quelconques, sont des fonctions connues du temps, des coordonnées de ce point et des composantes de sa vitesse, de sorte que la forme la plus générale des équations (2) est :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= f \left(x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= \varphi \left(x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= \psi \left(x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right). \end{aligned}$$

L'intégration de ces trois équations différentielles du second ordre conduit aux expressions des coordonnées du point M en fonction du temps et de six constantes arbitraires :

$$\begin{aligned} x &= \lambda (t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y &= \mu (t, C_1, \dots, C_6), \\ z &= \pi (t, C_1, \dots, C_6). \end{aligned}$$

La détermination des constantes se fait à l'aide des données initiales, c'est-à-dire des valeurs $x_0, y_0, z_0; \left(\frac{dx}{dt}\right)_0, \left(\frac{dy}{dt}\right)_0, \left(\frac{dz}{dt}\right)_0$, que prennent respectivement les coordonnées du point et les composantes de la vitesse, pour $t = 0$; il est évident, en effet, que ces valeurs doivent satisfaire aux équations (2) et, par suite, que l'on a :

$$\begin{aligned} x_0 &= \lambda (C_1 \dots C_6), & y_0 &= \mu (C_1 \dots C_6), & z_0 &= \pi (C_1 \dots C_6); \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 &= \lambda'_t (C_1 \dots C_6), & \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 &= \mu'_t (C_1 \dots C_6), & \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 &= \pi'_t (C_1 \dots C_6); \end{aligned}$$

soit en tout six équations permettant, en général, de déterminer les six constantes arbitraires. Les exemples que nous donnerons par la suite éclairciront ces généralités.

104. Mouvement vertical d'un point pesant dans le vide.

— 1° *Mouvement ascendant.* — La force qui agit sur le point M est son poids $P = mg$; elle est dirigée de x vers O , c'est-

à-dire dans le sens négatif de l'axe OX ; on doit donc écrire, avec le signe — :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -g.$$

Intégrant deux fois de suite, on obtient :

$$V = \frac{dx}{dt} = -gt + C_1, \quad x = -\frac{g}{2} t^2 + C_1 t + C_2.$$

Si le point matériel est lancé de l'origine O avec une vitesse initiale V_0 , on doit avoir, en faisant $t = 0$ dans ces formules,

$$V_0 = C_1, \quad x_0 = C_2 = 0;$$

par suite :

$$V = V_0 - gt, \quad x = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Le temps T de l'ascension s'obtient en faisant $V = 0$ dans la formule de la vitesse, on obtient :

$$T = \frac{V_0}{g};$$

FIG. 204.

la formule des espaces donne ensuite pour la hauteur maximum h atteinte par le point :

$$h = \frac{V_0^2}{2g}.$$

2° *Mouvement descendant.* — La force étant dirigée dans le sens OX, on a :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = g,$$

et comme précédemment :

$$V = V_0 + gt, \quad x = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2.$$

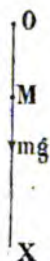


FIG. 205.

Si le corps est abandonné sans vitesse initiale, $V_0 = 0$; par suite :

$$V = gt, \quad x = \frac{1}{2} gt^2.$$

105. Mouvement rectiligne d'un point matériel attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance. — Soient O le centre fixe et M la position du mobile à l'époque t ; posons $OM = x$, et désignons par h l'intensité de la force attractive à l'unité de distance. Supposons enfin que le point parte du repos et que sa position initiale soit M_0 .

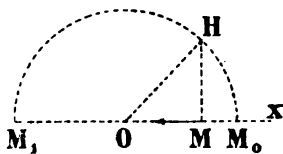


FIG. 206.

La force motrice étant dirigée dans le sens M_0M est négative quand x est positif, ou inversement ; le coefficient d'attraction doit donc être pris avec le signe $-$, et l'équation du mouvement rectiligne est :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -hx,$$

ou bien, si l'on pose $h = ma^2$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = 0.$$

L'intégrale de cette équation du second ordre est :

$$x = C_1 \cos at + C_2 \sin at,$$

d'où l'on déduit pour la vitesse :

$$\frac{dx}{dt} = -C_1 a \sin at + C_2 a \cos at.$$

Pour déterminer la valeur des constantes C_1 et C_2 , observons que, pour $t = 0$, on doit avoir, d'après les données :

$x = OM_0 = x_0$, $V_0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0$; on en déduit les relations :

$$x_0 = C_1, \quad C_2 = 0.$$

Par conséquent, le mouvement du point M est déterminé par les équations :

$$x = x_0 \cos at, \quad V = -ax_0 \sin at.$$

On reconnaît l'équation d'un mouvement vibratoire simple (14); l'amplitude de la vibration est $M_0M_1 = 2x_0$. Le point M est la projection d'un point H qui se déplace sur la circonférence de diamètre M_0M_1 d'un mouvement uniforme de vitesse ax_0 . Le quotient $\frac{\text{arc } M_0H}{ax_0}$ représente le temps que le mobile emploie pour aller du point M_0 au point M.

Si le point M était repoussé par le point O proportionnellement à la distance, on trouverait de la même façon, en supposant qu'il y ait une vitesse initiale dirigée vers le point O et égale à $-ad$:

$$x = \frac{1}{2}(x_0 + d)e^{-at} + (x_0 - d)e^{-at},$$

$$V = -a\sqrt{x^2 + d^2 - x_0^2}.$$

106. Mouvement des projectiles dans le vide. — La seule force qui agit sur le projectile M à un instant quelconque est son poids $P = mg$, dirigé parallèlement à OZ, dans le sens négatif; on a donc, d'après les formules (2), en observant que les composantes X et Y de la force motrice sont nulles :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg.$$

L'intégration de ces équations est immédiate, on trouve :

$$V_x = C_1, \quad V_y = C_2, \quad V_z = -gt + C_3;$$

$$x = C_1t + C_4, \quad y = C_2t + C_5, \quad z = -\frac{g}{2}t^2 + C_3t + C_6.$$

Le point matériel partant de l'origine O animé d'une vitesse initiale V_0 faisant avec OX l'angle α , on a pour $t = 0$:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = V_0 \cos \alpha, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = V_0 \sin \alpha;$$

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0;$$

par suite :

$$C_1 = V_0 \cos \alpha, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = V_0 \sin \alpha, \quad C_4 = C_5 = C_6 = 0.$$

Les coordonnées du point et les composantes de sa vitesse sont donc :

$$x = V_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y = 0, \quad z = V_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1)$$

$$V_x = V_0 \cos \alpha, \quad V_y = 0, \quad V_z = V_0 \sin \alpha - g t. \quad (2)$$

L'équation $y = 0$ montre que le mouvement du projectile s'effectue dans le plan vertical ZOZ.

L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant le temps t entre les équations (1); on trouve en effectuant les calculs :

$$z = x \tan \alpha$$

$$- \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (m)$$

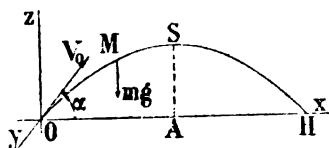


FIG. 207.

La trajectoire est une *parabole* dont l'axe est vertical et dirigé vers le bas, car le coefficient de x^2 est négatif; la courbe est évidemment tangente en O à la vitesse initiale.

L'*amplitude du jet* ou portée est la longueur OH; il suffit pour l'obtenir de faire $z = 0$ dans l'équation de la trajectoire; il vient :

$$OH = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Cette amplitude est *maximum* pour $\sin 2\alpha = 1$, ou $\alpha = 45^\circ$. L'ordonnée AS du sommet de la parabole représente la

hauteur maximum du jet. Pour le sommet S, $\frac{dz}{dt} = V_z = 0$, puisque z est maximum et $dz = 0$; donc on a la relation :

$$gt = V_0 \sin \alpha, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{V_0 \sin \alpha}{g};$$

par suite :

$$x = OA = \frac{V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g} = \frac{OH}{2},$$

et

$$z = AS = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

L'angle α sous lequel il faut lancer le projectile pour qu'il atteigne un point dont les coordonnées sont x_1, z_1 est donné par l'équation de la trajectoire :

$$z_1 = x_1 \tan \alpha - \frac{gx_1^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha},$$

dans laquelle α est l'inconnue. Cette équation peut s'écrire :

$$gx_1 \tan^2 \alpha - 2x_1 V_0^2 \tan \alpha + gx_1^2 + 2z_1 V_0^2 = 0,$$

et l'expression des racines est, en posant $V_0^2 = 2gh$:

$$\tan \alpha = \frac{2h}{x_1} \pm \frac{1}{x_1} \sqrt{4h^2 - 4hz_1 - x_1^2}.$$

Lorsque les racines sont réelles et inégales, c'est-à-dire quand on a $4h^2 - 4hz_1 - x_1^2 > 0$, le projectile peut être lancé dans deux directions différentes pour atteindre le point donné. L'une de ces directions correspond au tir de *plein fouet* et l'autre au tir *plongeant*; elles sont d'ailleurs symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle ZOX.

Quand les racines sont réelles et égales, c'est-à-dire si l'on a $4h^2 - 4hz_1 - x_1^2 = 0$, il n'existe plus qu'une seule direction possible. Enfin, lorsque les racines sont imaginaires, c'est-à-dire quand on a $4h^2 - 4hz_1 - x_1^2 < 0$, le problème est impossible et le point ne peut être atteint.

La courbe dont l'équation est

$$4h^2 - 4hz - x^2 = 0, \quad (n)$$

est une parabole EFG dont l'axe est dirigé suivant OZ, et dont le sommet est sur OZ à la hauteur h au-dessus de l'origine O. Quand le point que l'on veut atteindre est à l'intérieur de cette parabole, le projectile peut être lancé suivant deux directions différentes; il n'y a plus qu'une seule direction possible si le point est sur la parabole; enfin, quand ce point est à l'extérieur de la courbe, le problème n'est plus possible.

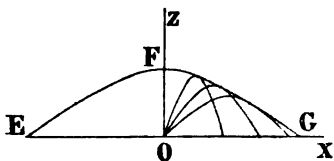


FIG. 207 bis.

La courbe (n) est appelée *parabole de sûreté*, et l'on peut voir que cette courbe est précisément l'enveloppe de toutes les paraboles trajectoires obtenues en faisant varier l'angle α dans l'équation (m).

107. Mouvement des projectiles dans un milieu dont la résistance est proportion-

nelle à la vitesse. — C'est le cas d'un projectile qui se meut dans l'air lorsque la vitesse initiale ne dépasse pas 100 mètres à la seconde.

On admet que la résistance du milieu est di-

rigée en chaque point M suivant la tangente à la trajectoire, en sens contraire du mouvement.

La résistance étant proportionnelle à la vitesse peut s'exprimer par la formule :

$$R = \frac{mg}{k} V = \frac{mg}{k} \frac{ds}{dt},$$

k désignant une constante.

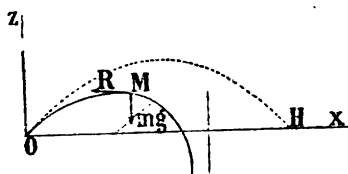


FIG. 208.

Si l'on observe que les cosinus directeurs de la vitesse sont $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$, on écrit immédiatement les équations du mouvement du point :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{k} \frac{ds}{dt} \frac{dx}{ds} = -\frac{g}{k} \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{g}{k} \frac{ds}{dt} \frac{dz}{ds} = -g - \frac{g}{k} \frac{dz}{dt}.$$

On prend le signe $-$, car les deux forces mg et R ont des directions négatives.

L'intégration de ces équations est effectuée au paragraphe 114 de l'*Hydraulique*, pour un problème qui présente avec celui-ci une certaine analogie ; on trouve :

$$x = \frac{kV_0}{g} \cos \alpha \left(1 - e^{-\frac{g}{k}t} \right), \quad (1)$$

$$z = -kt + \frac{k}{g} (V_0 \sin \alpha + k) \left(1 - e^{-\frac{g}{k}t} \right). \quad (2)$$

L'équation de la trajectoire s'obtient ensuite en éliminant t entre les expressions de x et z ; on tire de (1) :

$$1 - e^{-\frac{g}{k}t} = \frac{gx}{kV_0 \cos \alpha},$$

puis :

$$t = -\frac{k}{g} L \left(1 - \frac{gx}{kV_0 \cos \alpha} \right);$$

portant dans (2), il vient :

$$z = \frac{(k + V_0 \sin \alpha)}{V_0 \cos \alpha} x + \frac{k^2}{g} L \left(1 - \frac{gx}{kV_0 \cos \alpha} \right). \quad (3)$$

Cette équation représente une courbe ayant une asymptote verticale ; on s'en rend compte en cherchant la limite de $\frac{dz}{dx}$ lorsque t devient infini ; on trouve $\lim \frac{dz}{dx} = \infty$. La vitesse

tend à devenir uniforme, car lorsque t augmente indéfiniment :

$$\lim \frac{dx}{dt} = 0, \quad \lim \frac{dz}{dt} = -k.$$

Si le mouvement s'effectuait dans le vide, on aurait $k = \infty$, et l'équation (3) deviendrait celle d'une parabole.

On conçoit aisément, mais on pourrait le démontrer, que la trajectoire dans le milieu résistant est toujours au-dessous de la trajectoire dans le vide.

L'hypothèse d'une résistance des milieux proportionnelle à la vitesse est la plus simple que l'on puisse faire lorsqu'on se propose de tenir compte de cette résistance, comme cela est nécessaire dans les calculs de balistique. Pour des vitesses ne dépassant pas 100 mètres à la seconde, cette hypothèse s'accorde assez bien avec les faits observés, mais il n'en est plus de même avec les vitesses considérables que fournissent actuellement les armes perfectionnées de l'artillerie et surtout les fusils de petit calibre.

On admet aujourd'hui que la résistance du milieu ambiant varie proportionnellement au carré de la vitesse lorsque cette dernière reste comprise entre 100 et 200 mètres, ou qu'elle dépasse 400 mètres. Entre 200 et 300 mètres, la résistance augmente comme le cube de la vitesse. Ces diverses lois de résistance donnent lieu à des analyses semblables à la précédente, mais les calculs sont encore plus laborieux.

108. Théorème de l'impulsion. — On appelle *impulsion élémentaire* d'une force F le produit Fdt de l'intensité de la force par le temps infiniment petit dt ; ce produit se représente par un vecteur qui a même direction et même sens que la force F .

L'*impulsion totale* de la force F pendant l'intervalle de temps t_0 à t est la somme des impulsions élémentaires pendant cet intervalle.

Enfin, on donne le nom de *quantité de mouvement* d'un point de masse m à un instant donné au produit mV de la masse du point par sa vitesse; ce produit se représente également par un vecteur qui a même direction et même sens que la vitesse.

L'accroissement de la quantité de mouvement d'un point matériel libre pendant un temps donné est égal à l'impulsion totale de la force tangentielle pendant le même temps.

Soit un point matériel M en mouvement sous l'action d'une force variable F ; l'équation du mouvement tangential est :

$$m \frac{dV}{dt} = F_t.$$

Si l'on intègre dans l'intervalle de temps t_0 à t , il vient, en appelant V_0 et V les vitesses initiale et finale :

$$mV - mV_0 = \int_{t_0}^t F_t dt.$$

Cette équation démontre le théorème, car le second membre représente l'impulsion totale de la force tangentielle F_t pendant l'intervalle t_0 à t .

On obtient trois équations analogues en projetant le mouvement sur chacun des axes ox , oy , oz ; ces équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} m \left(\frac{dx}{dt} \right) - m \left(\frac{dx}{dt} \right)_0 &= \int_{t_0}^t X dt, \\ m \left(\frac{dy}{dt} \right) - m \left(\frac{dy}{dt} \right)_0 &= \int_{t_0}^t Y dt, \\ m \left(\frac{dz}{dt} \right) - m \left(\frac{dz}{dt} \right)_0 &= \int_{t_0}^t Z dt. \end{aligned}$$

On établit la première, par exemple, en intégrant l'équation $m \frac{d^2x}{dt^2} = X$ dans l'intervalle de t_0 à t , ce qui ne présente aucune difficulté. Ces relations font voir que l'accroissement de la quantité de mouvement du point matériel projetée sur un axe quelconque est égal à l'impulsion totale pendant le même temps de la force projetée sur le même axe; c'est l'extension du théorème ci-dessus au cas d'un axe fixe quelconque.

Dans le cas où la composante X est nulle, on obtient :

$$m \left(\frac{dx}{dt} \right) - m \left(\frac{dx}{dt} \right)_0 = 0,$$

c'est-à-dire, en appelant mC une constante :

$$m \left(\frac{dx}{dt} \right) = m \left(\frac{dx}{dt} \right)_0 = mC,$$

et en intégrant :

$$x = Ct + C'.$$

Dans ce cas, le mouvement du point projeté sur ox est uniforme.

109. Théorème des aires. — *Lorsque la force qui sollicite un point matériel libre passe constamment par un point fixe, la trajectoire est une courbe plane dont le plan passe par ce point, le rayon vecteur mené du centre au point mobile décrit dans ce plan des aires proportionnelles au temps.*

La démonstration découle immédiatement de ce que nous avons dit au paragraphe 13 sur les accélérations centrales.

110. Théorème de la force vive. — 1° Soit un point M en mouvement sous l'action d'une force variable F ; la composante tangentielle F_t est évidemment égale à la projection de F sur la tangente, de sorte que l'on a :

$$m \frac{dV}{dt} = F \cos \alpha,$$

en multipliant les deux membres de cette équation par $Vdt = ds$, elle devient :

$$mVdV = Fds \cos \alpha;$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$d \left(\frac{mV^2}{2} \right) = Fds \cos \alpha.$$

Si l'on intègre entre deux valeurs t_0 et t du temps, et si l'on désigne par V_0 la valeur de V à l'époque t_0 , on obtient l'équation remarquable :

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{t_0}^t Fds \cos \alpha. \quad (1)$$

Le produit mV^2 s'appelle la *force vive* du point matériel à l'instant t . L'expression $Fds \cos \alpha$ est, par définition, le *travail élémentaire* de la force F pendant le temps infiniment petit dt ; cette expression est positive ou négative suivant que la direction de la force fait un angle aigu ou obtus avec celle de la vitesse.



FIG. 209.

$\int_{t_0}^t Fds \cos \alpha$ représente la somme des travaux élémentaires, c'est-à-dire le *travail total* de la force F pendant l'intervalle de temps $(t - t_0)$.

Ces définitions étant posées, l'équation (1) fournit le théorème suivant :

L'accroissement de la demi-force vive d'un point matériel en mouvement sous l'action d'une force, pendant un temps fini quelconque, est égal au travail total de cette force pendant le même temps.

Les cosinus directeurs de la force F étant respectivement égaux à

$$\frac{X}{F}, \quad \frac{Y}{F}, \quad \frac{Z}{F},$$

X, Y, Z représentant les composantes de cette force suivant les axes de coordonnées, on a, d'après la formule qui donne le cosinus de l'angle de deux directions,

$$\cos \alpha = \frac{X}{F} \frac{dx}{ds} + \frac{Y}{F} \frac{dy}{ds} + \frac{Z}{F} \frac{dz}{ds},$$

car les cosinus directeurs de la tangente à la trajectoire sont $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$. On déduit de cette relation :

$$Fds \cos \alpha = Xdx + Ydy + Zdz.$$

2° Lorsque le point matériel M est soumis à l'action de plusieurs forces F_1, F_2, \dots , ayant pour résultante R , on obtient, en projetant toutes les forces sur la tangente MT :

$$\cos (R, MT) = \Sigma F \cos \alpha,$$

d'où, en multipliant par ds :

$$Rds \cos(R, MT) = \Sigma Fds \cos \alpha.$$

Ceci montre que le travail élémentaire de la résultante de plusieurs forces appliquées à un même point est égal à la somme algébrique des travaux élémentaires de ces forces. Il en est de même pour le travail total.

3° Il résulte immédiatement de tout ce qui précède l'énoncé du théorème général de la force vive.

THÉORÈME GÉNÉRAL. — *Lorsqu'un point matériel libre se meut sous l'action de plusieurs forces, la variation de la demi-force vive du mobile pendant un intervalle de temps fini égale la somme des travaux des forces appliquées au point pendant le même intervalle de temps.*

Ce théorème s'exprime par l'équation :

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{t_0}^t Xdx + Ydy + Zdz,$$

X, Y, Z représentant cette fois les composantes suivant ox, oy, oz de la résultante de toutes les forces qui agissent sur le point matériel.

111. Travail des forces. — L'expression $Fds \cos \alpha$ du travail élémentaire d'une force F et, par suite, le travail total, est nul lorsque $F=0$, ou $ds=0$, ou encore $\cos \alpha = 0$. Dans le premier cas, il n'y a aucune force ; dans le second, le point considéré est au repos ; enfin, dans le troisième, l'angle α est droit, et la force est normale à la trajectoire. Ainsi, le travail d'une force est nul lorsque cette force reste normale à la trajectoire du point ; il suit de là que, lorsqu'un point se meut sans frottement sur une courbe, ou sur une surface, le travail des réactions est nul, puisque ces réactions sont normales à la courbe ou à la surface.

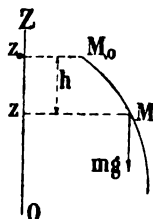


FIG. 210.

1° Dans le cas de la pesanteur, l'intensité et la direction de la force restent constantes ; la direction étant parallèle et contraire à l'axe vertical oz , on a pour le

travail élémentaire effectué, en observant que $X=0$, $Y=0$, $Z=-mg$:

$$\mathfrak{E}_e = -mgdz.$$

On trouve ensuite pour le travail total :

$$\mathfrak{E}_t = -mg(z - z_0) = mg(z_0 - z) = mgh;$$

c'est le produit de l'intensité de la force par la hauteur de chute. Si l'on fait $mg = h = 1$, on obtient $\mathfrak{E}_t = 1$; c'est-à-dire que, si l'on prend pour unité de force le kilogramme, pour unité de longueur le mètre, l'unité de travail sera le travail de la pesanteur dans la chute de 1 mètre du poids de 1 kilogramme, ou encore le travail qu'il faudra effectuer pour élever de 1 mètre le poids de 1 kilogramme; cette unité a reçu le nom de *kilogrammètre*.

Dans le système C. G. S., l'unité de travail est le travail d'une dyne déplaçant son point d'application de 1 centimètre; on l'appelle *Erg*. Cette unité est très faible, car on a 1 kilogrammètre = 1.000 grammes \times 100 centimètres, et comme 1 gramme vaut 980 dynes, il en résulte :

$$1 \text{ kgm} = 98.000.000 \text{ ergs.}$$

On prend comme unité pratique le *megerg*, qui vaut un million d'ergs.

Le kilogrammètre vaut 98 megergs.

2° Cherchons à évaluer le travail d'une force centrale agissant sur un point matériel M suivant une fonction donnée de la distance; $F = m\varphi(r)$; r représente la longueur OM.

Les composantes de la force F étant X, Y, Z, on a (fig. 211) :

$$X = -m\varphi(r) \cos \alpha = -m\varphi(r) \frac{x}{r},$$

$$Y = -m\varphi(r) \cos \beta = -m\varphi(r) \frac{y}{r},$$

$$Z = -m\varphi(r) \cos \gamma = -m\varphi(r) \frac{z}{r};$$

avec le signe — si la force est attractive, c'est-à-dire dirigée de M vers O. On déduit de ces équations :

$$Xdx + Ydy + Zdz = -\frac{m\varphi(r)}{r} (xdx + ydy + zdz);$$

mais la relation

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

donne en différentiant :

$$rdr = xdx + ydy + zdz;$$

par suite :

$$Xdx + Ydy + Zdz = -m\varphi(r)dr,$$

et

$$\mathcal{E}_t = -m \int_{r_0}^r \varphi(r) dr.$$

Pour une force *répulsive*, c'est-à-dire agissant dans le sens OM , on aurait la même expression avec le signe $+$,

$$\mathcal{E}_t = m \int_{r_0}^r \varphi(r) dr.$$

Supposons que $m\varphi(r) = m\mu^2 r$, alors l'attraction du point O est proportionnelle à la distance, et l'on a :

$$\mathcal{E}_t = \frac{m\mu^2}{2} (r^2 - r_0^2).$$

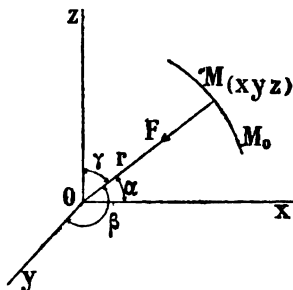


FIG. 211.

Quand $m\varphi(r) = \frac{m\mu^2}{r^2}$, l'action du point O est une *attraction newtonienne*; dans ce cas :

$$\mathcal{E}_t = m\mu^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right).$$

112. Surfaces de niveau et potentiel. — Les forces de la nature donnent lieu à un cas particulier assez étendu, c'est celui où les composantes X , Y , Z de F sont les dérivées partielles d'une même fonction U des coordonnées du point $M(x, y, z)$ sur lequel agit cette force; on a dans cette hypothèse :

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z};$$

et la formule du travail élémentaire devient :

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = d \cdot U(x, y, z);$$

c'est la différentielle totale de la fonction $U(x, y, z)$. Si X, Y, Z et x, y, z sont exprimées en fonction du temps, la formule du travail total :

$$\mathcal{E}_t = \int_{t_0}^t Xdx + Ydy + Zdz,$$

peut s'écrire après intégration :

$$\mathcal{E}_t = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0), \quad (1)$$

x_0, y_0, z_0 désignant les coordonnées du point M au temps t_0 ; x, y, z , ses coordonnées au temps t .

La fonction $U(x, y, z)$ a reçu le nom de *fonction des forces*; lorsqu'elle existe, on dit qu'il y a une fonction des forces ou bien que les forces X, Y, Z dérivent d'un potentiel — $U(x, y, z)$.

On appelle *surfaces de niveau* toutes les surfaces obtenues en égalant la fonction des forces à une constante arbitraire C ; leur équation est donc :

$$U(x, y, z) = C.$$



FIG. 212.

Par chaque point de l'espace passe une surface de niveau et une seule; car, si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du point, la surface de niveau qui passe par ce point est définie par l'équation :

$$U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0);$$

d'ailleurs deux surfaces de niveau ne peuvent se rencontrer, puisqu'en un point quelconque il en passe une seule.

La force est, en chaque point de l'espace, normale à la surface de niveau passant par ce point.

En effet, en un point M les cosinus directeurs de la force sont proportionnels aux composantes X, Y, Z , ou bien aux dérivées $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$. Mais les cosinus directeurs de la normale à la surface de niveau au point M sont aussi proportionnels à ces mêmes dérivées; donc la force a la direction de la normale.

Soient $U(x, y, z) = C$ et $U(x, y, z) = C + dC$, deux surfaces de niveau infiniment voisines. D'après (1), le travail effectué pendant le déplacement MM' est $\mathcal{E}_t = C + dC - C = dC$. Si dC est positive, il en est de même de \mathcal{E}_t ; mais on a vu que le travail était positif quand l'angle α de la force F et du déplacement était

aigu (110); donc la force est dirigée du même côté de la surface C que le déplacement, c'est-à-dire du même côté que la surface $C + dC$, ou enfin du côté où la fonction des forces augmente:

Les fonctions des forces se présentent principalement dans les théories sur l'électricité et le magnétisme; on désigne alors sous le nom de *potentiel* l'expression $-U(x, y, z)$; les surfaces de niveau sont des *surfaces équipotentielles*.

113. Théorème de Dirichlet. — Les conditions d'équilibre du point matériel M correspondent aux équations :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0;$$

mais ces dernières équations sont celles qui déterminent les maxima et minima de la fonction $U(x, y, z)$; donc les positions d'équilibre du point correspondent aux maxima et minima de la fonction des forces. Nous allons démontrer que, *si la fonction des forces passe par un maximum, l'équilibre du point matériel est stable.*

En effet, on peut considérer l'équilibre d'un point comme stable lorsqu'il est tel que, si l'on abandonne le point à l'action des forces après l'avoir infiniment peu déplacé de sa position d'équilibre et lui avoir communiqué une vitesse infiniment petite, cette vitesse reste toujours infiniment petite.

La condition d'équilibre se traduit par l'équation $dU(x, y, z) = 0$; nous allons faire voir que, dans le cas du maximum, la condition précédente se trouve satisfaite.

Au moment où l'on abandonne le point matériel infiniment peu déplacé à l'action des forces qui lui sont appliquées, sa demi-force vive $\frac{1}{2} mV_0^2$ a, par hypothèse, une valeur infiniment petite, et la fonction des forces doit être égale à $U_0 - \epsilon_0$, ϵ_0 désignant un accroissement infiniment petit positif, puisque U_0 est un maximum. A une époque ultérieure t , la demi-force vive sera $\frac{1}{2} mV^2$ et la fonction des forces $U_0 - \epsilon$, ϵ étant toujours positif.

D'ailleurs l'équation de la force vive peut s'écrire :

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = U - U_0,$$

et elle devient dans le cas présent :

$$\frac{mV^2}{2} + U_0 - \varepsilon_0 = \frac{mV_0^2}{2} + U_0 - \varepsilon,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2} + \varepsilon_0 - \varepsilon.$$

Comme $\frac{1}{2} mV^2$ est essentiellement positive, sa valeur doit rester infiniment petite, puisque les deux termes positifs du second membre ont des valeurs infiniment petites. Donc la vitesse restera nécessairement infiniment petite, c'est-à-dire que l'équilibre du point matériel sera stable.

EXEMPLES. — 1° Supposons que la force $F = m\mu^2$ agissant sur le point M soit constante ; alors on a (114) :

$$X = -m\mu^2 \frac{x}{r}, \quad Y = -m\mu^2 \frac{y}{r}, \quad Z = -m\mu^2 \frac{z}{r};$$

et, comme

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

on voit que X, Y, Z sont les dérivées partielles par rapport à x, y, z de l'expression :

$$-m\mu^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

qui est, par conséquent, la fonction des forces. Le potentiel est $m\mu^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Les surfaces de niveau sont les sphères représentées par l'équation :

$$-m\mu^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = C;$$

l'origine est le centre commun à toutes les sphères de niveau.

2° Dans le cas où la force motrice est la pesanteur, on a :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -mg;$$

et le théorème de la force vive donne :

$$\frac{1}{2} m V^2 - \frac{1}{2} m V_0^2 = - mg (z - z_0);$$

d'où :

$$V^2 = V_0^2 - 2g (z - z_0). \quad (2)$$

Cette formule est d'un emploi très général dans les problèmes de mécanique, où la force motrice est souvent la pesanteur.

La fonction des forces est $-mgz$, et les surfaces de niveau $mgz = C$, ou $z = C_1$, sont des plans parallèles au plan xoy ; la vitesse reprend la même valeur chaque fois que le point traverse un même plan horizontal.

114. Forces centrales. — Un point matériel M est soumis à l'action d'une force centrale F , lorsque cette force passe constamment par un point fixe O de l'espace.

Au point de vue du mode d'action des forces centrales, il y a lieu de les distinguer en forces répulsives et forces attractives; pour réaliser cette distinction dans les calculs, on convient d'affecter les premières du signe $+$ et les autres du signe $-$.

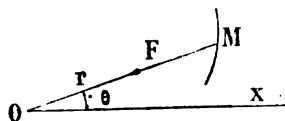


FIG. 213.

Lorsqu'une force est centrale, il en est de même de l'accélération du mouvement, puisque cette dernière est égale au quotient de la force par la masse constante du point, de sorte que l'on peut utiliser les propriétés établies au numéro 15 pour le mouvement d'un point dont l'accélération est centrale.

En particulier, le principe des aires s'exprime par la formule :

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C,$$

C désignant la *constante des aires*. Cette constante est égale au double de l'aire du secteur balayé par le rayon vecteur dans l'unité de temps; elle est aussi égale au produit du rayon

vecteur par la composante perpendiculaire de la vitesse, car on a :

$$C = r \times \frac{rd\theta}{dt} = r \times V \sin \alpha;$$

et, si on appelle V_0 , r_0 , α_0 les éléments qui correspondent à l'origine du mouvement, on peut écrire :

$$C = V_0 r_0 \sin \alpha_0. \quad (3)$$

On trouve pour la vitesse, en tenant compte de (3),

$$V^2 = \frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = C^2 \left(\frac{1}{r^4} \frac{dr^2}{d\theta^2} + \frac{1}{r^2} \right),$$

ce qui peut s'écrire :

$$V^2 = C^2 \left[\left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right]. \quad (4)$$

La formule de Binet donne ensuite pour l'expression de la force :

$$F = - \frac{mC^2}{r^2} \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} \right). \quad (2)$$

1° Proposons-nous, comme application, de *déterminer la trajectoire d'un point matériel de masse m sollicité par une force centrale attractive :*

$$F = \frac{m\mu \sin^2 \theta}{r^2}.$$

Le rayon initial est a , et la vitesse initiale lui est perpendiculaire et égale à $\sqrt{\frac{2\mu}{3a}}$.

Si l'on observe que F doit être prise avec le signe —, puisque cette force est attractive, on a immédiatement :

$$C^2 \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} \right) = \mu \sin^2 \theta,$$

puis d'après (3) :

$$C^2 = \frac{2\mu a}{3}.$$

L'équation différentielle de la trajectoire en coordonnées polaires est donc :

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{3 \sin^2 \theta}{2a}. \quad (a)$$

Cette équation est du second ordre avec second membre en $\frac{1}{r}$; et l'intégrale de l'équation dépourvue de second membre est $A \cos \theta + B \sin \theta$. Pour obtenir l'intégrale générale, il suffit d'ajouter une intégrale particulière; posons pour cela :

$$\frac{1}{r_0} = \alpha \sin^2 \theta + \beta \cos^2 \theta,$$

α et β étant deux constantes indéterminées. On obtient successivement en différentiant :

$$\frac{d \frac{1}{r_0}}{d\theta} = 2(\alpha - \beta) \sin \theta \cos \theta,$$

$$\frac{d^2 \frac{1}{r_0}}{d\theta^2} = 2(\alpha - \beta)(1 - 2 \sin^2 \theta);$$

remplaçant dans (a), on a pour déterminer les constantes la relation :

$$2(\alpha - \beta)(1 - 2 \sin^2 \theta) + \alpha \sin^2 \theta + \beta \cos^2 \theta = \frac{3}{2a} \sin^2 \theta,$$

d'où l'on tire :

$$\beta = 2\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{2a}, \quad \beta = \frac{1}{a}.$$

L'intégrale générale de (a) est donc :

$$\frac{1}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{1 + \cos^2 \theta}{2a};$$

pour $\theta = 0$, on doit avoir par hypothèse $r = a$; par suite, $A = 0$.

La formule (1) de la vitesse donne ensuite pour $\theta = 0$:

$$V_0^2 = \frac{2\mu}{3a} = \frac{2\mu a}{3} \left(B + \frac{1}{a^2} \right),$$

d'où l'on déduit $B = 0$.

En résumé, l'équation polaire de la trajectoire est :

$$r = \frac{2a}{1 + \cos^2 \theta};$$

c'est une courbe fermée analogue à une ellipse, et dont l'un des axes rectangulaires est précisément l'axe polaire.

2° Proposons-nous encore de déterminer la trajectoire d'un point

matériel soumis à l'action d'un centre O qui l'attire proportionnellement à la distance.

Dans ce cas, il est aussi simple d'appliquer les équations générales du mouvement, en observant que la trajectoire est une courbe plane (15).

Si l'on appelle $m\mu^2$ la constante d'attraction, on a immédiatement :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu^2x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu^2y,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu^2x = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \mu^2y = 0.$$

Ces équations sont du second ordre et sans second membre ; et les intégrales générales sont de la forme :

$$x = a \sin \mu t + a' \cos \mu t, \\ y = b \sin \mu t + b' \cos \mu t;$$

a, a', b, b' désignent des constantes arbitraires.

L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant le temps t , ce qui ne présente aucune difficulté ; le résultat de

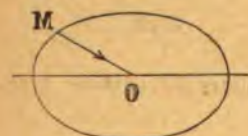


FIG. 214.

l'élimination est :

$$(b'x - a'y)^2 + (ay - bx)^2 = (ab' - ba')^2;$$

cette équation est celle d'une ellipse de centre O.

Si la force était répulsive, la trajectoire serait une hyperbole.

115. Mouvement des planètes. — LOIS DE KÉPLER. — Les lois qui régissent le mouvement des planètes autour du Soleil ont été déduites par Képler des observations de Tycho-Brahé. Ces lois sont au nombre de trois ; elles se rapportent au centre de gravité de chaque planète ainsi qu'à celui du Soleil.

1° *Les planètes décrivent autour du Soleil des courbes planes, et les aires balayées par les rayons vecteurs sont proportionnelles aux temps ;*

2° *Les courbes décrites sont des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers ;*

3° *Les carrés des temps des révolutions sont entre eux comme les cubes des grands axes des orbites.*

La conséquence des lois de Képler est la loi de Newton sur l'attraction réciproque au carré de la distance ; en effet, nous

avons démontré que, si un point se déplace dans l'espace de façon que l'aire balayée par son rayon vecteur varie proportionnellement au temps, l'accélération de ce point passe par un point fixe ; donc l'accélération d'une planète P passe constamment par le Soleil S, et il en est de même de la force qui agit sur cette planète (15).

En outre, puisque la trajectoire de P est une ellipse ayant un foyer en S, cette force est une attraction qui s'exprime par la formule :

$$F = -\frac{mC^2}{pr^2};$$

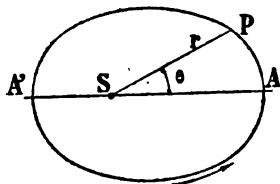


FIG. 215.

m est la masse de la planète, C la constante des aires, p le paramètre de l'orbite, r le rayon vecteur SP.

Si l'on pose $\mu = \frac{C^2}{p}$, la troisième loi de Képler montre que le rapport μ est le même pour toutes les planètes. Désignons, en effet, par $2a$ et $2b$ les axes de l'orbite et par T la durée de la révolution sidérale de la planète P. Le double de l'aire balayée pendant le temps T par le rayon vecteur SP est $2\pi ab$, et, comme les aires sont proportionnelles aux temps, on peut écrire :

$$C = \frac{2\pi ab}{T},$$

d'où l'on déduit :

$$\mu = \frac{C^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3 b^3}{pT^2},$$

ou encore, en observant que $p = \frac{b^2}{a}$:

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2},$$

c'est-à-dire $\mu = \text{const}^e$, puisque le rapport $\frac{a^3}{T^2}$ est le même pour toutes les planètes.

La loi de Newton régit non seulement l'action du Soleil sur

les planètes et celle des planètes sur le Soleil, laquelle est égale et directement opposée à la première en vertu de l'égalité de l'action et de la réaction, mais encore l'action de chaque planète sur ses satellites et sur les planètes environnantes, et, plus généralement, sur tous les corps du système auquel elle appartient.

La cause réelle de cette puissance attractive échappe à nos investigations; mais, en ne considérant que les effets, on peut dire que les choses se passent comme si tous les corps de la nature s'attiraient proportionnellement aux masses et en raison inverse du carré de la distance.

C'est le grand principe de la gravitation universelle.

Pour introduire les masses dans l'expression de la force F , observons que l'attraction de S sur la planète P est :

$$F = - \frac{m\mu}{r^2};$$

FIG. 216.

l'attraction opposée de P sur le Soleil S est, en appelant M la masse du Soleil :

$$F = - \frac{M\mu_1}{r^2}.$$

Comme ces deux forces sont égales et de sens contraires d'après Newton, on a :

$$m\mu = M\mu_1,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\mu}{M} = \frac{\mu_1}{m} = \text{const}^{\circ};$$

si l'on désigne par f cette constante, il en résulte l'expression :

$$F = - \frac{f m M}{r^2}.$$

La constante d'attraction f représente l'attraction exercée par l'unité de masse du Soleil sur l'unité de masse de la planète à l'unité de distance.

On considère le Soleil et les planètes comme de simples

points matériels. A vrai dire cette hypothèse serait justifiée par le seul fait que les distances des planètes au Soleil sont extrêmement grandes par rapport aux rayons de ces planètes, puisque la distance de la Terre au Soleil égale 24.000 fois le rayon terrestre; mais on a démontré : 1° que le mouvement du centre de gravité d'un corps est le même que si toute la masse du corps était concentrée en ce point (134); 2° que l'attraction d'une sphère homogène sur un point extérieur est la même que si toute la masse de la sphère était concentrée au centre.

La force d'attraction du Soleil est donc la même que si toute sa masse était concentrée en son centre, et, en supposant la planète réduite à un point matériel, on obtiendra le mouvement du centre de gravité de cette planète.

116. Mouvement d'un point matériel attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance. — C'est le problème inverse de celui qui fut résolu par Newton pour déduire des lois de Képler la loi de l'attraction des planètes.

Dans ce cas, la trajectoire est une courbe plane, et son plan est déterminé par la vitesse initiale V_0 et le centre fixe S.

L'expression de la force est $F = -\frac{m\mu}{r^2}$, et la formule de Binet donne :

$$-\frac{C^2}{r^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) = -\frac{\mu}{r^2}. \quad (1)$$

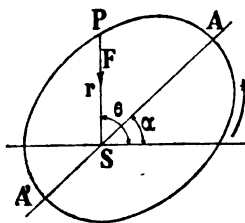


FIG. 217.

Changeons de variable et posons pour un instant :

$$\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2} = z;$$

l'équation différentielle (1) devient alors :

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = 0.$$

Cette équation est du second ordre et sans second membre, et son intégrale générale est :

$$z = A \cos \theta + B \sin \theta;$$

ce que l'on peut encore écrire :

$$z = A \cos (\theta - \alpha), \quad (2)$$

A et α désignant deux constantes arbitraires.

Si l'on revient à la variable α , on a d'abord :

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2} + A \cos (\theta - \alpha),$$

d'où l'on déduit pour la trajectoire du point :

$$r = \frac{\frac{C^2}{\mu}}{1 + \frac{AC^2}{\mu} \cos (\theta - \alpha)}. \quad (3)$$

Cette équation représente une conique ayant un foyer au centre d'attraction ; $\frac{C^2}{\mu}$ est son paramètre, $\frac{AC^2}{\mu}$ son excentricité. Si $\frac{AC^2}{\mu} < 1$, la trajectoire est une ellipse ; c'est une hyperbole ou une parabole suivant que $\frac{AC^2}{\mu} \geq 1$.

Supposons que la trajectoire soit une ellipse, la formule de la vitesse donne, d'après l'équation (3) de la trajectoire,

$$V^2 = A^2 C^2 + \frac{2\mu^2}{C^2} + 2\mu A \cos (\theta - \alpha) - \frac{\mu^2}{C^2},$$

ou :

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} - \left(\frac{\mu^2}{C^2} - A^2 C^2 \right).$$

Désignant alors par e l'excentricité de l'orbite, et par a son grand axe, on a d'autre part :

$$\frac{\mu^2}{C^2} - A^2 C^2 = \frac{\mu^2}{C^2} - \frac{\mu^2 e^2}{C^2} = \frac{\mu (1 - e^2)}{\frac{b^2}{a}} = \frac{\mu}{a};$$

car

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{C^2}{\mu}, \quad \text{et} \quad 1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Ainsi :

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

et comme :

$$v = \frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{C^2}{r^2},$$

il en résulte l'équation :

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} - \frac{C^2}{r^2} = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} - \frac{\mu b^2}{ar^2}.$$

Multipliant par r^3 , il vient :

$$\left(r \frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{\mu}{a} (2ar - r^2 - b^2) = \frac{\mu}{a} (-a^2 + 2ar - r^2 + a^2 - b^2),$$

ou encore :

$$\left(r \frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{\mu}{a} [-(a-r)^2 + a^2 e^2];$$

enfin :

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}} dt = \frac{r dr}{\sqrt{-(a-r)^2 + a^2 e^2}}.$$

Telle est l'équation différentielle du mouvement du point sur sa trajectoire.

Pour intégrer, il est commode de changer de variable par la relation :

$$r = a (1 - e \cos u); \quad (x)$$

d'où l'on tire :

$$dr = ae \sin u du;$$

alors :

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}} dt = \frac{a^2 (1 - e \cos u) e \sin u du}{\sqrt{-a^2 e^2 \cos^2 u + a^2 e^2}} = a (1 - e \cos u) du.$$

L'intégration est ainsi immédiate ; on obtient :

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}} (t - t_0) = a (u - e \sin u).$$

Si l'on compte le temps à partir du périhélie A', r varie depuis $r = a(1 - e)$ jusqu'à $r = a(1 + e)$, et u varie de 0 à π . L'intégrale précédente prise entre ces limites devient :

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}} t = a(u - e \sin u);$$

et, en posant,

$$\frac{\sqrt{\mu}}{a \sqrt{a}} = n,$$

elle s'écrit enfin :

$$nt = u - e \sin u.$$

Cette équation remarquable, qui joue un rôle considérable dans l'étude du mouvement des planètes, a reçu le nom d'*équation de Képler*. L'angle θ est l'*anomalie vraie*, u l'*anomalie excentrique* et nt l'*anomalie moyenne*.

L'équation de Képler définissant u en fonction du temps, et r étant défini en fonction de u par la relation (a), il en résulte que r est connu en fonction du temps, ce qui détermine à chaque instant la position de la planète sur son orbite.

Pour compléter le problème, il ne reste plus qu'à exprimer θ en fonction de u ; on a pour cela :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} = a(1 - e \cos u);$$

et, si l'on forme successivement les quantités $1 - \cos u$ et $1 + \cos u$, on trouve :

$$\frac{1 - e}{1 + e} \cdot \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos u}{1 + \cos u};$$

d'où l'on déduit :

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{u}{2}.$$

La durée de la révolution entière de la planète est donnée par la formule :

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}, \quad \text{d'où} \quad T = \frac{2\pi a \sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}.$$

Les observations astronomiques ont permis de reconnaître que l'excentricité de toutes les orbites planétaires est très petite, car pour la planète Mars, dont l'excentricité est la plus grande, on a $e = \frac{1}{60}$.

Lorsque l'orbite peut être assimilée à un cercle, le carré de la vitesse est constant; la force accélératrice est aussi constante et égale à la force centripète.

117. Mouvement des comètes. — Pour certaines comètes non périodiques, la trajectoire est une parabole; dans ce cas, on a :

$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta},$$

et le principe des aires donne :

$$Cdt = r^2 d\theta = \frac{p^2 d\theta}{(1 + \cos \theta)^2} = p^2 \frac{d \frac{\theta}{2}}{2 \cos^4 \frac{\theta}{2}}.$$

Pour intégrer, posons $t\varphi \frac{\theta}{2} = z$; il vient :

$$\frac{d\theta}{2} = \cos^2 \frac{\theta}{2} dz;$$

par suite :

$$Cdt = p^2 \frac{(1 + z^2) dz}{2};$$

et l'intégration donne, en désignant par C' une constante :

$$2Ct = p^2 \left(z + \frac{z^3}{3} \right) + C'.$$

Si l'on compte le temps à partir du périhélie P, il vient :

$$2Ct = p^2 \left(t\varphi \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} t\varphi^3 \frac{\theta^3}{2} \right),$$

ou bien, puisque $C^2 = \mu p$:

$$2 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} t = t\varphi \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} t\varphi^3 \frac{\theta^3}{2}.$$

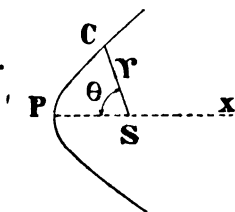


FIG. 218

Telle est la loi du mouvement de la comète sur son orbite; elle fait connaître à chaque instant la valeur de l'angle θ en fonction du temps, c'est-à-dire la position de la comète.

L'attraction newtonienne n'est pas la seule loi de force centrale qui fournit des trajectoires elliptiques; on a vu au numéro 114 qu'un point matériel attiré par un autre point fixe proportionnellement à la distance décrit également une ellipse, dont le centre se confond avec le point attractif.

Halphen et M. Darboux ont démontré récemment que ces deux lois de forces étaient les seules qui fournissent des trajectoires elliptiques.

118. Mécanique céleste. — La théorie précédente montre que, si les planètes n'obéissaient qu'à l'attraction solaire, elles suivraient rigoureusement les lois de Képler et décriraient des ellipses, conformément à la seconde de ces lois.

Mais, en raison de la gravitation universelle et réciproque, les planètes exercent l'une sur l'autre des actions variables avec les masses et les distances; ces actions provoquent certaines *perturbations* dans leur marche, de sorte que les lois de Képler ne sont pas l'expression tout à fait adéquate de la vérité : ce sont des lois approchées.

Les perturbations planétaires, ou inégalités, sont de deux sortes : les unes, dites *séculaires*, vont en s'accroissant avec le temps; telles sont, par exemple, les variations de l'excentricité de l'orbite terrestre et le déplacement du périhélie. Les perturbations *périodiques* oscillent, au contraire, entre certaines limites déterminées, et les choses reviennent au même état après un intervalle de temps plus ou moins long; telles sont les grandes inégalités de Saturne et de Jupiter.

Mais, au milieu de toutes ces perturbations, un fait capital les domine, et suffit pour assurer la stabilité du système solaire : c'est l'invariabilité presque absolue des grands axes des orbites planétaires.

L'étude du mouvement des planètes, en tenant compte des perturbations apportées par les planètes voisines, et l'étude du mouvement des satellites autour des planètes constituent la mécanique céleste, dont Newton a jeté les premières bases, il y a environ deux siècles.

119. Mouvement d'un point matériel sur une courbe fixe.
— **Pendule simple.** — Lorsqu'un point matériel est assujéti

par ses liaisons à glisser sans frottement sur une courbe fixe, on peut encore appliquer à ce point les équations du mouvement d'un point libre, à condition d'ajouter à la résultante des forces qui agissent sur lui la *réaction normale* de la courbe. Pendant la durée du mouvement, cette réaction est à chaque instant égale et contraire à la pression exercée par le point sur la courbe.

Le théorème de la force vive s'étend au mouvement sur une courbe fixe, car le travail de la réaction normale est constamment nul, puisque cette force est normale à la courbe.

Le *pendule simple* est réalisé par un point matériel pesant M , assujéti à décrire un cercle vertical dans le vide.

L'unique force motrice est le poids mg du point matériel. Prenons l'axe Oz dirigé vers le bas dans le sens de cette force; on a :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = mg;$$

et l'équation élémentaire de la force vive s'écrit :

$$d \cdot \frac{1}{2} mV^2 = mgdz.$$

Si l'on suppose le point abandonné sans vitesse dans une position initiale M_0 , l'intégration donne :

$$V^2 = 2g(z - z_0). \quad (1)$$

Menons M_0M_1 parallèle à OX ; on voit que la vitesse du point devient nulle, ce qui signifie que le mouvement change de sens chaque fois que ce point passe par M_0 et M_1 . Mais, après avoir quitté la position M_0 et être parvenu en M_1 , le point matériel se trouve placé en M_1 dans les mêmes conditions mécaniques qu'en M_0 , ce qui revient à dire que le mouvement consiste en une série d'oscillations isochrones allant de M_0 à M_1 et de M_1 en M_0 .

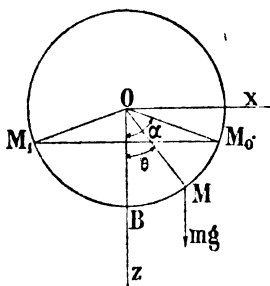


FIG. 219.

Déterminons la position du point M en fonction du temps par l'angle $BOM = \theta$, compté à partir de l'axe oz , et posons : $BOM_0 = \alpha$, $OM_0 = l$. On a les relations :

$$z = l \cos \theta, \quad \frac{dz}{dt} = -l \sin \theta \frac{d\theta}{dt}, \quad z_0 = l \cos \alpha;$$

L'équation (1) s'écrit avec ces notations :

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \alpha), \quad \text{car} \quad v = \frac{ds}{dt} = -l \frac{d\theta}{dt}.$$

On en déduit :

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}, \quad (2)$$

avec le signe — devant le radical, car au début du mouvement le temps t augmente, tandis que θ diminue, de sorte que $\frac{d\theta}{dt}$ est négatif.

Posons :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = k, \quad \sin \frac{\theta}{2} = kx; \quad \text{d'où} \quad \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 2k dx;$$

θ est toujours compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$, c'est-à-dire que k et x sont numériquement moindres que l'unité. D'autre part :

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - k^2 x^2}, \quad d\theta = \frac{2k dx}{\sqrt{1 - k^2 x^2}},$$

$$\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = k \sqrt{1 - x^2};$$

l'équation (2) peut donc s'écrire :

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}.$$

Le point M abandonnant à l'époque $t = 0$ la position M_0 , qui correspond à $\theta = \alpha$, ou $x = 1$, la loi du mouvement de

précision, on emploie la formule plus approchée :

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right].$$

Pour compléter la question, proposons-nous de calculer la réaction normale N que le cercle exerce à chaque instant sur le point M . En projetant toutes les forces, y compris cette réaction, sur la normale à la courbe, la seconde des équations (1) du paragraphe 403 donne :

$$F_n + N = \frac{mV^2}{l};$$

mais

$$F_n = mg \cos \beta = -mg \cos \theta = -\frac{mgz}{l}; \quad V^2 = 2g(z - z_0);$$

donc :

$$N = 2mg \frac{z - z_0}{l} + mg \frac{z}{l},$$

ou enfin :

$$N = \frac{mg}{l} (3z - 2z_0).$$

On voit que la réaction augmente à mesure que le point descend sur le cercle, et qu'elle atteint son maximum en B .

CAS PARTICULIER. — Lorsque l'angle α est égal à 180° , le point M est abandonné sans vitesse du sommet A du cercle ; dans ce cas, $\cos \alpha = -1$, et l'équation (2) devient :



FIG. 221.

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \cos \theta}}.$$

On peut intégrer, ce qui donne :

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} L. \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{4} \right)};$$

cette formule fait connaître le temps que le mobile emploie à parcourir l'arc $M'M$; l'angle $M'OZ$

est égal à β . Il faut un temps infini au mobile pour remonter jusqu'au point A.

120. Pendule dans un milieu résistant. — Lorsque le pendule oscille dans un milieu résistant, comme l'air par exemple, la résistance de ce milieu est une force tangentielle opposée au mouvement.

Si l'on projette toutes les forces sur la tangente, on obtient, en appelant mR la résistance du milieu :

$$m \frac{dV}{dt} = mg \sin \theta - mR;$$

mais :

$$V = \frac{ds}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2},$$

par suite :

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \sin \theta - R.$$

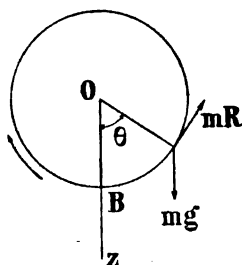


FIG. 222.

Lorsque la résistance est proportionnelle à la vitesse, on peut poser, en appelant k une constante :

$$R = \frac{dV}{k} = \frac{g}{k} \frac{ds}{dt},$$

et l'équation devient :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{k} \frac{ds}{dt} = g \sin \theta;$$

c'est une équation linéaire du second ordre avec second membre que l'on sait intégrer. Le calcul donne, en posant $\gamma = \sqrt{1 - \frac{lg}{4k^2}}$:

$$\theta = \alpha \left[\cos \left(t\gamma \sqrt{\frac{g}{l}} \right) + \frac{\sqrt{lg}}{2k\gamma} \sin \left(t\gamma \sqrt{\frac{g}{l}} \right) \right] e^{-\frac{gt}{2k}};$$

puis, pour la durée d'une demi-oscillation :

$$T = \frac{\pi}{\gamma} \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Les oscillations sont isochrones comme dans le vide, et leur durée est augmentée dans le rapport de 1 à γ . Les amplitudes successives forment une progression géométrique décroissante.

121. Pendule cycloïdal. — Dans ce cas, la courbe fixe est une cycloïde. Soit a le rayon du cercle générateur de cette

courbe; on a pour les arcs OB et OM :

$$\text{arc OB} = 4a, \quad \text{arc OM} = 4a \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right);$$

par suite, l'arc BM = s a pour longueur :

$$s = 4a - 4a \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) = 4a \cos \frac{\alpha}{2}.$$

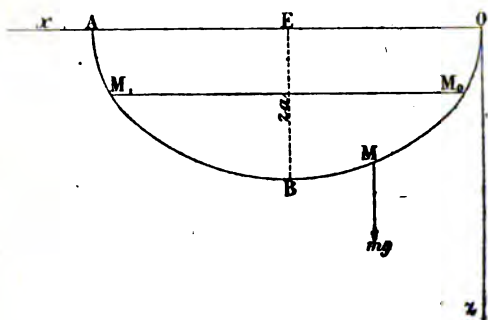


FIG. 223.

Mais l'expression de l'ordonnée z du point M est :

$$z = a(1 - \cos \alpha) = 2a \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2a \left(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right);$$

par suite :

$$z = 2a - \frac{s^2}{8a}, \quad z_0 = 2a - \frac{s_0^2}{8a};$$

s_0 désigne la longueur de l'arc BM_0 . L'équation des forces vives donne donc :

$$V^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = 2g(z - z_0) = g \frac{s_0^2 - s^2}{4a},$$

d'où l'on déduit comme précédemment, avec le signe —,

$$dt = -2 \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}}.$$

L'intégration peut être effectuée, et l'on trouve :

$$t = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \arccos \frac{s}{s_0},$$

et en explicitant par rapport à s :

$$s = s_0 \cos \sqrt{\frac{g}{a}} \frac{t}{2}.$$

Le mouvement consiste encore en une série d'oscillations isochrones allant de M_0 en M_1 et inversement ; si l'on cherche, comme plus haut, la durée T de l'oscillation, on obtient :

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Cette durée étant indépendante de l'arc s_0 , on voit que le pendule cycloïdal réalise un mouvement *tautochrone*, c'est-à-dire que la durée des oscillations est rigoureusement indépendante de leur amplitude. Différents mobiles, partis au même instant, sans vitesse initiale, de divers points de la courbe, atteindraient au même instant le point le plus bas B. Cette remarquable propriété a été découverte par Huyghens, qui a également indiqué le moyen pratique de réaliser le pendule cycloïdal.

122. Courbes tautochrones. — Soit une courbe C qui contient une position O d'équilibre stable pour un mobile M ; plaçons ce dernier en M_0 et abandonnons-le sans vitesse à l'action de la force F. Si le temps que met le mobile à atteindre le point O est indépendant de la position initiale M_0 , on dit que la courbe C est tautochrone pour la force F.

On ne recherche guère les tautochrones que pour la pesanteur.

Supposons que la courbe soit plane ; quand elle est gauche, on obtient le même mouvement en développant sur un plan le cylindre qui la projette horizontalement.

Prenons le point O pour origine ; le théorème de la force vive donne, en appelant $2gh$ la constante :

$$V^2 = 2g(h - z),$$

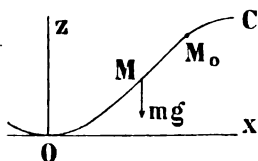


FIG. 224.

ce que l'on peut écrire :

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2g(h - z).$$

Appelons $s = f(z)$ l'équation inconnue de la courbe C que l'on veut déterminer ; on a $ds = f'(z) dz$, et l'équation précédente donne en intégrant :

$$\sqrt{2g} t = - \int_0^h \frac{f'(z) dz}{\sqrt{h - z}}. \quad (1)$$

Pour satisfaire aux conditions du problème, il faut que cette intégrale soit indépendante de h , car la valeur de cette constante dépend de la position du point M_0 ; ainsi on doit avoir $\frac{dt}{dh} = 0$. Mais, comme la limite supérieure de l'intégrale dépend de h , on ne peut appliquer les règles de la différentiation sous le signe \int . Changeons de variable et posons $z = hu$; pour $z = 0$, $u = 0$; pour $z = h$, $u = 1$. On peut donc écrire :

$$\sqrt{2g} t = \int_0^1 \frac{f'(hu) \sqrt{h} du}{\sqrt{1 - u}};$$

d'où l'on déduit en différentiant par rapport à h :

$$\sqrt{2g} h \frac{dt}{dh} = \int_0^1 \frac{2f'(hu) hu + f'(hu)}{\sqrt{1 - u}} du,$$

c'est-à-dire :

$$\sqrt{2g} \frac{dt}{dh} = \int_0^h \frac{2zf'(z) + f'(z)}{\sqrt{h - z}} dz.$$

Cette intégrale devant être constamment nulle, on doit avoir $2zf'(z) + f'(z) = 0$; car on peut prendre h assez petit pour que l'expression $2zf'(z) + f'(z)$ conserve toujours le même signe ; et tous les éléments de l'intégrale étant de même signe, cette dernière ne pourrait être nulle si l'expression ci-dessus ne l'était pas.

Ainsi on a l'équation :

$$2zf''(z) + f'(z) = 0.$$

que l'on peut écrire :

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} + \frac{1}{2z} = 0.$$

L'intégration donne, en appelant LC la constante :

$$Lf'(z) + \frac{1}{2} Lz = LC,$$

d'où l'on tire $f(z) \sqrt{z} = C$, puis :

$$f'(z) = \frac{C}{\sqrt{z}}.$$

Intégrant une seconde fois, on obtient, en observant que l'on a posé $s = f(z)$:

$$s^2 = 4C^2 z.$$

C'est l'équation d'une cycloïde dont la concavité est tournée vers l'axe positif oz . Ainsi, dans le cas de la pesanteur, la cycloïde est la seule tautochrone plane.

Si dans l'équation (1) on remplace $f'(z)$ par sa valeur, on obtient pour le temps T mis par le mobile à atteindre la position O

$$\sqrt{2g} T = \int_0^h \frac{C dz}{\sqrt{z}(h-z)},$$

c'est-à-dire :

$$T = \frac{\pi \sqrt{C}}{\sqrt{2g}}.$$

123. Courbes brachistochrones. — Soit une courbe C et deux de ses points A et B ; un point mobile soumis à une force F doit se rendre du point A au point B en suivant la courbe: si ce mobile parcourt l'arc AB dans le *minimum de temps*, on dit que la courbe C est brachistochrone pour la force F .

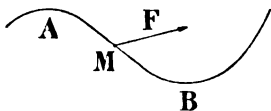


FIG. 225.

Supposons que le point soit simplement soumis à l'action de son poids, et qu'il parte de l'origine A sans vitesse initiale. On a l'équation de la force vive :

$$V^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = 2gz,$$

d'où l'on tire :

$$\sqrt{2g} dt = \frac{ds}{\sqrt{z}};$$

puis, en posant arc $AB = h$ et en intégrant :

$$\sqrt{2g} t = \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{z}}. \quad (1)$$

On peut voir d'abord que la brachistochrone est une courbe plane; en effet, projetons cette courbe sur le plan des xx ; pour chacun des

éléments d'arc ds' de la nouvelle courbe, on a $ds' \leq ds$; or tous les éléments de l'intégrale (1) sont positifs, et, si l'on remplace ds par ds' , l'intégrale sera plus petite; donc, pour que t soit minimum, il faut que la courbe soit plane.

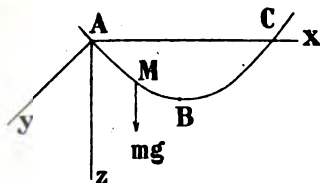


FIG. 226.

Supposons que la courbe soit tracée dans le plan des xz , et appelons x' la dérivée de x par rapport à z ; on a $ds = \sqrt{1 + x'^2} dz$, et :

$$\sqrt{2g} t = \int_0^h \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{\sqrt{z}} dz.$$

Mais, si l'on a une fonction de la forme $V(z, x, x')$, on sait d'après le calcul des variations que, pour que l'intégrale correspondante soit minimum, il faut que l'on ait :

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial V}{\partial x'} \right) = 0.$$

Dans le cas présent, on a :

$$V = \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{\sqrt{z}}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x'} = \frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}};$$

de sorte que l'équation différentielle de la brachistochrone est :

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} \right) = 0,$$

ou bien, en intégrant et appelant C la constante :

$$\frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} = C \sqrt{z};$$

enfin :

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{\frac{z}{\frac{1}{C^2} - z}}.$$

Cette équation différentielle est celle d'une cycloïde dont le point de rebroussement est à l'origine A . Ainsi la cycloïde est la seule brachistochrone plane pour la pesanteur.

124. Mouvement d'un point sur une surface fixe. — Lorsqu'un point matériel est assujéti par ses liaisons à glisser sans frottement sur une surface fixe, on peut encore

appliquer à ce point les équations du mouvement d'un point libre, à condition d'ajouter à la résultante des forces qui agissent sur lui la *réaction normale* de la surface. Pendant la durée du mouvement, cette réaction est à chaque instant égale et contraire à la pression exercée par le point sur la surface.

Le théorème de la force vive s'étend au mouvement sur une surface, car le travail de la réaction normale est nul, puisque cette force est normale à la trajectoire du point.

Dans le cas, assez fréquent, où le point mobile n'est sollicité que par la réaction de la surface et par une force rencontrant un axe fixe, le théorème des aires est applicable à la projection du mouvement sur un plan perpendiculaire à cet axe.

Soit AMB la trajectoire que le mobile décrit sous l'action de la force F et de la réaction normale N . Décomposons la force F en deux autres F_t et F_n , l'une tangente et l'autre normale à la trajectoire. Les deux forces F_n et N

se composent en une seule, dirigée suivant la normale principale MC à la trajectoire au point M , et l'on a :

$$m \frac{dV}{dt} = F_t, \quad \frac{mV^2}{\rho} = F_n \cos \alpha + N \cos \theta,$$

en appelant α l'angle des deux normales MH et MC , θ l'angle de la normale principale MC avec la normale à la surface MN , et ρ le rayon de courbure de la trajectoire en M .

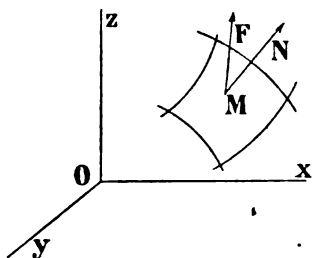


FIG. 227.

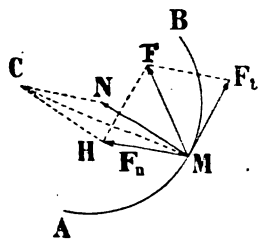


FIG. 228.

Si l'on projette toutes les forces sur la normale MN, on obtient, en appelant F_m la projection de F ,

$$\frac{mV^2}{\rho} \cos \theta = F_m + N,$$

d'où l'on tire pour la réaction normale N :

$$N = \frac{mV^2}{\rho} \cos \theta - F_m.$$

D'autre part, le théorème de Meusnier sur la courbure des lignes d'une surface donne $\rho = R \cos \theta$; par suite, on a :

$$N = \frac{mV^2}{R} - F_m;$$

R représente le rayon de courbure de la section normale de la surface au point M .

Lorsque la force F est nulle, il en est de même de F_t , F_n , F_m , et l'on a $V = V_0 = \text{conste}$; dans ce cas, la direction MC se confond avec MN , le plan osculateur à la trajectoire au point M contient la normale à la surface, et la trajectoire est la ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur cette surface entre deux quelconques de ses points, c'est une *ligne géodésique* de la surface. Comme on a :

$$\frac{mV^2}{R} = \frac{mV_0^2}{R} = N,$$

on voit que la réaction normale est en chaque point inversement proportionnelle au rayon R .

La conclusion serait identique si la composante F_n était nulle sans que F_t le soit, c'est-à-dire si la force F était dirigée suivant la tangente à la trajectoire.

125. Pendule sphérique. — Ce pendule est réalisé par un point matériel pesant M , qui se meut sur une sphère; on l'appelle quelquefois *pendule conique*.

Appelons : l , le rayon de la sphère de centre O ; r et θ , les coordonnées polaires du point m projection de M sur le plan XOY . L'axe OZ est vertical et dirigé vers le bas dans le sens de la pesanteur, de sorte que le plan XOY est horizontal.

On a d'abord la relation :

$$r^2 + z^2 = l^2. \quad (1)$$

Le point M est soumis à l'action de son poids mg parallèle à OZ et à la réaction normale qui passe constamment par l'origine O; ces deux forces étant situées dans le plan MOZ, il n'y a aucune composante normale à ce plan, de sorte que le principe des aires est applicable au mouvement projeté sur le plan XOY. Ainsi on a :

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C, \quad C = V_0 r_0 \cos \alpha_0;$$

α_0 est l'angle que fait la direction de la vitesse initiale avec la perpendiculaire au plan MOZ.

L'intégrale des forces vives s'écrit :

$$V^2 - V_0^2 = 2g(z - z_0),$$

ou bien, en posant $h = V_0^2 - 2gz_0$:

$$V^2 = 2gz + h. \quad (2)$$

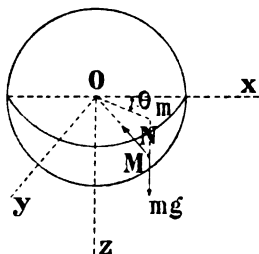


FIG. 229.

Mais, d'après l'expression de l'élément d'arc ds en coordonnées cylindriques, on peut écrire :

$$V^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}{dt^2} = 2gz + h;$$

or, $r^2 = l^2 - z^2$, par suite :

$$dr = \frac{-zdz}{\sqrt{l^2 - z^2}},$$

et d'autre part :

$$r \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r} = \frac{C}{\sqrt{l^2 - z^2}}.$$

L'équation (2) devient donc, d'après l'expression de V^2 et en éliminant r et θ :

$$l^2 \frac{dz^2}{dt^2} = (2gz + h)(l^2 - z^2) - C^2,$$

c'est-à-dire, en posant $(2gz + h)(l^2 - z^2) - C^2 = \varphi(z)$:

$$dt = \frac{l dz}{\pm \sqrt{\varphi(z)}}, \quad (3)$$

puis

$$d\theta = \pm \frac{C dz}{(l^2 - z^2) \sqrt{\varphi(z)}}. \quad (4)$$

L'équation (3) intégrée fait connaître la variation de z en fonction du temps, l'équation (4) détermine θ en fonction de z ; c'est-à-dire en fonction du temps; enfin l'équation (1) permet de calculer r d'après z . Ainsi les équations (1), (3), (4) déterminent complètement le mouvement du point M.

Si la vitesse initiale V_0 tend à faire croître z , l'équation (2) montre qu'il faut prendre le signe +; on prendra le signe - si la vitesse initiale tend à faire décroître z ; d'ailleurs il faut prendre le même signe devant (3) et (4).

Comme z ne peut prendre que des valeurs qui rendent $\varphi(z)$ positive, étudions la fonction $\varphi(z)$; on observe d'abord que $\varphi(z_0) > 0$, car sans cela le mouvement initial serait impossible. On a d'autre part :

$$\varphi(z_0) = (2gz_0 + V_0^2 - 2gz_0)(l^2 - z_0^2) - (l^2 - z_0^2)V_0^2 \cos^2 \alpha_0,$$

c'est-à-dire :

$$\varphi(z_0) = V_0^2 \sin^2 \alpha_0.$$

Donnons à z les valeurs :

$$-\infty, \quad -l, \quad z_0, \quad +l, \quad +\infty;$$

il en résulte pour la fonction $\varphi(z)$ les signes correspondants :

$$+, \quad -, \quad +, \quad -, \quad -;$$

de sorte que l'équation $\varphi(z) = 0$ admet trois racines γ, β, α ; la première est négative et comprise entre $-\infty$ et $-l$; elle ne donne aucun point de la sphère; la seconde β est positive ou négative et comprise entre $-l$ et z_0 ; la troisième α , toujours positive, est comprise entre z_0 et $+l$.

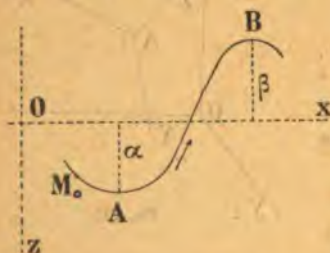


FIG. 230.

Supposons, pour fixer les idées, que l'ordonnée z croisse; alors le point M commence par descendre jusqu'à ce que z prenne la valeur α , puis il remonte jusqu'à ce que z soit égal à β ; il redescend ensuite jusqu'à $z = \alpha$, et ainsi de suite. Dans ce cas, la trajectoire présente la forme indiquée sur la figure. Aux points A et B où le mouvement vertical change de sens, la tangente à la courbe est horizontale, car $\frac{dz}{dt}$ est nulle sans que $\frac{d\theta}{dt}$ le soit.

On pourrait compléter la question en étudiant la projection de la trajectoire sur le plan des xy , puis en recherchant la condition pour que cette trajectoire soit un cercle horizontal, et enfin en

examinant le cas des petites oscillations autour de la verticale, pour lequel la projection horizontale de la trajectoire est une ellipse. Mais nous n'insisterons pas davantage sur ces questions purement théoriques.

Le calcul de réaction normale est facile ; on a :

$$N = \frac{mV^2}{R} - F_m;$$

actuellement :

$$R = l, \quad V^2 = 2gz + h, \quad F_m = -\frac{mgz}{l};$$

par suite :

$$N = \frac{m}{l} (3gz + h).$$

126. Mouvement relatif d'un point. — Reprenons le problème du mouvement relatif d'un point M et soient à un instant donné : J, J_r , J_e , J' , les accélérations absolue, relative, d'entraînement et complémentaire de ce point.

On a établi au paragraphe 31 la relation de Coriolis :

$$(J) = (J_r) + (J_e) + (J');$$

multipliant les deux membres par la masse m du point, il vient :

$$m(J) = m(J_r) + m(J_e) + m(J');$$

isolant le terme $m(J_r)$ dans le premier membre, cette relation s'écrit :

$$m(J_r) = m(J) - m(J_e) - m(J').$$

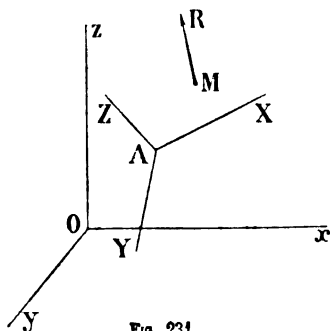


Fig. 231.

Si le point M est soumis à des forces ayant pour résultante R, on a $R = mJ$, de sorte que :

$$m(J_r) = (R) - m(J_e) - m(J');$$

cette équation, équivalente à trois autres obtenues en projetant le mouvement sur les trois axes mobiles AXYZ, constitue l'équation générale du mouvement relatif du point M. On voit par là que les équations du mouvement relatif d'un

point sont les mêmes que les équations de son mouvement absolu, à condition d'ajouter aux forces qui agissent réellement sur ce point deux forces fictives : l'une — mJ_c que l'on nomme *force centrifuge*, l'autre — mJ' appelée *force centrifuge composée*.

127. Équilibre relatif d'un point. — Un point matériel est en équilibre relatif lorsque sa vitesse et son accélération relatives sont nulles; alors $V_r = 0$, $J_r = 0$, $J' = 0$, car J' est nulle en même temps que V_r .

On a donc pour l'équilibre relatif :

$$mJ_c = R;$$

c'est-à-dire que la résultante des forces appliquées au point matériel doit être égale et directement opposée à sa force d'inertie d'entraînement.

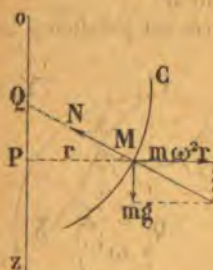


FIG. 232.

Cherchons, par exemple, les positions d'équilibre relatif d'un point pesant M placé sur une courbe plane C qui tourne avec une vitesse uniforme ω autour d'un axe vertical oz situé dans son plan.

Il faut et il suffit, pour que l'équilibre relatif soit réalisé, que la résultante du poids mg du point et de la réaction normale N de la courbe sur ce point soit égale et opposée à la force centrifuge $m\omega^2r$, r désignant la distance variable du point M à l'axe de rotation; ou encore que la résultante des forces mg et $m\omega^2r$ soit normale à la courbe C. Cette condition s'exprime par l'égalité :

$$\frac{PQ}{r} = \frac{mg}{m\omega^2r} = \frac{g}{\omega^2r}, \quad \text{d'où} \quad PQ = \frac{g}{\omega^2}.$$

Ainsi, les positions d'équilibre relatif correspondent aux points de la courbe C pour lesquels la sous-normale PQ est égale à $\frac{g}{\omega^2}$.

Si la courbe C est une parabole dont la sous-normale constante est égale à $\frac{g}{\omega^2}$, tous les points de cette courbe sont des positions d'équilibre relatif. Il résulte de là que la surface libre d'un liquide pesant dont toutes les molécules se meuvent autour d'un axe ver-

tical avec la même vitesse angulaire est un paraboloïde de révolution.

128. Mouvement relatif d'un point matériel à la surface de la terre. — Proposons-nous d'étudier le mouvement relatif d'un point matériel abandonné à l'action de la pesanteur et sans vitesse initiale dans le voisinage d'un point A de la surface terrestre, en tenant compte seulement de la rotation de la terre, rotation qui s'effectue, comme on sait, de l'ouest à l'est avec une vitesse angulaire constante.

Pour cela, rapportons le mouvement du point à trois axes mobiles AX, AY, AZ : le premier tangent au méridien du point A et dirigé vers le sud; le second tangent au parallèle du même point et dirigé vers l'est; le troisième perpendiculaire aux deux premiers, c'est-à-dire dirigé suivant la verticale du point A dans le sens de la pesanteur.

Le vecteur ω de la rotation de la terre est parallèle à la ligne des pôles PP' et les trois droites AX, ω , AZ sont situées dans le plan méridien du point A; l'angle ω AX est d'ailleurs égal à la latitude λ de ce point.

Reprenons l'équation du mouvement relatif :

$$m(J_r) = (R) - m(J_c) - m(J'),$$

et observons que le poids mg du point matériel est la résultante de l'attraction de la terre sur ce point et de la force centrifuge due à la rotation ω , c'est-à-dire que l'on a $(mg) = (R) - m(J_c)$.

En projetant le mouvement sur les axes mobiles, on obtient d'abord :

$$m \frac{d^2X}{dt^2} = -mJ_{x'}, \quad m \frac{d^2Y}{dt^2} = -mJ_{y'}, \quad m \frac{d^2Z}{dt^2} = mg - mJ_{z'};$$

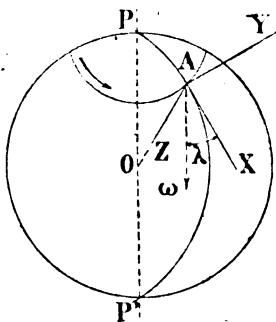


FIG. 233.

si p, q, r désignent les composantes de la rotation $A\omega$, on a d'autre part :

$$p = \omega \cos \lambda, \quad q = 0, \quad r = \omega \sin \lambda;$$

de sorte que le théorème de Coriolis donne :

$$J_x' = -2\omega \sin \lambda \frac{dY}{dt}, \quad J_y' = 2\omega \left(\sin \lambda \frac{dX}{dt} - \cos \lambda \frac{dZ}{dt} \right),$$

$$J_z' = 2\omega \cos \lambda \frac{dY}{dt}.$$

Les équations différentielles du mouvement du point sont donc, en supprimant le facteur m :

$$\frac{d^2X}{dt^2} = 2\omega \sin \lambda \frac{dY}{dt},$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = 2\omega \left(\cos \lambda \frac{dZ}{dt} - \sin \lambda \frac{dX}{dt} \right);$$

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = g - 2\omega \cos \lambda \frac{dY}{dt}.$$

Ces équations peuvent s'intégrer rigoureusement par la méthode de d'Alembert, ou simplement par différentiation et élimination ; mais, sans effectuer cette intégration, au sur-

plus peu utile, nous remarquerons que les composantes $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$ de la vitesse sont nécessairement faibles par rapport à $\frac{dZ}{dt}$, puisque le point tombe en chute libre sans vitesse initiale, et qu'approximativement on peut toujours écrire :

$$\frac{d^2X}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2Y}{dt^2} = 2\omega \cos \lambda \frac{dZ}{dt}, \quad \frac{d^2Z}{dt^2} = g.$$

Sous cette forme réduite, la troisième équation donne immédiatement, en observant que le point matériel est abandonné de l'origine A sans vitesse initiale :

$$\frac{dZ}{dt} = gt.$$

Remplaçant $\frac{dZ}{dt}$ par gt dans la seconde équation, elle devient :

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = 2\omega g \cos \lambda t,$$

et en intégrant deux fois de suite :

$$Y = \frac{\omega g \cos \lambda}{3} t^3.$$

Cette formule montre que la chute du point considéré ne s'effectue pas rigoureusement suivant la verticale AZ; il y a à chaque instant une *déviatiou vers l'est*, d'ailleurs assez faible, donnée par la coordonnée Y.

Dans les expériences faites par M. Reich à l'un des puits de Freiberg, on avait $\lambda = 51^\circ$; et, pour une chute $Z = 158^m,50$, on a trouvé $Y = 0^m,028$.

Les formules précédentes supposent le poids mg constant, c'est assez dire qu'elles ne sont vraies que pour le voisinage du point A, c'est-à-dire pour des valeurs de X, Y, Z très petites par rapport au rayon de la terre.

129. Équilibre relatif d'un point à la surface de la terre.

— Dans ce cas, il suffit de considérer la force d'inertie d'entraînement mJ_e dirigée suivant le rayon CA du parallèle du point, et l'attraction terrestre mG dirigée suivant le rayon AO de la terre supposée sphérique. On a d'ailleurs :

$$mJ_e = m\omega^2 \cdot AC = m\omega^2 R \cos \lambda.$$

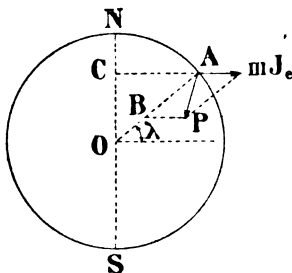


FIG. 234.

Prenons pour plan de la figure le méridien du point A, et observons encore que le poids apparent mg du point matériel considéré est la résultante de l'attraction terrestre et de la force mJ_e ; on voit que la direction de la pesanteur apparente en A, c'est-à-dire la direction de la verticale, est AP; elle ne passe pas par le centre O de la terre.

Au pôle, on a $\omega = 0$, et par suite $m\omega^2 R \cos \lambda = 0$; c'est-à-dire que le poids apparent est dirigé suivant NO.

A l'équateur, la force centrifuge $m\omega^2 r$, ou force d'inertie d'entraînement, est directement opposée à l'attraction, et l'on a :

$$mg = mG - m\omega^2 R,$$

c'est-à-dire :

$$g = G - \omega^2 R.$$

L'observation du pendule à l'équateur donne $g = 9,780$; d'ailleurs $\omega = 0,000073$, $R = 6.376$ kilomètres; on trouve alors :

$$G = 9,780 + 0,0338 = 9,814.$$

Le triangle ABP donne à une latitude λ :

$$\overline{AP}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BP}^2 - 2AB \cdot BP \cos \angle ABP,$$

c'est-à-dire, en remplaçant les côtés par leurs valeurs et supprimant le facteur m :

$$g^2 = G^2 + (\omega^2 R \cos \lambda)^2 - 2G\omega^2 R \cos^2 \lambda,$$

ce que l'on écrit d'une façon approchée :

$$g = G - \omega^2 R \cos^2 \lambda.$$

Connaissant G , on peut calculer g aux diverses latitudes; et cette formule montre qu'un corps de masse m a pour poids apparent, au pôle $p = mG$, et à l'équateur $p = m(G - \omega^2 R)$.

§ 2. — MOUVEMENT DES SYSTÈMES

130. Définitions. — Équations générales. — Un système est un ensemble de points matériels entre lesquels existent un certain nombre de liaisons; par exemple, si les distances des différents points restent invariables, le système est un corps solide.

Soient p points matériels M_1, M_2, \dots, M_p ; désignons par m_1 et x_1, y_1, z_1 , la masse et les coordonnées du premier rapportées à un système d'axes $oxyz$; par m_2 et x_2, y_2, z_2 , la masse et les coordonnées du second, ..., etc.; et, en général, par m

et x, y, z , la masse et les coordonnées de l'un quelconque M de ces points.

On peut considérer le point M comme soumis à deux groupes de forces : 1° les actions que les autres points du système exercent sur lui, ce sont les *forces intérieures* F_i ; 2° les forces qui agissent directement sur ce point, ce sont les *forces extérieures* F_e .

Les équations du mouvement du point M sont donc :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X_e + X_i, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y_e + Y_i, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z_e + Z_i; \quad (1)$$

X_e, Y_e, Z_e représentent les projections sur Ox, Oy, Oz de la résultante des forces extérieures; X_i, Y_i, Z_i , les projections de la résultante des forces intérieures.

En écrivant les équations analogues pour chacun des p points M_1, M_2, \dots, M_p du système, nous formerons $3p$ équations entre les $3p$ coordonnées des points et la variable indépendante t . On ne sait pas, en général, intégrer ces équations, et nous allons chercher quelques combinaisons plus facilement intégrables.

131. Théorème des quantités de mouvement. — La *quantité de mouvement* d'un point M à un instant donné est le produit mV de sa masse par sa vitesse à cet instant; on peut représenter cette quantité, à la manière des forces, par un vecteur MV , proportionnel au produit mV et coïncidant en direction avec la vitesse MV . Les projections sur les axes Ox, Oy, Oz de la quantité de mouvement sont :

$$m \frac{dx}{dt}, \quad m \frac{dy}{dt}, \quad m \frac{dz}{dt}.$$

Formons pour les p points du système les équations (1), il vient :

$$\begin{aligned} \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} &= \Sigma X_e + \Sigma X_i, \\ \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} &= \Sigma Y_e + \Sigma Y_i, \\ \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} &= \Sigma Z_e + \Sigma Z_i; \end{aligned} \quad (2)$$

le signe Σ s'étendant à tous les points. Or, d'après le principe de l'égalité entre l'action et la réaction, les forces intérieures sont deux à deux égales et directement opposées; par suite :

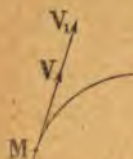


FIG. 235.

$$\Sigma X_i = 0, \quad \Sigma Y_i = 0, \quad \Sigma Z_i = 0;$$

observant, d'autre part, que l'on peut écrire :

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \Sigma m \frac{dx}{dt},$$

il en résulte, pour les équations (2), la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Sigma m \frac{dx}{dt} &= \Sigma X_e, & \frac{d}{dt} \Sigma m \frac{dy}{dt} &= \Sigma Y_e, \\ \frac{d}{dt} \Sigma m \frac{dz}{dt} &= \Sigma Z_e, \end{aligned} \quad (3)$$

qui montre que :

La dérivée par rapport au temps de la somme des projections des quantités de mouvement sur un axe quelconque est égale à la projection sur le même axe de toutes les forces extérieures.

132. Théorème de l'impulsion. — On donne quelquefois au théorème ci-dessus une forme un peu différente, qui conduit à la généralisation du théorème de l'impulsion (108). Intégrons les équations (3) entre les époques t_0 et t ; il vient :

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} - \Sigma m \left(\frac{dx}{dt} \right)_0 = \int_{t_0}^t \Sigma X_e dt,$$

$$\Sigma m \frac{dy}{dt} - \Sigma m \left(\frac{dy}{dt} \right)_0 = \int_{t_0}^t \Sigma Y_e dt,$$

$$\Sigma m \frac{dz}{dt} - \Sigma m \left(\frac{dz}{dt} \right)_0 = \int_{t_0}^t \Sigma Z_e dt.$$

Plus généralement, l'équation de la quantité de mouvement projetée sur l'axe considéré :

$$mV - mV_0 = \int_{t_0}^t F dt,$$

donne pour un des points du système :

$$mV - mV_0 = \int_{t_0}^t F_e dt + \int_{t_0}^t F_i dt;$$

et pour l'ensemble des p points :

$$\Sigma mV - \Sigma mV_0 = \Sigma \int_{t_0}^t F_c dt + \Sigma \int_{t_0}^t F_i dt,$$

ou encore, en intervertissant les signes Σ et \int :

$$\Sigma mV - \Sigma mV_0 = \int_0^t \Sigma F_c dt + \Sigma \int_{t_0}^t \Sigma F_i dt.$$

Mais, d'après ce qui a été dit plus haut, $\Sigma F_i dt = 0$; par suite, on peut écrire :

$$\Sigma mV - \Sigma mV_0 = \int_{t_0}^t \Sigma F_c dt.$$

Cette relation montre que, dans un système de points matériels en mouvement, l'accroissement de la somme des projections des quantités de mouvement sur un axe fixe quelconque est égal à la somme des impulsions totales pendant le même temps de toutes les forces extérieures projetées sur le même axe.

133. Théorème des moments des quantités de mouvement.

— Les équations des moments des quantités de mouvement s'établissent comme les précédentes en partant des groupes (1) et (2); on déduit immédiatement des équations (1) :

$$m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = yZ_c - zY_c + yZ_i - zY_i.$$

D'un autre côté, on a identiquement :

$$y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right),$$

de sorte que l'équation précédente peut s'écrire :

$$\frac{d}{dt} m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = yZ_c - zY_c + yZ_i - zY_i,$$

et pour tous les points du système :

$$\frac{d}{dt} \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = \Sigma (yZ_c - zY_c) + \Sigma (yZ_i - zY_i).$$

Comme les forces extérieures sont deux à deux égales et directement opposées, le dernier terme du second membre

s'annule, c'est-à-dire qu'il ne reste que le terme relatif à la somme des moments des forces extérieures.

On peut donc écrire pour les trois axes coordonnés :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) &= \Sigma (yZ_e - zY_e); \\ \frac{d}{dt} \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) &= \Sigma (zX_e - xZ_e); \\ \frac{d}{dt} \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) &= \Sigma (xY_e - yX_e).\end{aligned}\quad (4)$$

Ces équations font voir que la dérivée par rapport au temps de la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à un axe quelconque est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport à cet axe.

Lorsque la somme des moments de toutes les forces extérieures par rapport à un axe donné (OZ par exemple) est constamment nulle, on peut intégrer la dernière des équations (4) et obtenir :

$$\Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = C,$$

C désignant une constante ; mais l'expression $x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}$ représente le double de la dérivée par rapport au temps de l'aire $\Lambda \doteq mom'$, balayée par le rayon vecteur om de la projection m du point M sur le plan XOY ; on a donc :

$$2 \Sigma m \frac{d\Lambda}{dt} = C, \quad \text{et en intégrant} \quad 2. \Sigma m \Lambda = Ct + C',$$

C' désignant une seconde constante. Cette dernière équation montre que, lorsque la somme des moments des forces extérieures par rapport à un axe OZ est constamment nulle, — ce qui a lieu en particulier si toutes les forces concourent

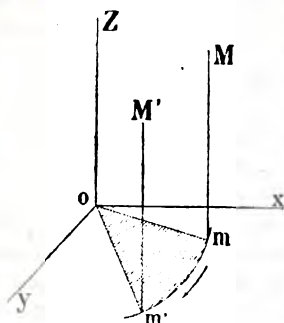


FIG. 236.

en un même point O de cet axe — la somme algébrique des aires balayées par les rayons vecteurs des projections des points sur un plan perpendiculaire à l'axe, multipliées par les masses respectives de chaque point, varie proportionnellement au temps.

On retrouve ainsi le *théorème des aires* étendu à un système quelconque de points et dont le théorème du paragraphe 109 n'est qu'un cas particulier.

134. Mouvement du centre de gravité. — Désignons par M la masse totale du système, c'est-à-dire la somme des masses des points matériels qui le composent, et soient ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité de ce système; on a (89) :

$$M = \Sigma m, \quad M\xi = \Sigma mx, \quad M\eta = \Sigma my, \quad M\zeta = \Sigma mz; \quad (a)$$

différentiant deux fois de suite et combinant les relations obtenues avec les équations (3), il en résulte les formules :

$$M \frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma X_e, \quad M \frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma Y_e, \quad M \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma Z_e, \quad (b)$$

qui montrent que le centre de gravité du système se meut comme si toute la masse y était concentrée, et comme si toutes les forces y étaient transportées parallèlement à elles-mêmes.

Le centre de gravité d'un système déformable est, par définition, le point dont les coordonnées ξ, η, ζ sont déterminées par les formules (a), ce point étant matérialisé par la pensée.

Lorsqu'il n'y a pas de forces extérieures, le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme; si au début du mouvement ce point est au repos, il y restera indéfiniment; par exemple, en ne tenant pas compte de la masse de la poudre dans un canon, et en désignant par x, x' les espaces parcourus par le canon et par le boulet, on a, puisqu'il n'existe que des forces intérieures,

$$Mx - mx' = 0, \quad \text{d'où} \quad M \frac{dx}{dt} = m \frac{dx'}{dt};$$

par suite :

$$V = \frac{m}{M} V';$$

la masse M du canon étant notablement supérieure à celle m du boulet, sa vitesse sera sensiblement moindre.

135. Théorème des forces vives. — Reprenons les équations (1) :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X_e + X_i, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y_e + Y_i, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z_e + Z_i,$$

et formons sur ces équations la combinaison des forces vives, il vient :

$$d. \frac{1}{2} m V^2 = (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz) + (X_i dx + Y_i dy + Z_i dz);$$

passant à tous les points du système, on peut écrire :

$$d. \frac{1}{2} \Sigma m V^2 = \Sigma (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz) + \Sigma (X_i dx + Y_i dy + Z_i dz).$$

Si l'on intègre entre deux valeurs t_0 et t du temps, et si l'on désigne par V_0 la valeur de V à l'époque t_0 , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma m V^2 - \frac{1}{2} \Sigma m V_0^2 &= \int_{t_0}^t \Sigma (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz) \\ &+ \int_{t_0}^t \Sigma (X_i dx + Y_i dy + Z_i dz). \end{aligned} \quad (6)$$

Or, $\Sigma m V^2$ est la *force vive totale* du système, c'est-à-dire la somme des forces vives de tous ses points à un instant donné; on peut donc énoncer le théorème des forces vives :

La variation de la demi-force vive totale d'un système quelconque pendant un temps donné est égale à la somme des travaux des forces, tant intérieures qu'extérieures, qui agissent sur les différents points du système pendant ce temps.

Il arrive souvent, dans les applications ordinaires de la mécanique, que les travaux des forces intérieures se détruisent; c'est ce qui a lieu en particulier lorsque le système est un solide invariable et, en général, quand les déplacements des différents points se font conformément à leurs liaisons; l'équation précédente devient alors :

$$\frac{1}{2} \Sigma m V^2 - \frac{1}{2} \Sigma m V_0^2 = \int_{t_0}^t \Sigma (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz). \quad (7)$$

Cas de la pesanteur. — Considérons, par exemple, un système matériel dont tous les points sont uniquement soumis à l'action de la pesanteur. On a pour un point M :

$$\frac{1}{2} m V^2 - \frac{1}{2} m V_0^2 = - m g (z - z_0),$$

et pour tous les points du système :

$$\frac{1}{2} \Sigma m V^2 - \frac{1}{2} \Sigma m V_0^2 = - g (\Sigma m z - \Sigma m z_0).$$

Mais, si ζ et ζ_0 représentent les ordonnées du centre de gravité du système aux époques t et t_0 , on a :

$$\Sigma m z = M \zeta, \quad \Sigma m z_0 = M \zeta_0;$$

de sorte que l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{1}{2} \Sigma m V^2 - \frac{1}{2} \Sigma m V_0^2 = - M g (\zeta - \zeta_0); \quad (8)$$

elle signifie que la demi-variation de la force vive totale du système, pendant un temps donné, s'obtient en multipliant le poids du système par la quantité dont s'est abaissé son centre de gravité.

136. Théorème de Koëinig. — Le théorème des forces vives, comme celui des moments des quantités de mouvement, est encore vrai dans le mouvement relatif du système autour de son centre de gravité, et l'on pourrait établir avec Koëinig les formules :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma m V^2 &= \frac{1}{2} M W^2 + \frac{1}{2} \Sigma m V_r^2, \quad (9) \\ &+ d. \frac{1}{2} \Sigma m V_r^2 \\ &= \Sigma (X_i dX + Y_i dY + Z_i dZ) \\ &+ \Sigma (X_i dX + Y_i dY + Z_i dZ), \end{aligned}$$

W désignant la vitesse absolue du centre de gravité G , V_r la vitesse du point M dans son mouvement relatif par rapport à un système d'axes mobiles GX, GY, GZ , entraînés parallèlement à eux-mêmes avec le point G ; ainsi :

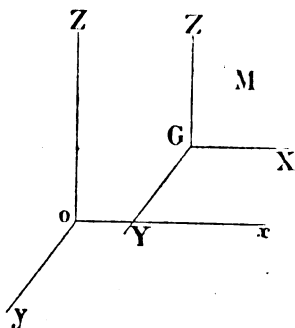


FIG. 237.

1° La force vive totale d'un système matériel quelconque est la somme de la force vive de son centre de gravité, où l'on supposerait toute la masse réunie, et de la force vive totale dont le système est animé dans son mouvement relatif par rapport à son centre de gravité;

2° L'équation des forces vives subsiste complètement lorsque au lieu d'évaluer la force vive du système et le travail des forces dans le mouvement absolu du système, on les évalue dans son mouvement relatif autour de son centre de gravité.

137. Principe de la conservation de l'énergie. — Le plus souvent les forces intérieures F_i ne dépendent que des distances relatives des points du système, et l'expression

$$\Sigma (X_i dx + Y_i dy + Z_i dz)$$

est la différentielle totale d'une fonction $U(x, y, z)$ des coordonnées de ces points, c'est-à-dire qu'il existe une fonction des forces intérieures (112); alors :

$$\Sigma (X_i dx + Y_i dy + Z_i dz) = dU,$$

et :

$$\int \Sigma (X_i dx + Y_i dy + Z_i dz) = (U - U_0),$$

U_0 étant la valeur que prend la fonction U au temps t_0 ; l'équation (6) des forces vives peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{2} \Sigma m V^2 - \frac{1}{2} \Sigma m V_0^2 = \int_{t_0}^t \Sigma (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz) + (U - U_0),$$

ou encore :

$$\left(\frac{1}{2} \Sigma m V^2 - U \right) - \left(\frac{1}{2} \Sigma m V_0^2 - U_0 \right) = \int_{t_0}^t \Sigma (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz).$$

Si, à un instant donné, on appelle avec Rankine : *énergie potentielle* d'un système, la valeur de la fonction $-U$; *énergie actuelle* de ce système, la quantité $\frac{1}{2} \Sigma m V^2$; la somme de ces deux quantités sera l'*énergie totale* du système. L'équation précédente montre alors que :

Dans tout système de points matériels en mouvement, la variation de l'énergie totale pendant un temps donné est égale à la somme des travaux des forces extérieures pendant le même temps.

Lorsque le système considéré est soustrait à l'action de toute force extérieure, le second membre de la dernière équation est nul, de sorte que l'on a :

$$\frac{1}{2} \Sigma m V^2 - U = \frac{1}{2} \Sigma m V_0^2 - U_0,$$

et, comme le second membre de cette égalité est constant, il en résulte que l'énergie totale d'un système matériel soustrait à l'action de toute force extérieure est invariable.

C'est en cela que consiste le principe de la conservation de l'énergie totale, dont les applications sont nombreuses en thermodynamique.

§ 3. — MOMENTS D'INERTIE

138. Définitions. — Si l'on considère un plan, une droite ou un point, le *moment d'inertie* d'un corps sera la quantité $\Sigma m r^2$, r représentant la distance au plan, à la droite ou au point, d'un point quelconque M du corps, le signe Σ s'étendant à tous les points de ce corps.

Soit M la masse totale du corps; en posant :

$$MK^2 = \Sigma m r^2,$$

K sera le *rayon de giration* du système.

Les moments d'inertie s'introduisent dans les calculs, principalement dans l'application du théorème des forces vives aux corps solides.

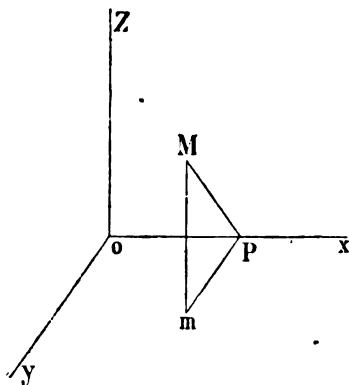


FIG. 238.

Les moments d'inertie par rapport aux plans coordonnés sont évidemment :

$$\begin{aligned} \Sigma m r^2 & \text{ par rapport au plan YOZ ;} \\ \Sigma m y^2 & \text{ " " ZOY ;} \\ \Sigma m z^2 & \text{ " " XOY.} \end{aligned}$$

Les moments d'inertie par rapport aux trois axes rectangulaires sont :

$$\begin{aligned} \Sigma m (y^2 + z^2) & \text{ par rapport à l'axe OX ;} \\ \Sigma m (z^2 + x^2) & \text{ " " OY ;} \\ \Sigma m (x^2 + y^2) & \text{ " " OZ ;} \end{aligned}$$

car le carré de la distance MP d'un point M (x, y, z) à l'axe OX est :

$$\overline{MP}^2 = \overline{mP}^2 + \overline{Mm}^2 = y^2 + z^2.$$

Enfin, le moment d'inertie du corps par rapport à l'origine O est :

$$\Sigma m (x^2 + y^2 + z^2).$$

CONSEQUENCES. — 1° Le moment d'inertie par rapport à un axe est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans rectangulaires passant par cet axe ;

2° Le moment d'inertie par rapport à un point est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à trois plans rectangulaires passant par ce point.

139. Calcul des moments d'inertie. — Les exemples suivants, indiqueront suffisamment la marche qu'il convient d'adopter pour évaluer les moments d'inertie des corps solides.



Fig. 239

1° Moment d'inertie d'une sphère homogène par rapport à son centre.

La masse m d'une couche de matière d'épaisseur infiniment petite dr avoisinant la surface est :

$$m = \rho dV = 4\pi \rho r^2 dr,$$

ρ désignant la densité de la sphère. On a donc pour le

moment d'inertie de cette couche: $mr^2 = 4\pi\rho r^4 dr$, et pour toute la sphère:

$$\Sigma mr^2 = 4\pi\rho \int_0^r r^4 dr = \frac{4}{5} \pi\rho r^5.$$

La masse totale de la sphère étant égale à:

$$M = \frac{4}{3} \pi\rho r^3,$$

on a :

$$K^2 = \frac{3}{5} r^2.$$

2° *Moment d'inertie d'un parallépipède rectangle homogène par rapport à une de ses arêtes.*

Cherchons le moment d'inertie par rapport à l'arête Oz, et, pour cela, calculons les moments d'inertie par rapport aux deux plans ZOY et ZOX; il suffira d'en faire la somme.

La masse m d'une couche de matière d'épaisseur infiniment petite dx étendue derrière la face ABCD est:

$$m = \rho bcdx,$$

b et c désignant les dimensions CD et CB du parallépipède; on a donc pour le moment d'inertie de cette couche par rapport au plan

ZOY: $mx^2 = \rho bcx^2 dx$, et pour tout le parallépipède :

$$\Sigma mx^2 = \rho bc \int_0^a x^2 dx = \rho bc \frac{a^3}{3}.$$

a désignant la longueur de l'arête OC. On trouverait de même pour le moment d'inertie par rapport au plan ZOX :

$$\Sigma my^2 = \rho ac \frac{b^3}{3}.$$

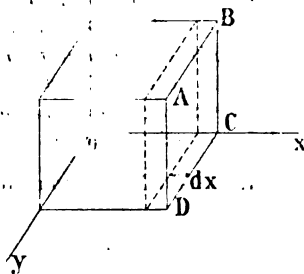


FIG. 210.

Le moment d'inertie du parallélépipède par rapport à OZ est donc :

$$MK^2 = \rho bc \frac{a^3}{3} + \rho ac \frac{b^3}{3} = \rho abc \frac{a^2 + b^2}{3};$$

comme

$$M = \rho abc, \quad \text{on a} \quad K^2 = \frac{a^2 + b^2}{3}.$$

3° *Moment d'inertie d'un solide de révolution homogène par rapport à son axe.*

Dans le cas d'un cylindre droit, on a pour la masse m d'une couche d'épaisseur infiniment petite dr avoisinant la surface latérale :

$$m = 2\pi r dr H,$$

r désignant le rayon de la section droite du cylindre, H sa



FIG. 241.

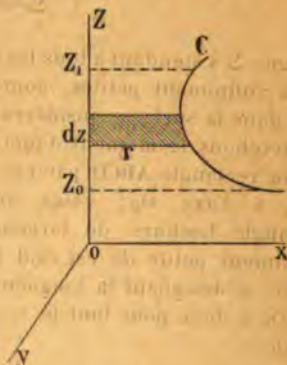


FIG. 242.

hauteur; on trouve ensuite comme plus haut :

$$mr^2 = 2\pi r^3 dr H, \quad \Sigma mr^2 = 2\pi H \int_0^r r^3 dr = \pi H \frac{r^4}{2}.$$

Comme

$$M = \pi r^2 H, \quad \text{on a} \quad K^2 = \frac{r^2}{2}.$$

Dans le cas de la surface de révolution engendrée par la courbe C tournant autour de OZ, on peut considérer le petit élément de volume engendré par le trapèze hachuré, de hauteur dz , comme un cylindre droit; alors, d'après ce qui précède,

$$mr^2 = \pi \rho \frac{r^4}{2} dz,$$

et pour tout le solide :

$$\Sigma mr^2 = \frac{\pi \rho}{2} \int_{z_0}^{z_1} r^4 dz = \frac{\pi \rho}{2} \int_{z_0}^{z_1} r^4 \varphi(r) dr,$$

$z = \varphi(r)$ étant l'équation de la surface de révolution.

4° *Moment d'inertie d'une surface plane homogène par rapport à une droite de son plan.* On nomme ainsi la somme :

$$\Sigma r^2 dz,$$

le signe Σ s'étendant à tous les éléments d'aire dz , de dimensions infiniment petites, compris dans la surface considérée.

Cherchons le moment d'inertie du rectangle ABCO par rapport à l'axe Oy; celui du rectangle hachuré de largeur infiniment petite dx est égal à $ax^2 dx$, a désignant la longueur BC. On a donc pour tout le rectangle :

$$\Sigma r^2 dz = a \int_0^b x^2 dx = \frac{ab^3}{3},$$

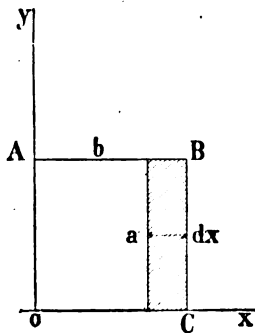


FIG. 243.

b représentant la longueur AB.

Cherchons encore le moment d'inertie de l'ellipse AA'BB' par rapport à l'axe Oy; il suffit évidemment de calculer celui du secteur AOB et de quadrupler le résultat.

On a pour l'ordonnée MP = y :

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2};$$

et le moment d'inertie du trapèze curviligne hachuré de hauteur infiniment petite dx est :

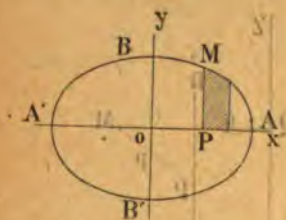


Fig. 214.

$$\frac{b}{a} x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx,$$

d'où pour l'ellipse entière :

$$\Sigma r^2 dz = 4 \frac{b}{a} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Pour intégrer, posons $x = a \sin \varphi$, d'où $dx = a \cos \varphi d\varphi$;

il vient :

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^4}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cdot d.2\varphi = \frac{a^4}{8} \left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{16} ;$$

donc :

$$\Sigma r^2 dz = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

Comme l'aire totale de l'ellipse est πab , on doit avoir :

$$K^2 \pi ab = \frac{\pi a^3 b}{4} ;$$

le rayon de giration est donc :

$$K^2 = \frac{a^2}{4}, \quad \text{ou} \quad K = \frac{a}{2}.$$

140. THÉOREME. — Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie par rapport à l'axe parallèle passant par son centre de gravité, augmenté du produit de la masse totale du corps par le carré de la distance des deux axes.

Soit AB un axe quelconque ; rapportons la position du corps à trois axes GX, GY, GZ , passant par son centre de gravité G , GZ étant parallèle à AB .

α et β désignent les coordonnées du point A, p et q les
respectives d'un

(x, y, z) du corps
parallèles AB et
distance de ces deux
a :

$$- \alpha^2 + (y - \beta)^2 \\ + y^2 + \alpha^2 + \beta^2 \\ - 2\alpha x - 2\beta y,$$

$$+ \alpha^2 - 2\alpha x - 2\beta y;$$

à tous les points
ps, il vient :

$$= \Sigma m q^2 + \alpha^2 \Sigma m \\ - 2\alpha \Sigma m x - 2\beta \Sigma m y;$$

l'axe GZ passant par le centre de gravité, on a :

$$\Sigma m x = 0, \quad \Sigma m y = 0, \quad \Sigma m = M;$$

conséquent :

$$\Sigma m p^2 = \Sigma m q^2 + M \alpha^2.$$

Ellipsoïde d'inertie. — Proposons-nous de calculer le
moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe OP passant
l'origine O et défini par ses trois angles direc-
 α, β, γ .

Soient toujours x, y, z les coordonnées d'un point quel-
conque M du corps et p la distance MI de ce point à OP. On
considère le triangle rectangle OIM :

$$p^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \overline{OI}^2;$$

le théorème des projections donne :

$$OI = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma;$$

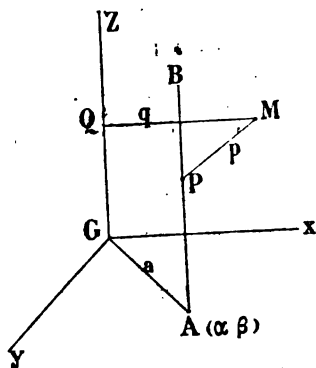


Fig. 245.

par suite :

$$p^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2,$$

ce que l'on peut écrire :

$$p^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2$$

ou encore en développant :

$$p^2 = (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma \\ - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \alpha \cos \gamma - 2xy \cos \alpha \cos \beta.$$

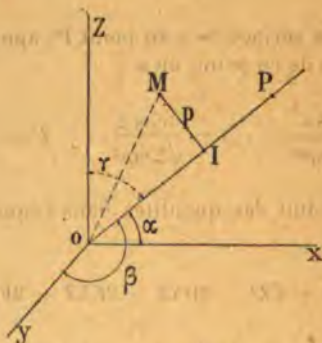


FIG. 246.

Passant à tous les points du corps, il vient :

$$\Sigma m p^2 = \cos^2 \alpha \cdot \Sigma m (y^2 + z^2) + \cos^2 \beta \cdot \Sigma m (z^2 + x^2) + \cos^2 \gamma \cdot \Sigma m (x^2 + y^2) \\ - 2 \cos \beta \cos \gamma \Sigma m yz - 2 \cos \alpha \cos \gamma \Sigma m zx - 2 \cos \alpha \cos \beta \Sigma m xy.$$

On a l'habitude de poser :

$$\begin{aligned} A &= \Sigma m (y^2 + z^2); & D &= \Sigma m yz; \\ B &= \Sigma m (z^2 + x^2); & E &= \Sigma m zx; \\ C &= \Sigma m (x^2 + y^2); & F &= \Sigma m xy. \end{aligned}$$

Alors l'expression du moment d'inertie s'écrit :

$$(1) \quad \Sigma m p^2 = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma \\ - 2D \cos \beta \cos \gamma - 2E \cos \alpha \cos \gamma - 2F \cos \alpha \cos \beta.$$

importe d'observer que, pour un système d'axes donnés Z, A, B, \dots, F sont des constantes dépendant uniquement de la forme et de la position du corps; on peut aussi remarquer que A, B, C représentent respectivement les moments d'inertie de ce corps par rapport à OX, OY, OZ (138). Pour se rendre compte de la façon dont varie la quantité OP lorsque l'axe OP tourne autour du point O , il est commode de prendre sur cet axe une longueur variable :

$$OP = \frac{1}{\sqrt{\sum mp^2}},$$

pour chercher la surface lieu du point P ; appelant X, Y, Z , les coordonnées de ce point, on a :

$$X = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\sum mp^2}}, \quad Y = \frac{\cos \beta}{\sqrt{\sum mp^2}}, \quad Z = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{\sum mp^2}};$$

l'on introduit ces quantités dans l'équation (1), elle devient :

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EXZ - 2FGXY = 1.$$

Cette équation, qui est celle d'une surface du second degré rapportée à son centre, représente dans notre cas un ellipsoïde; on l'appelle avec Poinsoit l'*ellipsoïde d'inertie* du corps rapporté au point O ; si ce point se confond avec le centre de gravité du corps, on a l'*ellipsoïde central d'inertie*.

Sait par la géométrie analytique que tout ellipsoïde peut être représenté par un système de trois diamètres rectilignes et rectangulaires passant par son centre, ce sont les axes principaux de la surface. Dans le cas de l'ellipsoïde d'inertie, ces axes s'appellent *axes principaux d'inertie* du corps; les moments d'inertie par rapport aux axes principaux sont les *moments principaux* du même corps.

2. **Mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe.** — Soit l'axe fixe pour axe OZ ; la position du corps sera

évidemment connue, à chaque instant si, pour ses différents points, l'angle θ est exprimé par une fonction connue du temps.

Le corps étant soumis à des forces extérieures déterminées, appliquons le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe OZ ; on a (131) :

$$\frac{d}{dt} \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \Sigma (xY_e - yX_e),$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\frac{d}{dt} \Sigma mr^2 \frac{d\theta}{dt} = (xY_e - yX_e);$$

introduisons la vitesse angulaire

ω commune à tous les points du corps et définie par la relation $\omega = \frac{d\theta}{dt}$; l'équation devient :

$$\Sigma mr^2 \frac{d\omega}{dt} = \Sigma (xY_e - yX_e),$$

d'où :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma (xY_e - yX_e)}{\Sigma mr^2}.$$

A chaque instant, la dérivée de la vitesse angulaire par rapport au temps est égale à la somme des moments des forces appliquées au solide par rapport à l'axe de rotation, divisée par le moment d'inertie du solide par rapport au même axe.

Comme $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$, il en résulte que l'équation précédente peut encore s'écrire :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\Sigma (xY_e - yX_e)}{\Sigma mr^2}.$$

Il importe de bien observer, pour l'application de cette for-



Fig. 217.

ue, lorsqu'on forme les moments des forces par rap-
 axe de rotation, il faut toujours les affecter d'un signe
 e moment soit positif s'il tend à faire augmenter θ ,
 dans le cas contraire.

tion. — Étudions, par exemple, le mouvement d'un corps
 ujeté à tourner autour d'un axe fixe OZ, et dont tous
 s sont attirés proportionnellement à la distance par un
 A de l'axe OX.

OA = a ; on trouve im-
 ent pour les compo-
 la force d'attraction sur

M (x, y, z) du corps :

$X_e = -m\mu(x-a)$, $Y_e = -m\mu y$,

$-yX_e = -m\mu ay$;

e une constante d'attrac-

ion du mouvement du
 donc :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\mu a \Sigma my}{\Sigma mr^2}.$$

θ_1 sont les coordonnées polaires de la projection g du
 gravité du corps sur le plan XOY, on a d'autre part (134):

$$\eta = r_1 \sin \theta_1, \quad M\eta = \Sigma my = Mr_1 \sin \theta_1;$$

$$\theta_1 = \theta + C', \quad \text{et} \quad \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{dt^2},$$

précédente peut donc s'écrire :

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{M\mu ar_1}{\Sigma mr^2} \sin \theta_1.$$

chée de l'équation bien connue du pendule simple de
 l , elle montre que le centre de gravité du corps oscillerait
 pendule, si on avait :

$$\frac{M\mu ar_1}{\Sigma mr^2} = \frac{g}{l}.$$

pendule composé. — Un corps pesant quelconque,
 autour d'un axe horizontal ne passant pas par son
 e gravité, est un pendule composé. Ce corps écarté

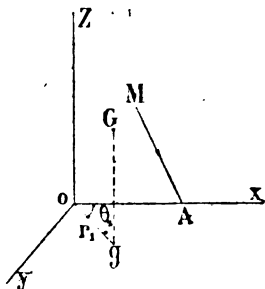


FIG. 218.

de sa position d'équilibre, puis abandonné à lui-même, oscille de part et d'autre de cette position.

Prenons l'axe horizontal fixe pour oy , l'axe oz vertical dirigé vers le bas, et l'origine o choisie de telle sorte que le centre de gravité g soit dans le plan ZOX . Posons $og = a$, $goX = \theta$, et appelons M la masse totale du corps.

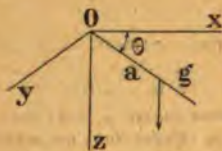


FIG. 249.

La seule force appliquée est le poids du pendule Mg , dont le moment par rapport à l'axe de rotation oy est $Mga \cos \theta$. Appelons I le moment d'inertie du pendule par rapport à son axe; l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{Mga \cos \theta}{I},$$

ou bien :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{Mga \cos \theta}{I}; \quad (1)$$

c'est l'équation du mouvement du pendule composé.

Considérons un pendule simple de longueur l et de masse M , l'équation de son mouvement sera :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{Mgl \cos \theta}{I},$$

car le pendule simple est un cas particulier du pendule composé. Comme le moment d'inertie se réduit pour le pendule simple à $I = Mt^2$, on a :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{l} \cos \theta. \quad (2)$$

Prenons pour longueur de ce pendule simple la quantité l déterminée par l'équation :

$$\frac{Mga}{I} = \frac{g}{l},$$

d'où

$$l = \frac{I}{Ma};$$

alors de la comparaison des équations (1) et (2) le pendule composé oscillera comme le pendule simple si les conditions initiales sont les mêmes. Pour cette raison, le pendule simple est dit *synchrone* du pendule composé.

PROBLÈMES RÉSOLUS

Deux points matériels M et N , de même masse μ , sont assujettis à se mouvoir sur deux droites ox et oy situées dans un même plan. Les points s'attirent en raison directe de leur distance MN ; on donne les positions initiales M_1 et N_1 et on demande de déterminer le mouvement qu'ils prendront par leur attraction mutuelle et des réactions des droites. (Ponts, 1886.)

On suppose l'attraction de l'unité à l'unité de distance.
On a $OM = x$, $ON = y$, $MN = r$.
On cherche les accélérations de chaque point :

$$= 2f^2 r \mu \frac{y \cos \alpha - x}{r^3},$$

$$= 2f^2 r \mu \frac{x \cos \alpha - y}{r^3},$$

On simplifie :

$$= 2f^2 y + 2f^2 \cos \alpha x,$$

$$= 2f^2 x + 2f^2 \cos \alpha y.$$

On élimine de ces équations par addition et soustraction :

$$\frac{d^2(x+y)}{dt^2} + 4f^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} (x+y) = 0,$$

$$\frac{d^2(x-y)}{dt^2} + 4f^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} (x-y) = 0.$$

Les nouvelles équations sont du second ordre et sans second membre. Leur intégration par les méthodes connues donne :

$$x+y = A \cos \left(2f \sin \frac{\alpha}{2} t \right) + B \sin \left(2f \sin \frac{\alpha}{2} t \right).$$

$$x-y = A' \cos \left(2f \cos \frac{\alpha}{2} t \right) + B' \sin \left(2f \cos \frac{\alpha}{2} t \right).$$

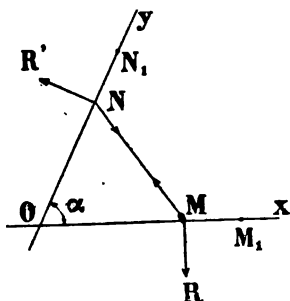


FIG. 250.

Pour $t = 0$, on a d'après l'hypothèse :

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=x_1} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{y=y_1} = 0;$$

done,

$$A = x_1 + y_1, \quad B = 0, \quad A' = x_1 - y_1, \quad B' = 0;$$

par suite :

$$x + y = (x_1 + y_1) \cos \left(2f \sin \frac{\alpha}{2} \right) t,$$

$$x - y = (x_1 - y_1) \cos \left(2f \cos \frac{\alpha}{2} \right) t;$$

et enfin, pour chaque point,

$$x = \frac{1}{2} \left[(x_1 + y_1) \cos \left(2f \sin \frac{\alpha}{2} \right) t + (x_1 - y_1) \cos \left(2f \sin \frac{\alpha}{2} \right) t \right],$$

$$y = \frac{1}{2} \left[(x_1 + y_1) \cos \left(2f \sin \frac{\alpha}{2} \right) t - (x_1 - y_1) \cos \left(2f \sin \frac{\alpha}{2} \right) t \right].$$

Les points restent à des distances finies du point O.

Pour $t = (2K + 1) \frac{\pi}{4f \cos \frac{\alpha}{2}}$, on a $x = y$; d'ailleurs si $x_1 = y_1$, on

a toujours $x = y$ et les points restent à des distances égales de l'origine.

Les réactions des droites se calculent aisément, on trouve :

$$R = 2\mu f^2 y \sin \alpha,$$

$$R' = 2\mu f^2 x \sin \alpha.$$

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, chaque point se meut comme s'il était attiré par l'origine proportionnellement à la distance; on peut du reste remarquer que le centre de gravité du système se meut suivant cette loi; il décrit donc en général une ellipse ayant le point O pour centre.

2. Un point matériel de masse m , lancé avec une vitesse initiale v_0 , est soumis à l'action d'une force mf constante en grandeur et constamment normale à la trajectoire décrite par le point. Déterminer cette trajectoire. (Ponts et Chaussées, 1887.)

Première méthode. — On écrit immédiatement les équations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= f \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -f \sin \alpha, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= f \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = f \cos \alpha; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

quant que l'on a :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

duit des équations précédentes :

$$\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

par intégration,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \text{const} = V_0^2. \quad (2)$$

La vitesse du point est constante.

Les équations (1) et (2) donnent :

$$\begin{aligned} -f \sin \alpha &= -f \frac{dy}{ds} \\ &= -f \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = -\frac{f}{v_0} \frac{dy}{dt}, \end{aligned}$$

En intégrant,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{f}{v_0} y + c;$$

On trouve identiquement :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{f}{v_0} x + c'.$$

L'équation de la trajectoire est alors :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = v_0^2 = \frac{f^2}{v_0^2} (x^2 + y^2) + \frac{2c'f}{v_0} x - \frac{2cf}{v_0} y + c^2 + c'^2.$$

C'est une circonférence.

DEUXIÈME MÉTHODE. — Prenons les équations intrinsèques du mouvement; on a

$$\frac{mdv}{dt} = 0, \quad \frac{mv^2}{\rho} = mf;$$

La première donne en intégrant :

$$v = \text{const} = V_0;$$

La deuxième donne

$$\rho = \frac{v^2}{f} = \frac{V_0^2}{f} = \text{const}.$$

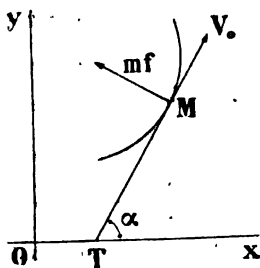


FIG. 251.

Le rayon de courbure est constant, ce qui montre que la trajectoire est une circonférence; en effet

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

posons comme d'habitude :

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

il vient :

$$-(1 + p^2)^{\frac{3}{2}} = \rho p \frac{dp}{dy}$$

ou :

$$\frac{dy}{\rho} = -\frac{p dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Intégrant une première fois, on a :

$$\frac{y + c}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}$$

d'où :

$$p = \frac{\sqrt{\rho^2 - (y + c)^2}}{y + c} = \frac{dy}{dx}$$

ou encore :

$$\frac{(y + c) dy}{\sqrt{\rho^2 - (y + c)^2}} = dx$$

Intégrant une seconde fois, on obtient :

$$x + c' = -\sqrt{\rho^2 - (y + c)^2}$$

ou enfin :

$$(x + c')^2 + (y + c)^2 = \rho^2 = \frac{v_0^4}{f^2}$$

équation d'une circonférence.

3. Une bille pesante M, assimilable à un point matériel de masse m, est abandonnée sans vitesse initiale à l'action de la pesanteur au sommet d'une cycloïde massive située dans un plan vertical et disposée comme l'indique la figure. La bille peut se mouvoir librement dans tout le plan, à l'exception de la surface ombrée où elle ne peut pénétrer, et, lorsqu'elle se meut sur la cycloïde, elle subit une réaction normale à cette courbe. On demande quel sera le mouvement de la bille M et, en particulier, en quel point et à quel moment elle se détachera de la cycloïde. (Ponts et Chaussées, 1888.)

le pesante posée sans vitesse au sommet S d'une cycloïde
 erait indéfiniment et ne saurait avoir de mouvement.
 et est en effet une position d'équilibre instable pour

lancée d'un
 quelconque de la
 avec une vitesse
 pable de la faire
 en S dans un
 fini et avec une
 ille.

iterons la ques-
 le cas où la bille
 ncée avec une
 itiale V_0 .
 our la cycloïde:

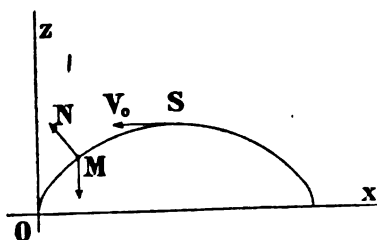


FIG. 252.

$(\alpha - \sin \alpha),$
 $(1 - \cos \alpha).$

rème des forces vives donne :

$$V^2 = V_0^2 + 2g(2a - z) = V_0^2 + 4ag \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

quation peut s'écrire :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \frac{d\alpha^2}{dt^2} = V_0^2 + 4ag \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{4a \sin \frac{\alpha}{2} d \cdot \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{V_0^2 + 4ga \cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = -dt,$$

signe — puisque α décroît; posons $\cos \frac{\alpha}{2} = u$, cette
 devient :

$$\sqrt{\frac{g}{a}} dt = \frac{2Lu}{\sqrt{u^2 + \frac{V_0^2}{4ag}}},$$

tégration :

$$\sqrt{\frac{g}{a}} t = L \left(u + \sqrt{u^2 + \frac{V_0^2}{4ag}} \right)^2 + c;$$

à la variable α :

$$\sqrt{\frac{g}{a}} t = \int L \cdot \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{V_0^2}{4ag}} \right)^2 \Big|_{\alpha=\pi}^{\alpha=\alpha}. \quad (2)$$

la loi du mouvement.

2° On a pour la réaction normale :

$$N = \frac{mv^2}{\rho} - Fn;$$

mais

$$\rho = 4a \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$Fn = mg \sin \frac{\alpha}{2},$$

avec le signe + ; donc, en tenant compte de (1),

$$\frac{N}{m} = \frac{V_0^2 + 4ag \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 4ag \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{4a \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{V_0^2 + 4ag \cos \alpha}{4a \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

N s'annule et, par suite, la bille quitte la courbe pour :

$$\cos \alpha = -\frac{V_0^2}{4ag};$$

il faut évidemment que l'on ait $V_0^2 \leq 4ag$ (sinon la bille quitterait immédiatement la courbe). Lorsque la bille quitte la courbe, elle tombe en chute libre; elle décrit donc une parabole osculatrice à la cycloïde au point correspondant. Si T est le temps que met la bille pour atteindre le point où elle se détache de la cycloïde, on a :

$$\sqrt{\frac{g}{a}} T = L \cdot \frac{a + \sqrt{a^2 - \frac{V_0^2}{4g}}}{\frac{V_0^2}{4g}};$$

il suffit d'intégrer l'équation (2) de $\alpha = \pi$ à $\cos \alpha = \frac{V_0^2}{4g}$.

4. Un point matériel *m* est suspendu à l'extrémité d'un fil vertical élastique fixé par son autre extrémité en A. Ce point est abandonné à l'action de la pesanteur sans recevoir de vitesse initiale. On suppose que, par suite de l'élasticité du fil, le point est soumis à une force dirigée vers le point A et proportionnelle à chaque instant au déplacement mm_0 qu'a pris le mobile suivant la verticale. On demande de déterminer le mouvement du point. (Ponts et Chaussées, 1889.)

Prenons Am_0 pour axe positif des z et posons :

$$Am_0 = l, \quad m_0 m = z, \quad R = m\mu^2 z.$$

L'équation du mouvement de *m* est :

$$m \frac{d^2(l+z)}{dt^2} = mg - m\mu^2 z,$$

ou :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \mu^2 z = g. \quad (1)$$

L'équation sans second membre a pour intégrale :

$$A \cos \mu t + B \sin \mu t;$$

Pour avoir l'intégrale générale de (1), il suffit d'y ajouter une intégrale particulière; posons à cet effet :

$$z_0 = \alpha t^2 + \beta t + \gamma,$$

α, β, γ étant des coefficients indéterminés, mais constants. On a successivement, en différentiant,

$$\frac{dz_0}{dt} = 2\alpha t + \beta,$$

$$\frac{d^2 z_0}{dt^2} = 2\alpha;$$

En plaçant dans (1), on a :

$$2\alpha + \mu^2 \gamma + \mu^2 \beta t + \mu^2 \alpha t^2 = g,$$

par suite :

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{g}{\mu^2};$$

on a :

$$z_0 = \frac{g}{\mu^2},$$

$$z = A \cos \mu t + B \sin \mu t + \frac{g}{\mu^2};$$

Or $t = 0$, on a par hypothèse :

$$z = 0, \quad \text{donc} \quad A = -\frac{g}{\mu^2}, \quad B = 0;$$

on a enfin :

$$z = \frac{g}{\mu^2} (1 - \cos \mu t) = \frac{2g}{\mu^2} \sin^2 \frac{\mu t}{2}.$$

Le mouvement du point est alternatif et périodique au-dessous de z_0 ; z atteint son maximum aux époques :

$$t = \frac{(2K+1)\pi}{\mu}, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{2g}{\mu^2};$$

est nul aux époques :

$$t = \frac{2K\pi}{\mu}.$$

L'amplitude d'une période est constante et sa durée égale à $\frac{2\pi}{\mu}$.

5. Un point pesant de masse m est assujéti à se mouvoir sur une tige OJ animée d'un mouvement uniforme de rotation autour d'



FIG. 253.

point O dans un plan vertical. On demande de déterminer le mouvement du point ainsi que la rotation de la droite OD. (Ponts et Chaussées, 1890.)

Soient N la réaction normale de la droite, qui n'est pas normale à la trajectoire absolue de M, et ω sa vitesse uniforme de rotation. On a les équations du mouvement :

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= N \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -N \sin \alpha = -N \sin \omega t, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= N \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) - mg = N \cos \omega t - mg. \end{aligned} \right\} (1)$$

On élimine N sans difficulté, il vient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cos \omega t + \frac{d^2y}{dt^2} \sin \omega t = -g \sin \omega t. \quad (2)$$

Prenons pour variable la distance OM = r du point à l'origine.

On a :

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t,$$

d'où successivement en différentiant :

$$\frac{dx}{dt} = \cos \omega t \frac{dr}{dt} - \omega r \sin \omega t,$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin \omega t \frac{dr}{dt} + \omega r \cos \omega t,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \cos \omega t \frac{d^2r}{dt^2} - 2\omega \sin \omega t \frac{dr}{dt} - \omega^2 r \cos \omega t,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \sin \omega t \frac{d^2r}{dt^2} + 2\omega \cos \omega t \frac{dr}{dt} - \omega^2 r \sin \omega t.$$

Substituant les valeurs précédentes dans (2), il vient, toutes réductions faites,

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r = -g \sin \omega t; \quad (3)$$

et par intégration :

$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t.$$

En général, les constantes ne sont pas nulles, et le mouvement finit par avoir lieu toujours dans le même sens, avec une vitesse croissante. Si les constantes sont nulles, le mouvement est oscillatoire.

La réaction de la droite se déduit aisément des équations (1), (2),

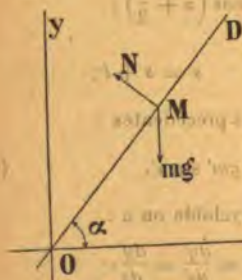


FIG. 254.

On trouve en effectuant les calculs :

$$N = m \left[g \cos \omega t + 2\omega \frac{dr}{dt} \right].$$

On aurait pu obtenir l'équation (3) plus rapidement en projetant toutes les forces sur OD et tenant compte de la force centrifuge $\omega^2 r$ qui résulte de la rotation.

6. Deux points matériels de masses m et m' , assujettis à se mouvoir sur une cycloïde placée dans un plan vertical, sont reliés entre eux par un fil inextensible de longueur l qui, par l'effet des poids, reste constamment tendu sur la courbe. On

demande le mouvement que prendra le système sous l'action de la pesanteur à partir d'une position initiale définie par la longueur correspondante s_0 de l'arc OM₀.

On supposera les vitesses initiales nulles et le poids du fil négligeable. On ne tiendra pas compte du frottement du fil ni de sa raideur. (Ponts et chaussées, 1891.)

L'introduction de deux tensions T et $-T$ égales, appliquées en sens contraires, la première en M et la seconde en M', permet de considérer chaque point isolément. On a donc, en projetant sur la tangente dans le sens du mouvement, pour M :

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = T + mg \cos \left(\alpha' + \frac{\pi}{2} \right);$$

pour M' :

$$m' \frac{d^2 s'}{dt^2} = -T + m'g \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right);$$

mais on a :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2 s'}{dt^2}, \quad \text{puisque} \quad s' = s + l;$$

il vient donc en ajoutant les équations précédentes :

$$(m + m') \frac{d^2 s}{dt^2} = -g m' \sin \alpha. \quad (1)$$

On sait, d'autre part, que dans la cycloïde on a :

$$\sin \alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \sin \alpha' = \frac{dy'}{ds'} = \frac{dy'}{ds}, \quad (2)$$

$$y = s - \frac{s^2}{8a}, \quad y' = s + l - \frac{(s + l)^2}{8a}.$$

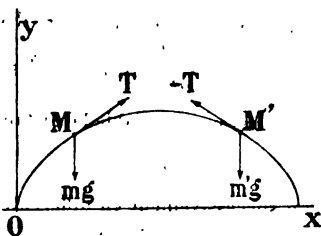


FIG. 255.

L'équation (1) peut donc s'écrire :

$$\frac{d^2s}{dt^2} - \frac{g}{4a} s + \frac{g}{4a} \left(4a - \frac{m'l}{m+m'} \right) = 0; \quad (2)$$

elle est de la forme :

$$\frac{d^2s}{dt^2} - K^2 s + H = 0.$$

L'intégrale générale de cette dernière est :

$$s = Ae^{Kt} + Be^{-Kt} + \frac{H}{K^2};$$

pour $t = 0$, on a par hypothèse $s = s_0$, $\left(\frac{ds}{dt} \right)_{s=s_0} = 0$; donc :

$$A + B = s_0 - \frac{H}{K^2} \quad \text{et} \quad A - B = 0;$$

donc encore :

$$A = \frac{s_0}{2} - \frac{H}{2K^2},$$

et par suite :

$$s = \left(\frac{s_0}{2} - \frac{H}{2K^2} \right) (e^{Kt} + e^{-Kt}) + \frac{H}{K^2}.$$

Revenant à l'équation (2), on a pour la loi du mouvement :

$$s = \left[\frac{s_0}{2} - \left(2a - \frac{m'l}{2(m+m')} \right) \right] \left(e^{\sqrt{\frac{g}{4a}} t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{4a}} t} \right) + \left(4a - \frac{m'l}{m+m'} \right).$$

On a pour déterminer la tension du fil :

$$m \frac{d^2s}{dt^2} + mg \sin \alpha = T,$$

ou

$$m \frac{d^2s}{dt^2} + mg \frac{dy}{ds} = T$$

remplaçant $\frac{d^2s}{dt^2}$ et $\frac{dy}{ds}$ par leurs valeurs, on trouve en effectuant les calculs :

$$T = \frac{mm'gl}{4a(m+m')}.$$

Le théorème des forces vives qui élimine les tensions et les réac-

normales conduit très rapidement à l'équation (2), on a en effet :

$$m \frac{ds^2}{dt^2} + m' \frac{ds'^2}{dt^2} = -2g(my + m'y') + h$$

$$+ m') \frac{ds^2}{dt^2} = -2g \left[m \left(s - \frac{s^2}{8a} \right) + m' \left[s + l - \frac{(s+l)^2}{8a} \right] \right] + h.$$

Différentiant par rapport à t , on trouve en supprimant le facteur commun $\frac{ds}{dt}$:

$$\frac{d^2s}{dt^2} - \frac{g}{4a} s + \frac{g}{4a} \left(4a - \frac{m'l}{m+m'} \right) = 0. \quad (2)$$

2. Un point mobile b s'élève verticalement avec une vitesse initiale γ et une accélération constante g . D'un autre point A situé dans un même plan horizontal que B , on lance un projectile assimilable à un point matériel pesant, avec une vitesse initiale v_0 . On demande quelle direction on doit donner à cette vitesse initiale pour que le projectile frappe le premier point. (Ponsot et Lussiez, 1892.)

Prendons AB comme axe des x et AB perpendiculaire pour axe des z ; d'ailleurs $AB = a$. Au bout du temps t , les coordonnées du point b seront :

$$x = a, \quad z = \frac{\gamma t^2}{2}.$$

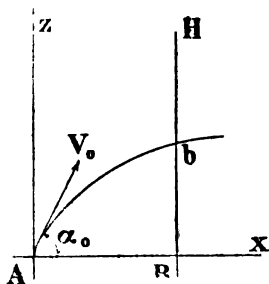


FIG. 258.

Le mouvement du projectile est déterminé par les équations

$$x = V_0 \cos \alpha_0 t,$$

$$z = \frac{gt^2}{2} + V_0 \sin \alpha_0 t;$$

pour que ce projectile atteigne le point b , il faut qu'on ait :

$$a = V_0 \cos \alpha_0 t,$$

$$\frac{\gamma t^2}{2} = -\frac{gt^2}{2} + V_0 \sin \alpha_0 t;$$

En éliminant t entre ces deux équations, on obtient une relation qui permet de déterminer α_0 en fonction des quantités connues γ , g .

On a :

$$\frac{\gamma a^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha_0} = -\frac{ga^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha_0} + \frac{aV_0 \sin \alpha_0}{V_0 \cos \alpha_0},$$

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{a(\gamma + g)}{V_0^2}.$$

La condition de possibilité est $V_0^2 \geq \alpha(g + \gamma)$; suivant que cette condition est ou n'est pas satisfaite, le problème comporte deux, une, ou pas de solution.

8. Un point matériel pesant M , de masse m , est assujéti à demeurer dans un tube rectiligne OR , tournant autour d'un axe horizontal perpendiculaire en O ; la vitesse angulaire constante est égale à ω . Ce point est, de plus,

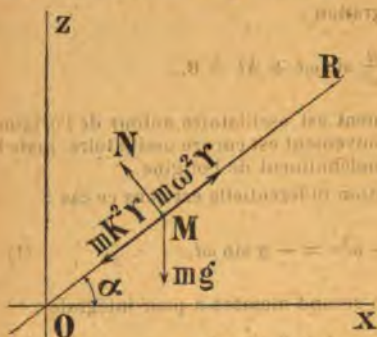


FIG. 257.

soumis à une attraction vers le point O dont l'intensité mk^2r est proportionnelle à la distance $OM = r$. Étudier le mouvement du point. Discussion; cas particulier où l'on a: $k = \omega \sqrt{2}$. Calcul de la pression exercée par le point sur le tube.

Prenons pour variable la distance $OM = r$. La rotation uniforme du tube introduit dans le mouvement la composante centrifuge $m\omega^2 r$ dirigée suivant OR . L'équation différentielle du mouvement s'obtient en projetant toutes les forces sur OR ; on a :

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = m\omega^2 r - mk^2 r - mg \sin \omega t,$$

d'où :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - (\omega^2 - k^2) r = -g \sin \omega t.$$

1° $\omega^2 - k^2 > 0$. — La loi du mouvement est dans ce cas :

$$r = Ae^{\sqrt{\omega^2 - k^2} t} + Be^{-\sqrt{\omega^2 - k^2} t} + \frac{g \sin \omega t}{2\omega^2 - k^2}.$$

On déterminerait les constantes par les données initiales. Si A est différent de 0, r finit en général par varier toujours dans le même sens avec une vitesse croissante; si les constantes sont nulles, le mouvement est oscillatoire et périodique autour de l'origine, la durée d'une oscillation complète est $\frac{2\pi}{\omega}$.

2° $\omega^2 - k^2 < 0$. — La loi du mouvement est :

$$r = A \cos \sqrt{k^2 - \omega^2} t + B \sin \sqrt{k^2 - \omega^2} t + \frac{g}{2\omega^2 - k^2} \sin \omega t;$$

Quelles que soient les valeurs des constantes, le mouvement est oscillatoire.

Si $\omega^2 - k^2 = 0$. — L'équation différentielle du mouvement est :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -g \sin \omega t,$$

qui se résout par une double intégration :

$$r = \frac{g}{\omega^2} \sin \omega t + At + B.$$

Si A est nul, le mouvement est oscillatoire autour de l'origine.

Si A n'est pas nul, le mouvement est encore oscillatoire, mais le point ne finit pas s'éloigner indéfiniment de l'origine.

Si $k = \omega \sqrt{2}$. — L'équation différentielle est dans ce cas :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \omega^2 r = -g \sin \omega t. \quad (1)$$

L'équation dépourvue de second membre a pour intégrale :

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

mais si on y ajoute une intégrale particulière ; mais ici $g \sin \omega t$ est le second membre de l'équation sans second membre, et le procédé général pour déterminer cette intégrale n'est plus applicable ; on le modifie comme il suit. Supposons que le second membre de (1) soit remplacé par $g \sin a \omega t$ (on fera $a = 1$ ultérieurement) et posons :

$$r_0 = \lambda \cos a \omega t + \mu \sin a \omega t;$$

En substituant dans (1), il vient :

$$\frac{dr_0}{dt} = a \omega (-\lambda \sin a \omega t + \mu \cos a \omega t),$$

$$\frac{d^2 r_0}{dt^2} = -a^2 \omega^2 (\lambda \cos a \omega t + \mu \sin a \omega t);$$

En remplaçant dans (1), il vient :

$$-a^2 \omega^2 (\lambda \cos a \omega t + \mu \sin a \omega t) + \omega^2 (\lambda \cos a \omega t + \mu \sin a \omega t) = -g \sin a \omega t;$$

En identifiant :

$$\lambda = 0, \quad \mu = -\frac{g}{\omega^2 (1 - a^2)}.$$

On a donc pour l'intégrale particulière :

$$r_0 = -\frac{g}{\omega^2 (1 - a^2)} \sin a \omega t,$$

et, par suite, pour l'intégrale générale de (1) modifiée,

$$r = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{g}{\omega^2 (1 - a^2)} (\sin \omega t - \sin a \omega t);$$

on peut toujours modifier à son gré la constante B et en retrancher le terme $\frac{g}{\omega^2 (1 - a^2)}$ pour l'ajouter ensuite.

Si l'on fait $a = 1$ dans l'intégrale précédente, le dernier terme prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$; mais, en lui appliquant la règle de L'Hôpital, on trouve, après avoir fait $a = 1$:

$$r = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{gt}{2\omega} \cos \omega t,$$

ou bien

$$r = \left(A + \frac{gt}{2\omega} \right) \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

En général, M oscille de part et d'autre du point O, mais r finit par augmenter, et le point s'éloigne à l'infini de l'origine; cela tient à la présence du terme séculaire $\frac{gt}{2\omega} \cos \omega t$. A chaque oscillation, r augmente de $\frac{\pi g}{\omega}$.

La réaction normale est égale et opposée à la pression exercée par le point sur le tube; on a comme au numéro 5 :

$$N = m \left(g \cos \omega t + 2\omega \frac{dr}{dt} \right).$$

9. Une échelle homogène AB de longueur $2l$ se meut dans un plan vertical; d'une part, elle glisse sans frottement sur l'extrados d'une voûte circulaire de rayon r , limitée par un plan vertical oZ; d'autre part, l'extrémité A glisse sans frottement sur ce mur. En appelant ω l'angle de l'échelle avec l'horizontale ox, on demande : 1° la position d'équilibre de l'échelle; 2° son mouvement lorsqu'on l'abandonne à elle-même sans vitesse dans une position initiale A_0B_0 . On montrera en particulier que, si $r = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, l'angle ω oscille entre 0 et $\frac{\pi}{3}$.

1° Introduisant les réactions R et R' du mur et de la voûte, on a pour l'équilibre de l'échelle :

$$\begin{aligned} R + R' \sin \omega &= 0, \\ R' \cos \omega - p &= 0, \\ \frac{Rr}{\cos \omega} + pl \cos \omega &= 0, & p = Mg. \end{aligned}$$

tions s'éliminent sans difficulté, on obtient :

$$r \operatorname{tg}^3 \omega + r \operatorname{tg} \omega - l = 0. \quad (1)$$

l'équation n'a qu'une seule racine positive ω , qui répond à la position d'équilibre.

Le travail résultant d'un déplacement fini de l'échelle est :

$$U = Mg (z_0 - z),$$

$$z = oA = Ah = \frac{r}{\cos \omega} - l \sin \omega;$$

$$U = Mg \left(z_0 + l \sin \omega - \frac{r}{\cos \omega} \right). \quad (2)$$

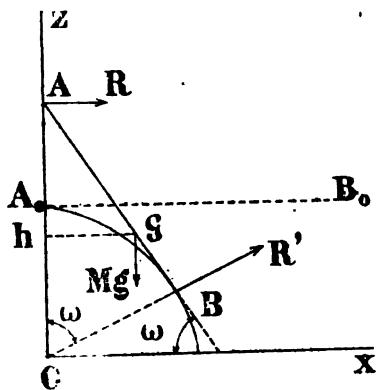


FIG. 258.

La valeur de ω qui correspond à la position d'équilibre est alors

l'équation dérivée $\frac{dU}{d\omega} = 0$.

$$\frac{dU}{d\omega} = Mg \left(l \cos \omega - \frac{r \sin \omega}{\cos^2 \omega} \right);$$

soit :

$$l \cos \omega - \frac{r \sin \omega}{\cos^2 \omega} = 0,$$

$$r \operatorname{tg}^3 \omega + r \operatorname{tg} \omega - l = 0. \quad (1)$$

L'équilibre est stable, on le vérifie par le principe de Dirichlet ; en effet :

$$\left(\frac{d^2 U}{d\omega^2} \right)_{\omega = \omega_1} = -Mg r \left(\frac{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \omega_1}{\cos \omega_1} \right) < 0.$$

3° Le théorème des forces vives donne la loi du mouvement :

$$\Sigma m v^2 = 2U.$$

Le théorème de Kœnigs donne d'autre part :

$$\Sigma m v^2 = M W^2 + \Sigma m v_1^2,$$

M étant la masse de l'échelle, W la vitesse du centre de gravité et v_1 la vitesse relative d'un élément autour de ce point :

$$W^2 = \frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2},$$

en appelant ξ et η les coordonnées du centre de gravité G. Or :

$$\xi = l \cos \omega, \quad \eta = \frac{r}{\cos \omega} - l \sin \omega,$$

d'où :

$$\frac{d\xi}{dt} = -l \sin \omega \frac{d\omega}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \left(\frac{r \sin \omega}{\cos^2 \omega} - l \cos \omega \right) \frac{d\omega}{dt};$$

par suite :

$$W = \left(l^2 + \frac{r^2 \sin^2 \omega}{\cos^4 \omega} - 2rl \operatorname{tg} \omega \right) \frac{d\omega}{dt}.$$

D'autre part :

$$\Sigma m v_1^2 = \rho \int_0^{l+1} l \frac{d\omega^2}{dt^2} dl = \frac{2\rho l^3}{3} \frac{d\omega^2}{dt^2} = M \frac{l^3}{3} \frac{d\omega^2}{dt^2};$$

ρ est la densité de l'échelle.

L'équation de Kœnigs peut donc s'écrire :

$$\Sigma m v^2 = M \left[\frac{4}{3} l^2 + \frac{r^2 \sin^2 \omega}{\cos^4 \omega} - 2rl \operatorname{tg} \omega \right] \frac{d\omega^2}{dt^2} = 2U,$$

ou, en reprenant la valeur de U, et observant que $\dot{\omega}_0 = r$:

$$\left[\frac{4}{3} l^2 + \frac{r^2 \sin^2 \omega}{\cos^4 \omega} - 2rl \operatorname{tg} \omega \right] \frac{d\omega^2}{dt^2} = 2g \left[l \sin \omega + r \left(1 - \frac{1}{\cos \omega} \right) \right],$$

et enfin

$$\pm \sqrt{\frac{4}{3} l^2 + \frac{r^2 \sin^2 \omega}{\cos^4 \omega} - 2rl \operatorname{tg} \omega} \frac{d\omega}{dt} = \sqrt{l \sin \omega + r \left(1 - \frac{1}{\cos \omega} \right)} dt;$$

telle est l'équation différentielle du mouvement.

Les limites de ω sont données par l'équation

$$l \sin \omega = r \left[\frac{1}{\cos \omega} - 1 \right] = \frac{2r \sin^2 \frac{\omega}{2}}{\cos^2 \frac{\omega}{2} - \sin^2 \frac{\omega}{2}};$$

Donc $\frac{\omega}{2} = 0$ correspond à la position initiale A_0B_0 ; en la suite, il reste l'équation :

$$r \operatorname{tg}^3 \frac{\omega}{2} + l \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} + r \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - l = 0,$$

qui n'a qu'une seule racine positive qui répond à la question.

Si $l = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, la racine positive de l'équation précédente est

et il est en effet facile de vérifier que $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ satisfait à l'équation.

PROBLÈMES À RÉSOUDRE

Un point M peut se mouvoir sans frottement sur la surface d'un cône; il est attiré par les trois sommets positifs, repoussé par les trois autres, proportionnellement à la distance et en raison du carré de l'axe correspondant. Trouver la position d'équilibre et la pression sur la surface.

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}, \quad P = 2\mu \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}.$$

Un corps solide étant en mouvement, quel est, à un instant t , le lieu géométrique des points du corps dont la vitesse a une valeur donnée.

Un cylindre de révolution autour de l'axe hélicoïdal.

Un point matériel animé d'une vitesse initiale horizontale est soumis à l'action d'une force verticale la chaîne.

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

Déterminer l'intensité de la force, la vitesse correspondant à une valeur donnée du point, le temps qu'il met à atteindre cette valeur.

$$Y = \frac{mv_0^2}{a} y, \quad v = \frac{v_0}{a} y, \quad t = \frac{x}{v_0}.$$

Un point matériel se meut dans un plan sous l'action d'une force variable, constamment perpendiculaire au rayon vecteur;

la vitesse angulaire du vecteur est constante et égale à ω . Déterminer la trajectoire. — On suppose qu'à l'origine du temps on a :



FIG. 259.

$$\theta = 0, \quad r = a, \quad \frac{dr}{dt} = 0.$$

$$R. \quad r = \frac{a}{2} (e^{\theta} + e^{-\theta}).$$

5. Un point matériel soumis à l'action d'un centre O, qui l'attire proportionnellement à la distance, part d'un point A avec une vitesse v_0 . Quelle direction faut-il attribuer à cette vitesse pour que la trajectoire passe par un point donné B? Le point A restant fixe et le point B se déplaçant, le problème est-il toujours possible?

R. — La trajectoire est une ellipse; on a pour déterminer α_0 :

$$a^2 \mu^2 y^2 + v_0^2 (y \cos \alpha_0 - x \sin \alpha_0)^2 = a^2 v_0^2 \sin^2 \alpha_0.$$

Le problème n'est possible que si le point B est dans l'ellipse

$$\mu^2 v_0^2 x^2 + \mu^2 (v_0^2 + a^2 \mu^2) y^2 = v_0^2 (v_0^2 + a^2 \mu^2).$$

6. Déterminer la courbe située dans un point vertical, telle qu'un point pesant, partant sans vitesse d'un point donné A de cette courbe, mette le même temps à atteindre un point quelconque M de la courbe que s'il parcourait la corde AM.

R. — La courbe est une lemniscate dont l'axe est incliné à 45° sur la verticale.

7. Un point de masse m est attiré par une force centrale dont l'intensité varie en raison inverse de la septième puissance de la distance. Déterminer : 1° la vitesse; 2° la trajectoire; 3° la loi du mouvement. Le rayon initial est a , la vitesse initiale lui est perpendiculaire et égale à $\frac{1}{a^3} \sqrt{\frac{\mu}{3}}$.

$$R. \quad v^2 = \frac{\mu}{3r^6}, \quad r^2 = a^2 \cos 2\theta,$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \arcsin \frac{2}{a^4} \sqrt{\frac{\mu}{3}} t.$$

8. Un mobile assujéti à décrire la courbe $r = \frac{a}{2} (1 + \cos \theta)$ est soumis à l'action d'une force répulsive constante $2K^2 a$ émanant du pôle; il est placé en un point B de cette courbe sans vitesse initiale. On demande : 1° d'étudier le mouvement du point sur la

be; 2° de montrer que le mobile mettra toujours le même temps T pour atteindre le sommet A de cette courbe quel que soit

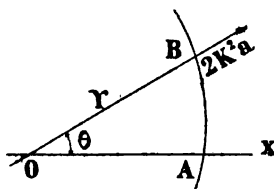


FIG. 260.

int de départ B; 3° de calculer la pression du point sur la courbe.

Un point matériel se meut suivant la loi des aires et décrit une spirale logarithmique $r = ae^{\mu\theta}$ tournant uniformément avec

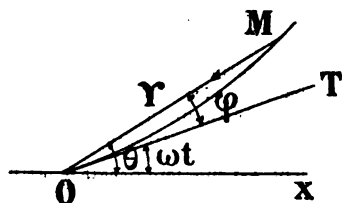


FIG. 261.

avec une vitesse ω autour de son pôle. Déterminer la trajectoire et l'intensité de la force.

$$r = ae^{\mu(\theta - \omega t)},$$

$$mf(r) = \frac{mc^2(1 + \mu^2)}{r^3} - m\mu^2\omega^2r.$$

Un point matériel M glisse sans frottement sur une droite qui tourne autour d'un de ses points O, dans un plan horizontal, avec une vitesse angulaire telle que la tangente de l'angle décrit par la droite soit proportionnellement au temps. Déterminer le mouvement du point.

— Prenant pour axe ox la position initiale de la droite, on a

pour un point de coordonnées x et y , a étant une constante donnée :

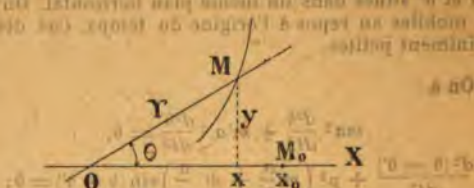


FIG. 262.

$$x = x_0 + \frac{v_0}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} at,$$

$$y = x_0 at + v_0 t \operatorname{arc} \operatorname{tg} at,$$

$$ra \cos \theta = ax_0 + v_0 \theta$$

(trajectoire).

11. Deux points M et M', placés respectivement en A et B à l'état de repos, s'attirent proportionnellement à leurs masses m et m' et à leur distance MM'. Déterminer leur mouvement.

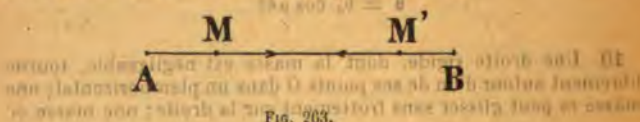


FIG. 263.

R. origine A, $AB = a$, $AM = x$, $AM' = x'$;

$$x = \frac{m'a(1 - \cos \sqrt{m+m'}t)}{m+m'}, \quad x' = \frac{m'a + ma \cos \sqrt{m+m'}t}{m+m'}.$$

12. Étudier le mouvement de deux points matériels de masses



FIG. 264.

m et m' s'attirant proportionnellement à la distance et assujettis à

deux cercles concentriques de rayons a et a' situés dans un même plan horizontal. On suppose les mobiles au repos à l'origine du temps. Cas des oscillations infiniment petites.

— On a :

$$ma^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + m'a'^2 \frac{d^2\theta'}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2(\theta - \theta')}{dt^2} + \mu^2 \left(m \frac{a}{a'} + m' \frac{a'}{a} \right) \sin(\theta + \theta') = 0;$$

Le cas des oscillations infiniment petites, on a, en posant

$$k^2 = \frac{ma^2 + m'a'^2}{aa'}, \quad \frac{d^2(\theta - \theta')}{dt^2} + \mu^2 k^2 (\theta - \theta') = 0,$$

$$\theta - \theta' = (\theta_0 - \theta'_0) \cos \mu k t,$$

$$\theta = \theta_0 \cos \mu k t,$$

$$\theta' = \theta'_0 \cos \mu k t.$$

Une droite rigide, dont la masse est négligeable, tourne autour d'un de ses points O dans un plan horizontal; une masse m peut glisser sans frottement sur la droite; une masse m'

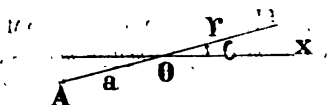


FIG. 265.

est sur la droite en un point A de l'autre côté du point fixe. On cherche l'équation différentielle de la trajectoire du point m .

$$m \frac{dr^2}{dt^2} + (mr^2 + m'a^2) - \frac{h}{k} (mr^2 + m'a^2)^2 = 0;$$

où h et k sont des constantes d'intégration.

Étudier le mouvement d'une échelle pesante AB dont les extrémités s'appuient sans frottement sur deux glissières, l'une horizontale ox , l'autre verticale oz . Calculer les pressions P et P' exercées en A sur oz , en B sur ox . La vitesse initiale est nulle.

R. — On a pour le mouvement :

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{3g}{2a} (\sin \theta_0 - \sin \theta),$$

$$P = \frac{3Mg}{4} (3 \sin \theta - 2 \sin \theta_0) \cos \theta,$$

$$P' = \frac{Mg}{4} (1 + 9 \sin^2 \theta - 6 \sin \theta \sin \theta_0).$$



FIG. 266.

15. Trouver le mouvement de deux points matériels assujettis à glisser sans frottement sur un cercle horizontal et s'attirant mutuellement en raison inverse du cube de la distance.



FIG. 267.

R. — On a :

$$m \frac{d^2\theta}{dt^2} + m' \frac{d^2\theta'}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2(\theta - \theta')}{dt^2} + \frac{\mu^2(m + m')}{8r^4} \frac{\cos \frac{1}{2}(\theta - \theta')}{\sin^3 \frac{1}{2}(\theta - \theta')} = 0,$$

DEUXIÈME PARTIE

HYDRAULIQUE

CHAPITRE PREMIER

HYDROSTATIQUE

Objet de l'hydraulique. — L'hydraulique a pour objet l'étude des lois de l'équilibre et du mouvement des corps fluides, avec leurs applications aux problèmes pratiques qui relèvent plus spécialement de l'art de l'ingénieur. Les formules qu'elle établit trouvent leur application dans le calcul des barrages et des murs de réservoirs, dans l'établissement des canaux pour la navigation et l'irrigation, dans le calcul des aqueducs de captage et des conduites de distribution d'eau, et dans les questions qui ont pour objet l'amélioration des rivières et l'installation des usines hydrauliques.

La partie théorique de l'hydraulique est constituée par l'*hydrostatique* et l'*hydrodynamique*; l'hydrostatique s'occupe des conditions d'équilibre des liquides, l'hydrodynamique étudie spécialement leur mouvement.

Corps fluides. — D'une façon générale, une masse fluide doit être considérée comme un assemblage, en apparence continu, de molécules matérielles qui cèdent au moindre effort tendant à les séparer les unes des autres. La forme d'une masse fluide est donc essentiellement variable; elle change avec la forme du vase qui contient cette masse.

On distingue deux sortes de fluides : les liquides, et les gaz ou fluides aériformes. L'étude des gaz et des vapeurs fait l'objet de la thermodynamique; en hydraulique, on ne s'occupe que des liquides.

Une propriété fondamentale des liquides, c'est d'être incompressibles ; placés dans des vases résistants, ils conservent le même volume, quelle que soit la pression à laquelle on les soumette, la température demeurant constante.

Certains corps, comme l'huile et le goudron, tiennent en quelque sorte le milieu entre les solides et les liquides ; leurs propriétés participent à la fois de celles des solides et des liquides ; on les appelle corps visqueux.

L'hypothèse d'une mobilité parfaite pourrait conduire à des résultats peu conformes à l'expérience dans le cas d'un liquide en mouvement ; mais, si l'on excepte les corps visqueux, les lois de l'équilibre auxquelles on parvient en supposant les molécules parfaitement mobiles et sans aucune cohésion s'appliquent sans erreur sensible aux liquides naturels.

3. Pression en un point. — Sur la paroi d'un vase qui contient une masse liquide en équilibre, autour d'un point M,



Fig. 268.

prenons une portion de surface d'aire ω ; le liquide exerce sur cette surface une certaine pression P , que nous apprendrons à évaluer.

Le quotient $\frac{P}{\omega}$ est la

pression moyenne du liquide sur la portion de surface considérée ; P s'exprime ordinairement en kilogrammes, ω en mètres carrés. Si l'aire ω devient infiniment petite, ce même quotient représente la *pression p du liquide au point M de la paroi*.

Prenons ensuite un point quelconque A dans le liquide ; en ce point imaginons un élément plan très petit, d'aire ω , ayant une direction quelconque. Le quotient $\frac{P}{\omega}$ pour cet élément est, par définition, la *pression au point A de la masse liquide*.

4. Principes d'expérience. — 1° On admet comme un résultat de l'expérience, et comme une conséquence de la distri-

tion uniforme des molécules liquides et de l'absence de cohésion, que la direction de la pression est toujours normale à l'élément de surface sur lequel elle s'exerce.

Une pression est donc une véritable force; on la représente par un vecteur dont la longueur est proportionnelle à son intensité, et dont la direction est perpendiculaire à la paroi sur laquelle elle agit.

2° On admet encore comme un résultat de l'expérience que l'intensité de la pression en un point A pris à volonté dans le liquide est indépendante de l'orientation; autour de ce point, l'élément plan auquel elle est normale. C'est cet énoncé qui constitue le principe de l'égalité de pression dans tous les sens en un même point d'une masse liquide en équilibre.

5. Équation d'équilibre d'une masse liquide. — Considérons une masse liquide contenue dans le vase et rapportons la posi-

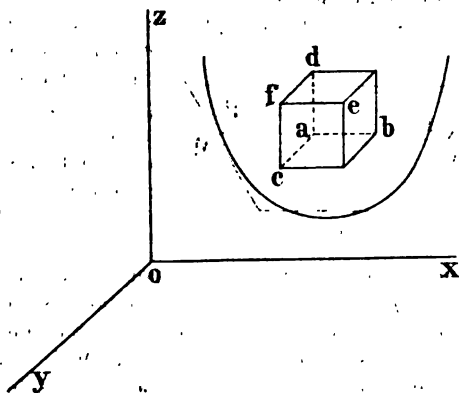


FIG. 200.

tion des divers points de cette masse à trois axes rectangulaires fixes ox, oy, oz . Si x, y, z sont les coordonnées d'un point quelconque a , un élément de volume infiniment petit $abef$, ayant la forme d'un parallélépipède rectangle dont les arêtes sont parallèles aux axes, a pour dimensions : $ab = dx$, $ac = dy$, $ad = dz$; son volume est, par conséquent, $dx dy dz$.

et, si ρ est la densité du liquide au point a , la masse de cet élément est $\rho dx dy dz$, car la masse d'un corps homogène est égale au produit de son volume par sa densité.

Cherchons les conditions d'équilibre de ce parallélépipède; pour cela écrivons que les sommes respectives des projections sur les trois axes des forces qui agissent sur lui sont nulles séparément pour chacun des axes. Chaque face du parallélépipède est d'abord soumise à une certaine pression normale. Ensuite il faut considérer les forces extérieures, telles que la pesanteur par exemple, qui agissent sur tous les points de la masse liquide. Si X, Y, Z représentent respectivement les sommes des composantes de ces forces rapportées à l'unité de masse, alors, pour l'élément de volume considéré, la résultante des forces extérieures a pour composantes suivant Ox, Oy, Oz :

$$\rho X dx dy dz, \quad \rho Y dx dy dz, \quad \rho Z dx dy dz.$$

Soit p la pression du liquide au point a ; cette pression varie avec la position du point dans la masse liquide, et c'est une certaine fonction des coordonnées x, y, z de ce point.

La pression au point b est $p + \frac{dp}{dx} dx$, car ce point a mêmes y et z que le point a . Il suit de là que les pressions du liquide sur les faces af et be sont respectivement:

$$p dy dz, \quad \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz;$$

si l'on observe, en outre, que seules les pressions sur les faces af et be donnent des composantes suivant Ox , la somme des projections sur cet axe de toutes les forces qui agissent sur le parallélépipède est:

$$p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz + \rho X dx dy dz,$$

ou en simplifiant:

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X \right) dx dy dz.$$

Les sommes semblables des projections sur les axes Oy et Oz sont évidemment:

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho Y \right) dx dy dz, \quad \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z \right) dx dy dz;$$

rte que les équations d'équilibre du parallélépipède
 e sont, en supprimant le facteur commun $dx dy dz$,

$$+ \rho X = 0, \quad - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho Y = 0, \quad - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z = 0,$$

e l'on peut écrire :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z. \quad (1)$$

tiplions respectivement ces équations par dx , dy , dz ,
 utons-les; il vient:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho (X dx + Y dy + Z dz);$$

e premier membre est la différentielle totale dp de la
 on p au point a , pression qui est une fonction des coor-
 es x , y , z de ce point; l'équation précédente peut donc
 e:

$$dp = \rho (X dx + Y dy + Z dz); \quad (2)$$

équation fondamentale de l'hydrostatique.

loi des coordonnées cylindriques. — Au lieu de considérer
 allépipède infiniment petit dont les arêtes sont parallèles aux
 on peut choisir le prisme
 t de volume en coordonnées
 iques.

osons que la masse liquide
 visée en éléments par trois
 e surfaces orthogonales :
 ière composée de cylindres
 olution autour de oz , la
 me de plans parallèles à
 troisième de plans verti-
 assant par oz .

nt :
 intersection du cylindre dont
 n est $ma = r$, du plan zma
 avec zox l'angle φ , et du
 parallèle à $yoax$ défini par
 née z ;
 $= r + dr$, l'arête de l'élément
 t ma ;

les positions que prennent a et b lorsque l'angle φ augmente

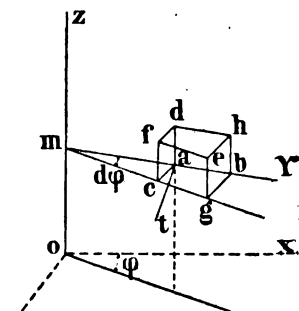


FIG. 270.

d, h, f, e , celles que prennent a, b, c, g quand z augmente de dz .

R, T, Z , les sommes respectives des composantes suivant le rayon vecteur ar , la normale al à ce rayon dans le sens où φ augmente, et la verticale az des forces extérieures rapportées à l'unité de masse qui agissent sur l'élément liquide considéré.

Le théorème des projections donne les relations :

$$X = R \cos \varphi + T \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) = R \cos \varphi - T \sin \varphi;$$

$$Y = R \sin \varphi + T \sin \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) = R \sin \varphi + T \cos \varphi.$$

On a aussi :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

On trouve, d'autre part, en différentiant :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial p}{\partial y} \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial p}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial p}{\partial y} r \cos \varphi;$$

ce que l'on peut écrire, d'après les équations (1) et les relations ci-dessus :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \cos \varphi (R \cos \varphi - T \sin \varphi) + \rho \sin \varphi (R \sin \varphi + T \cos \varphi),$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi (R \cos \varphi - T \sin \varphi) + \rho \cos \varphi (R \sin \varphi + T \cos \varphi);$$

c'est-à-dire, en développant et réduisant :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho R, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \rho T, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z, \quad (1')$$

et enfin :

$$dp = \rho (Rdr + rTd\varphi + Zdz); \quad (2')$$

c'est l'équation fondamentale en coordonnées cylindriques.

6. Surfaces de niveau. — Dans une masse liquide en équilibre, tous les points qui ont la même pression sont situés sur une surface de niveau; autrement dit la pression p est constante en tous les points d'une pareille surface. Si l'on fait $p = \text{constante}$, d'où $dp = 0$, dans l'équation (2'), on obtient :

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0; \quad (3)$$

est l'équation différentielle des surfaces de niveau. On a démontré que, en chaque point de la masse liquide, la résultante des forces extérieures est normale à la surface de niveau passant par ce point.

En effet, soit R cette résultante qui a pour composantes X , Y , Z , et ds un élément de la courbe C tracée sur la surface de niveau par le point a . Les cosinus directeurs de R sont $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$, $\frac{Z}{R}$;

et les cosinus directeurs de la tangente à la courbe C au point a sont $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$.

D'autre part, en divisant l'équation ci-dessus par le produit Rds , on peut écrire :

$$\frac{X}{R} \frac{dx}{ds} + \frac{Y}{R} \frac{dy}{ds} + \frac{Z}{R} \frac{dz}{ds} = 0;$$

cette relation exprime précisément l'orthogonalité au point a du vecteur R et de la tangente à la courbe C .

Dans le cas d'une masse fluide contenue dans un vase, si la pression atmosphérique qui s'exerce sur la surface libre est constante, cette dernière est une surface de niveau.

Les forces de la nature donnent lieu à un cas particulier très étendu : c'est celui où l'expression $Xdx + Ydy + Zdz$ est la différentielle totale d'une fonction $U(x, y, z)$ des coordonnées du point a ; on a alors :

$$\frac{dp}{\rho} = Xdx + Ydy + Zdz = dU(x, y, z);$$

le premier membre $\frac{dp}{\rho}$ devant, lui aussi, être une différentielle exacte, il faut nécessairement que ρ soit constant, ce qui correspond aux liquides homogènes.

Dans ce cas, l'équation différentielle des surfaces de niveau est :

$$dU(x, y, z) = 0.$$

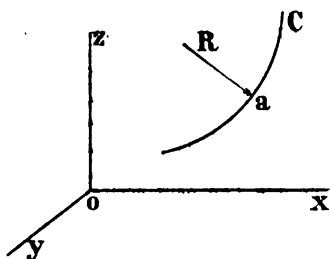


FIG. 271.

d'où, par intégration :

$$U(x, y, z) = C.$$

La constante C sera déterminée quand on connaîtra la pression p_0 en un point particulier $M_0(x_0, y_0, z_0)$ du liquide.

7. Équilibre des liquides pesants. — Lorsque la masse liquide est uniquement soumise à l'action de son poids, il est naturel de prendre le plan de coordonnées XOY horizontal, l'axe vertical OZ étant dirigé de haut en bas dans le sens de la force. On a alors, pour les composantes de la pesanteur sur l'unité de masse :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g;$$

et l'équation (2) devient :

$$dp = \rho g dz. \quad (4)$$

L'équation différentielle des surfaces de niveau se réduit à :

$$dz = 0, \quad \text{d'où} \quad z = \text{conste},$$

formule qui montre que, dans un liquide pesant en équilibre, les surfaces de niveau sont des plans horizontaux, c'est-à-dire que la pression est la même en tous les points d'un plan horizontal.

Reprenons l'équation (4) pour l'intégrer, et désignons par p_0 la valeur commune de p sur le plan $z = z_0$; on obtient :

$$p - p_0 = g \int_{z_0}^z \rho dz.$$

Lorsque le liquide est homogène, la densité ρ est constante; l'intégration donne :

$$p - p_0 = \rho g (z - z_0); \quad (5)$$

mais $z - z_0$ représente le volume d'un cylindre qui aurait pour base l'unité de surface et pour hauteur $z - z_0$; $\rho(z - z_0)$ est la masse de ce volume, et $\rho g(z - z_0)$ son poids. La formule (5) montre donc que la différence des pressions entre

points donnés dans le liquide est égale au poids d'une colonne de liquide ayant pour base l'unité de surface, et pour hauteur la distance verticale comprise entre les deux points.

Supposons que les plans XOY et $z = z_0$ se confondent avec celui de la surface libre du liquide, $z_0 = 0$, et p_0 représente la pression atmosphérique; on a, dans ce cas, en posant $\rho g = \pi$:

$$p = p_0 + \pi z. \quad (6)$$

Si la pression en un point du liquide croît proportionnellement à la distance verticale du point à la surface libre. Prenant deux axes rectangulaires Op et Oz, l'équation (6) définit une droite,

et l'on cherche le plan horizontal pour lequel la pression p est nulle, on trouve :

$$z = -\frac{p_0}{\pi};$$

ce plan a reçu le nom de *plan de charge hydrostatique*.

S'il existait dans la masse liquide plusieurs couches superposées de densités ρ_0, ρ_1, ρ_2 , et d'épaisseurs h_0, h_1, h_2 , l'équation (5) s'appliquerait à chaque couche. On aurait alors, en appelant p_0, p_1, p_2

pressions respectives au bas de chaque couche, et z_0, z_1, z_2 les cotes correspondantes :

$$p_1 - p_0 = \rho_0 g (z_1 - z_0) = \rho_0 g h_0,$$

$$p_2 - p_1 = \rho_1 g (z_2 - z_1) = \rho_1 g h_1,$$

$$p_3 - p_2 = \rho_2 g (z_3 - z_2) = \rho_2 g h_2,$$

.....

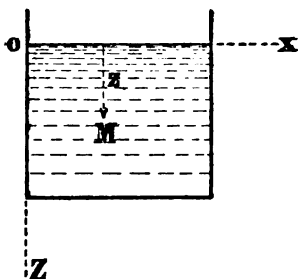


FIG. 272.

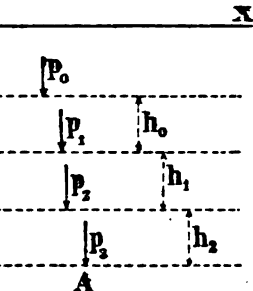


FIG. 273.

Additionnant ces équations, on obtient, pour la pression au point A :

$$p_3 = p_0 + g(\rho_0 h_0 + \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2); \quad (7)$$

c'est la formule applicable au cas de plusieurs liquides.

EXEMPLE. — Proposons-nous de calculer la pression par centimètre carré en un point A d'une masse d'eau situé à 2 mètres de profondeur au-dessous de la surface libre.

Il faut toujours avoir présent à l'esprit que la formule (6) s'applique aux pressions par unité d'aire, c'est-à-dire par mètre carré. Si l'on prend le centimètre carré pour unité, le facteur π doit être remplacé par $\frac{\pi}{10000}$.

Dans le cas présent, on aura :

$$p = 1,033 + 0,10 \times 2,00 = 1^{\text{re}}.233.$$

La pression au point A est de 1^{re}.233 par centimètre carré ; si l'on faisait abstraction de la pression atmosphérique, on aurait seulement :

$$p = 200 \text{ grammes.}$$

CAS GÉNÉRAL. — En combinant les deux propositions ci-dessus, on déterminera facilement la différence de pression entre deux points D et F d'un liquide.

Il suffit de mener l'horizontale FH et la verticale DH, et de prendre pour hauteur z la distance DH, car la pression est la même sur les points F et H.

8. Hauteur représentative d'une pression. — La pression p en un point d'un liquide peut toujours s'exprimer par le poids d'une colonne d'eau ayant pour base l'unité de surface et une hauteur convenablement choisie z .

Il suffit, en effet, de poser :

équation qui donne :

$$z = \frac{p}{\pi};$$

ne le poids de l'unité de volume d'eau ou le poids du cube ($\pi = 1.000$ kilogrammes).

Quotient $\frac{p}{\pi}$ se nomme la hauteur représentative de la pression p .

Exemple, la pression de 12.330 kilogrammes par mètre correspond à une hauteur d'eau :

$$z = \frac{12330}{1000} = 12^m,33.$$

Liquides superposés. — Lorsque deux liquides de densités différentes sont superposés dans le même vase, la surface de séparation est horizontale.

Considérons, en effet, deux points voisins m, m' sur un plan horizontal MM' .

Dans le premier

cas, et leurs coordonnées n, n' sur

un plan horizontal

NN' . Soient :

p_0 , le poids du mètre

cube du liquide supérieur,

π' , celui du liquide

inférieur; p_0 , la pression commune sur les points n, n' ;

la pression sur m, m' . Posons $mn = h, ma = z, m'a' = z'$.

D'après la formule (7), la charge sur le point m a pour

valeur :

$$p = p_0 + \pi(h - z) + \pi'z,$$

la charge sur m' , qui est aussi égale à p :

$$p = p_0 + \pi(h - z') + \pi'z'.$$

La différence de ces deux équations donne, après simplification :

$$(\pi' - \pi)(z - z') = 0,$$

équation qui ne peut être satisfaite que pour $z = z'$.

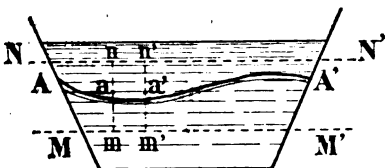


FIG. 275.

puisque π' est différent de π . Ainsi le point a' doit être au même niveau que le point a , c'est-à-dire que la surface de séparation AA' est horizontale.

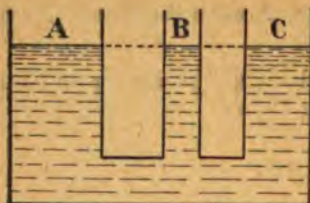


FIG. 276.

ces divers vases constituent l'ensemble des points où la pression est égale à celle de l'atmosphère; elles doivent donc se trouver sur un même plan horizontal (7).

11. Densité d'un corps. — Par définition, la *densité* d'un corps est la masse de l'unité de volume de ce corps ou la masse du mètre cube. Le poids s'obtenant en multipliant la masse par g , on a $\pi = \rho g$, en appelant ρ la densité.

$g = 9,81$ est l'accélération due à la pesanteur.

Le poids spécifique π dépendant de la valeur de g est variable pour un même corps avec sa situation à la surface du globe, tandis que la densité est une constante dont la valeur à une température déterminée est caractéristique de la nature du corps.

Dorénavant nous représenterons indifféremment le poids du mètre cube du liquide par π ou par ρg .

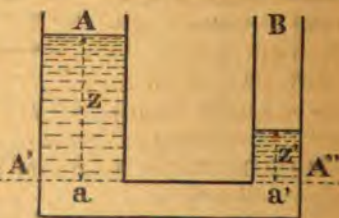


FIG. 277.

12. Liquides de densités différentes. — Lorsque deux vases A et B contiennent des liquides de densités différentes, les hauteurs de ces liquides au-dessus de la surface de séparation sont en raison inverse de leurs densités.

La surface de séparation AA' est un plan horizontal, et

pressions sur les points a, a' de ce plan doivent être égales. On a, par suite, en désignant par ρ la densité du liquide contenu dans le vase A, par ρ' celle de l'autre vase :

$$p_0 + \rho g z = p_0 + \rho' g z'.$$

On déduit de cette équation :

$$\rho z = \rho' z',$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho'}{\rho}.$$

Principe de Pascal. — Si, sur une portion plane de la surface d'un liquide, on exerce une pression, cette pression se transmet dans tous les sens et également.

Pascal considérait ce principe de la transmission des pressions comme l'expression d'une propriété caractéristique des fluides parfaits, dans lesquels les molécules sont libres d'une mobilité absolue qu'elles n'éprouvent jamais, ni dans les solides voisins,

ni frottement, c'est-à-dire aucune résistance au mouvement. Il a fait de ce principe le fondement de l'hydrostatique tout entière.

Considérons deux vases communicants; supposons que les surfaces libres de l'eau AB et A'B' soient pressées par des poids mobiles de même section que les vases et chargés de poids P et P'.

Si S et S' sont les aires des deux pistons, la pression par unité d'aire sur la surface AB est $\frac{P}{S}$, et la pression sur A'B'

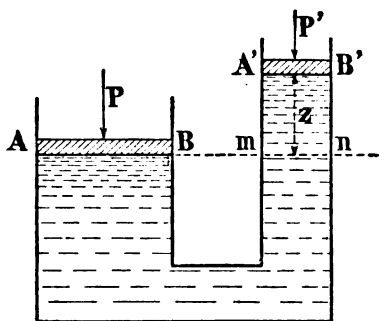


FIG. 273.

est $\frac{P'}{S'}$; par suite, lorsque le système est en équilibre, la pression est la même en tous les points du plan horizontal An , et l'on a la relation (7):

$$\frac{P}{S} = \frac{P'}{S'} + \pi z.$$

Si l'on fait abstraction de l'action de la pesanteur sur les molécules d'eau, alors la charge πz disparaît, et la formule devient:

$$\frac{P}{S} = \frac{P'}{S'}, \quad (m)$$

ce qui n'est autre chose que l'expression du principe de Pascal, car si $S = S'$, on a $P = P'$.

Très souvent, dans les applications à la presse hydraulique, les surfaces AB et $A'B'$ sont au même niveau, ou bien z a une valeur très petite que l'on peut négliger; dans ce cas, on peut encore appliquer approximativement la formule (m).

14. Équilibre relatif d'un liquide animé d'une rotation uniforme.—

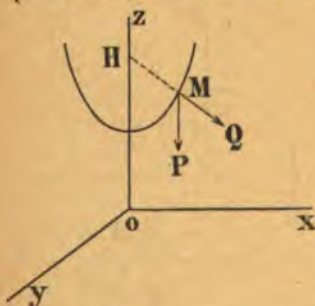


FIG. 279.

Lorsqu'un vase contenant une masse liquide est animé d'un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe vertical Oz , chaque molécule est évidemment animée du même mouvement, de sorte que la surface libre du liquide cesse d'être horizontale pour prendre une nouvelle forme d'équilibre relatif.

A la force verticale $MP = -g$, qui agit au point $M(x, y, z)$ sur l'unité de masse du liquide, il faut ajouter la composante centrifuge MQ qui résulte de la rotation et qui agit dans le prolongement de la perpendiculaire MH à l'axe Oz . Si ω est la vitesse uniforme de rotation, on a $MQ = \omega^2 MH$, et les composantes de cette force suivant les axes Ox , Oy , Oz , sont respectivement :

$$\omega^2 x, \quad \omega^2 y, \quad 0.$$

formules (1) (3) donnent alors :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \omega^2 x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \omega^2 y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g;$$

on déduit :

$$dp = \rho \omega^2 (x dx + y dy) - \rho g dz,$$

integrant:

$$p = \frac{\rho \omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \rho g z + C.$$

signe une constante arbitraire, que l'on déterminera dans le cas en exprimant que le volume du liquide est donné. Soient que le liquide soit contenu dans un vase cylindrique pour base, sur le plan xy , le cercle dont le rayon est a , que h la hauteur de la partie du cylindre occupée par le liquide en mouvement, et que la surface libre supporte la pression atmosphérique p_0 . On aura :

$$C = -\frac{\rho \omega^2 a^2}{4} + \rho g b + p_0.$$

surfaces de niveau dont l'équation différentielle est :

$$u^2 (x dx + y dy) = y dz,$$

ur équation en termes finis :

$$\frac{b^2}{2} (x^2 + y^2) + C = gx,$$

core :

$$z = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) + C';$$

Et que ce sont des paraboles de révolution autour de l'axe ant leurs sommets vers le bas. La surface libre du liquide étant à surface de niveau est aussi un paraboloïde de révolution.

la rotation uniforme s'effectuait autour d'un axe horizontal en O, la résultante des forces MP et MQ devrait être normale à la surface de niveau passant par M, et rencontrer l'axe OZ au point K (6).

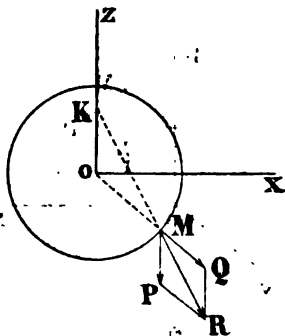


FIG. 280.

Les triangles semblables MPR et KOM donnent :

$$\frac{OK}{OM} = \frac{MP}{PR}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{OK}{OM} = \frac{\rho}{\omega^2 OM}$$

d'où l'on tire :

$$OK = \frac{g}{\omega^2}$$

Ainsi OK est constant et, puisque le point O est fixe, il en est de même du point K. On voit donc que toutes les normales aux surfaces de niveau vont rencontrer le plan vertical qui passe par l'axe à une même distance OK au-dessus de cet axe. Ces surfaces sont donc des cylindres à génératrices horizontales, parallèles à l'axe de rotation, et qui ont pour bases des circonférences ayant le point K pour centre commun.

15. Pression sur une paroi plane. — La paroi AB d'un

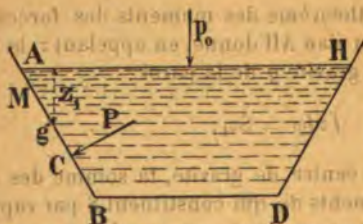


FIG. 281.

vase qui contient une masse d'eau supporte en chacun de ses points une pression normale p , fonction de la profondeur z . Supposons que la paroi soit plane. Toutes les pressions étant parallèles entre elles peuvent se composer en une pression

résultante P appliquée en un point C de la paroi; ce point s'appelle le *centre de pression*.
Lorsque la paroi présente un axe de symétrie normal à l'horizontale, ce qui est un cas très général, le centre de pression se trouve évidemment sur cet axe, comme le centre de gravité.

Il est utile pour l'application de savoir calculer la grandeur de la pression totale P et la position du centre de pression.

16. Calcul de la pression. — Pour effectuer ce calcul, comptons les profondeurs z à partir de la surface libre AH.

ient p la pression au point quelconque M , $d\omega$ un élément surface très petit entourant ce point. La pression sur l'élément est $p d\omega$, ou bien $(p_0 + \rho g z) d\omega$. Pour obtenir la pression P , il suffit d'étendre cette formule à tous les éléments contenus dans l'aire S de la paroi AB ; on a donc :

$$P = \int (p_0 + \rho g z) d\omega,$$

que l'on peut écrire :

$$P = \int p_0 d\omega + \int \rho g z d\omega = p_0 \int d\omega + \rho g \int z d\omega,$$

p_0 et ρg étant constants sortent du signe \int , qui est en réalité double.

Mais d'autre part :

$$\int d\omega = S.$$

En second lieu, le théorème des moments des forces parallèles par rapport au plan AH donne, en appelant z_1 la profondeur du centre de gravité g de la paroi :

$$\int z d\omega = S z_1;$$

, par définition du centre de gravité, la somme des moments de tous les éléments $d\omega$ qui constituent S par rapport au plan AH est égale au moment, par rapport à ce même plan, de l'aire S supposée condensée en son centre de gravité.

On a donc en définitive :

$$P = p_0 S + \rho g z_1 S,$$

est-à-dire :

$$P = (p_0 + \rho g z_1) S.$$

Le facteur $p_0 + \rho g z_1$ représentant la pression du liquide sur le point g , on arrive à cette conclusion que la pression totale sur la paroi est égale au produit de l'aire de cette paroi par la pression que le liquide exerce sur son centre de gravité. Cette pression est, par suite, indépendante de l'orientation que l'on donne à la paroi autour de son centre de gravité.

Si l'on ne tient pas compte de la pression atmosphérique p_0 qui s'exerce sur AH , on a simplement :

$$P = \rho g z_1 S;$$

et l'on peut dire alors que la pression totale est égale au poids d'une colonne liquide qui aurait la paroi pour base et pour hauteur la distance de son centre de gravité au-dessous de la surface libre.

Rappelons que :

Pour l'eau..... $\rho g = 1.000$ kilogrammes.

Pour le mercure.... $\rho g = 13.600$ —

EXEMPLES. — Supposons que le vase ait la forme d'un tronc de pyramide renversé, et que la paroi soit un trapèze $A'B'B'A'$ de bases l et l' , avec une hauteur d'eau égale à h ; appelons θ l'inclinaison de la paroi sur l'horizontale. La figure 282 donne la coupe verticale du vase dans le plan de symétrie de la paroi, avec le rabattement de cette dernière sur le plan horizontal.

On a immédiatement :

$$AB = \frac{h}{\sin \theta},$$

puis

$$S = \frac{(l + l') h}{2 \sin \theta}.$$

La propriété du centre de gravité d'un trapèze donne pour l'ordonnée z_1 de ce point :

$$\frac{z_1}{h - z_1} = \frac{l + 2l'}{2l + l'},$$

d'où l'on déduit :

$$z_1 = \frac{(l + 2l') h}{3(l + l')}.$$

Par suite, en négligeant p_0 , ce que nous ferons dorénavant :

$$P = \rho g \frac{(l + 2l') h^2}{6 \sin \theta}.$$

Ordinairement on ne tient pas compte de la pression atmosphérique p_0 , car elle s'exerce d'une façon identique sur la face non mouillée de la paroi, de sorte que les deux actions s'annulent.

Si la paroi était *rectangle* et *verticale*, on aurait :

$$l = l', \quad \sin \theta = 1;$$

expression de P deviendrait pour l'eau :

$$P = \frac{1000lh^2}{2}.$$

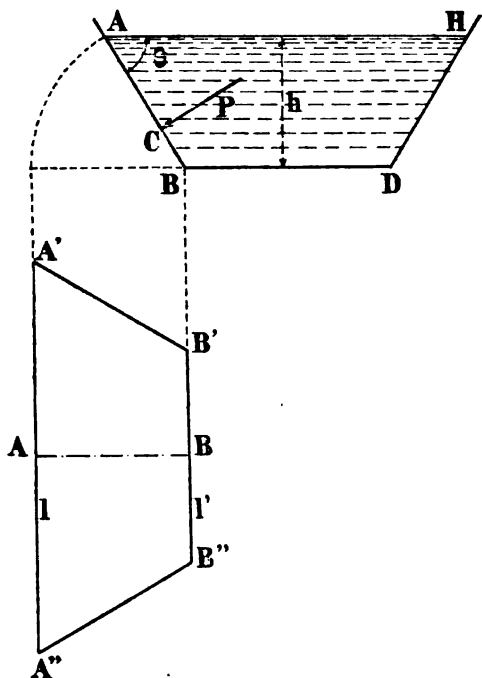


FIG. 282.

Faisons : $l = 1,00$ et $h = 5,00$, on obtient :

$$P = \frac{1000 \times 25,00}{2} = 12.500 \text{ kilogramme.}$$

17. Pression sur le fond d'un vase. — Sur tous les points du plan horizontal BD, la pression est la même et égale à

ρgh . La pression totale exercée par le liquide sur le fond du vase a donc pour valeur, en appelant S la surface du fond :

$$P = \rho ghS.$$

Par exemple, le radier d'un réservoir d'eau de 300 mètres carrés de surface, avec une hauteur d'eau de 4 mètres, supporte une charge :

$$P = 1000 \times 4,00 \times 300 = 1.200.000 \text{ kilogrammes.}$$

18. Détermination du centre de pression. — Pour déterminer le centre de pression C , rapportons la position d'un



FIG. 283.

point quelconque de la paroi AB à trois axes rectangulaires AX , AY , AZ , tels que le plan XAY soit celui de la surface libre, que l'axe AY se confonde avec l'intersection de ce plan avec celui de la paroi, l'axe AZ étant dirigé vers le bas dans le sens de la pesanteur, et AX se confondant avec la ligne d'eau AH .

Si AB est la trace du plan de la paroi sur le plan ZAX , l'angle $BAX = \theta$ mesure l'inclinaison de la paroi sur l'horizon.

Soit $d\omega$ un élément d'aire infiniment petit entourant le point M ; appelons ξ , η , ζ les coordonnées inconnues de C , et x_1 , y_1 , z_1 celles du centre de gravité g . En appliquant le théorème des moments des forces parallèles par rapport aux trois plans coordonnés, on obtient les équations :

$$P\xi = \int x p d\omega = \int x (p_0 + \rho g z) d\omega,$$

$$P\eta = \int y p d\omega = \int y (p_0 + \rho g z) d\omega,$$

$$P\zeta = \int z p d\omega = \int z (p_0 + \rho g z) d\omega.$$

ces équations peuvent s'écrire d'après la propriété du centre de gravité :

$$P\xi = p_0 Sx_1 + \rho g \int xz d\omega,$$

$$P\eta = p_0 Sy_1 + \rho g \int yz d\omega,$$

$$P\zeta = p_0 Sz_1 + \rho g \int z^2 d\omega.$$

Les intégrales doubles qui figurent dans le second membre sont calculées d'après les limites de l'aire S de la paroi, les trois équations permettront d'obtenir, avec P préalablement calculé, les valeurs des inconnues ξ , η , ζ .

Dans la plupart des cas, la paroi considérée présente un plan de symétrie sur lequel doit se trouver le centre C , alors il suffit de connaître sa cote ζ .

Considérons en particulier la dernière équation et négligeons la pression p_0 de l'atmosphère; on a :

$$P\zeta = \rho g \int z^2 d\omega.$$

On introduit l'abscisse α du point M dans le plan de la paroi par rapport aux axes AB et AY , on trouve, en désignant par α_1 l'abscisse du point g et par α_2 celle du centre C :

$$z = \alpha \sin \theta, \quad z_1 = \alpha_1 \sin \theta, \quad \zeta = \alpha_2 \sin \theta,$$

on voit que l'équation peut s'écrire, en divisant par $\sin \theta$:

$$P\alpha_2 = \rho g \sin \theta \int \alpha^2 d\omega. \quad (a)$$

L'intégrale $\int \alpha^2 d\omega$ représente le moment d'inertie de l'aire S de la paroi par rapport à l'axe AY ; si l'on prend ce moment par rapport à un axe parallèle passant par g , on trouve d'après un théorème connu, en désignant par $K^2 S$ ce nouveau moment d'inertie :

$$\int \alpha^2 d\omega = K^2 S + \int \alpha_1^2 d\omega = (K^2 + \alpha_1^2) S.$$

On peut donc écrire :

$$P\alpha_2 = \rho g \sin \theta (K^2 + \alpha_1^2) S.$$

Mais on a trouvé plus haut : $P = \rho g \sin \theta \alpha_1 S$; par suite on a la relation :

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{K^2}{\alpha_1}$$

Ainsi α_2 est toujours supérieur à α_1 , c'est-à-dire que le centre de pression est toujours plus bas que le centre de gravité.

19. CAS PARTICULIERS. — Nous appliquerons les formules qui précèdent à quelques cas particuliers que l'on rencontre assez fréquemment dans la pratique.

Rectangle. — Si la paroi mouillée présente la forme d'un rectangle $Abfd$ de largeur l et de hauteur λ , on a :

$$AB = \lambda = \frac{h}{\sin \theta}.$$

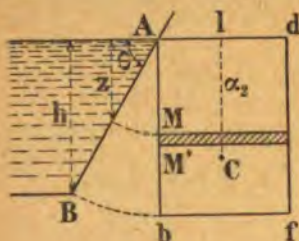


FIG. 281.

Prenons pour élément d'aire $d\omega$ le petit rectangle horizontal de base l et de hauteur $MM' = d\alpha$; on peut admettre que, sur tous ces points, la charge d'eau égale z ; d'ailleurs $d\omega = l d\alpha$.

L'équation (a) devient, en remplaçant $d\omega$ par sa valeur :

$$P \alpha_2 = \rho g l \sin \theta \int \alpha^2 d\alpha.$$

Pour le rectangle entier $Abfd$, il faut intégrer de 0 à λ , ce qui donne :

$$P \alpha_2 = \rho g l \sin \theta \int_0^\lambda \alpha^2 d\alpha = \rho g l \sin \theta \frac{\lambda^3}{3}.$$

D'autre part, la pression totale P a pour valeur :

$$P = \frac{\rho g l \lambda^2 \sin \theta}{2};$$

on en déduit :

$$\alpha_2 = \frac{\rho g l \sin \theta \lambda^3}{3P} = \frac{2}{3} \frac{\rho g l \sin \theta \lambda^3}{\rho g l \sin \theta \lambda^2},$$

c'est-à-dire, en réduisant :

$$\alpha_2 = \frac{2}{3} \lambda.$$

si la paroi était verticale, on aurait $\lambda = h$, par suite :

$$\alpha_2 = \frac{2}{3} h.$$

Dans ce cas, le centre de pression se trouve aux deux tiers de la profondeur, à partir de la surface libre.

Cette formule est à retenir pour le calcul de la poussée de l'eau contre les murs des réservoirs.

Trapezé. — Des considérations analogues déterminent le centre de pression d'un trapeze de bases l et l' . Posons $mn = u$, on a $u = \lambda l$; et, si l'on suppose que la grande base af se confond avec la ligne d'eau, on trouve ainsi :

$$u = l - \frac{l - l'}{\lambda} \alpha.$$

Par conséquent, en appelant λ la hauteur AB du trapeze :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} d\omega &= \frac{\lambda^3}{3} - \frac{l - l'}{\lambda} \frac{\lambda^4}{4} \\ &= \frac{\lambda^3}{12} (l + 3l'). \end{aligned}$$

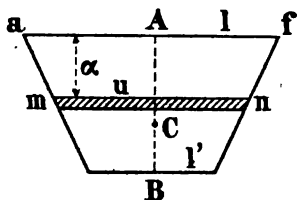


FIG. 285.

D'autre part, d'après la formule (a), on peut écrire :

$$P\alpha_2 = \frac{\rho g \sin \theta (l + 3l')}{12} \lambda^3,$$

et comme :

$$P = \frac{\rho g \sin \theta (l + 2l') \lambda^2}{6},$$

il en résulte pour la distance

$AC = \alpha_2$:

$$\alpha_2 = \frac{\lambda}{2} \frac{l + 3l'}{l + 2l'}.$$

Plus généralement, si le trapeze mouillé $abfd$ était quelconque avec des bases horizontales, le centre de pression se trouverait sur le diamètre mn des cordes parallèles à fd . En appelant α_2 sa distance à la ligne d'eau, λ la hauteur du trapeze, b la distance de ab à la ligne d'eau mesurée dans le plan de la paroi, le calcul donnerait :

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 (l + 3l') + 2\lambda b (4l' + 2l) + 6b^2 (l + l')}{\lambda (l + 2l') + 3b (l + l')}.$$

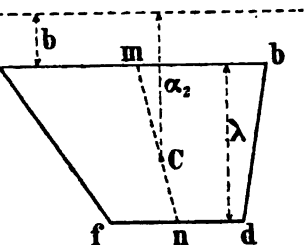


FIG. 286.

Dans ce cas, la formulé de la pression s'écrit :

$$P = \frac{1}{2} \rho g \lambda (l + l') \left[b + \lambda \frac{l + 2l'}{3(l + l')} \right] \sin \theta.$$

Pour $b = 0$, on retrouve les valeurs de α_2 et P précédemment obtenues; et pour $b = 0$, $l = l'$ on obtient les valeurs applicables au rectangle.

Triangle. — On passe du trapèze au triangle, en faisant $l = 0$ ou $l' = 0$. Dans le premier cas, on trouve :

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \frac{3\lambda^2 + 8b\lambda + 6b^2}{2\lambda + 3b};$$



Fig. 287.



Fig. 288.

et si le sommet A est à fleur d'eau (Fig. 287) :

$$\alpha_2 = \frac{3}{4} \lambda, \quad P = \frac{1}{3} \rho g l^2 \sin \theta.$$



Fig. 289.

Pour le triangle $a b D$, on obtient, en posant $KD = \lambda$:

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 + 4b\lambda + 6b^2}{\lambda + 3b};$$

et quand la base ab est à fleur d'eau :

$$\alpha_2 = \frac{\lambda}{2}, \quad P = \frac{1}{6} \rho g b^2 \sin \theta.$$

Il est facile de déterminer le centre de pression pour un triangle quelconque ABC. On le divise en deux par une horizontale BD; puis on détermine pour le triangle ABD l'abscisse α_2 du centre de pression, et la pression P exercée sur ce triangle. De même, pour le triangle BDC, on aura aussi α_2 et P . Ensuite, d'après la com-

les forces parallèles, on aura pour l'abscisse α_2 du centre de ABC :

$$\alpha_2 = \frac{P'\alpha_2' + P''\alpha_2''}{P' + P''}.$$

quelconque. — Ayant déterminé la pression et le centre de gravité pour un triangle, on déterminera le centre de gravité d'un polygone quelconque en le divisant en triangles.

Si l'on désigne par P', P'', P''', \dots , les pressions sur ces triangles, et $\alpha_2', \alpha_2'', \alpha_2''', \dots$, les abscisses des centres de gravité correspondants par rapport à la ligne d'eau, on aura :

$$\alpha_2 = \frac{P'\alpha_2' + P''\alpha_2'' + P'''\alpha_2''' + \dots}{P' + P'' + P''' + \dots}.$$

— Le calcul d'une section circulaire de rayon r est un peu plus long. La formule (a) donne pour le centre de gravité posant $AC = \alpha_2$, $AK = d$:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{1}{4} \frac{r^2}{\alpha_1},$$

$$P = \pi \rho g r^3 (r + d) \sin \theta.$$

On désigne l'abscisse OA du centre de gravité par α_1 . Si la ligne d'eau est tangente au point K , on a $\alpha_1 = r$, $d = 0$, et :

$$P = \pi \rho g r^3 \sin \theta.$$

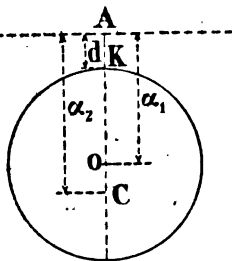


FIG. 290.

On considère un demi-cercle vertical dont le diamètre affleure, on a :

$$\alpha_2 = \frac{3\pi}{16} r = 0,589r, \quad P = \frac{2}{3} \pi \rho g r^3.$$

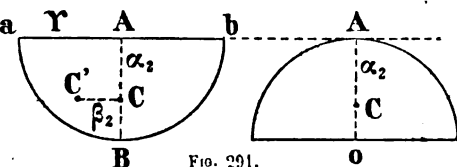


FIG. 291.

On considère un demi-cercle dont le sommet A est sur la ligne d'eau :

$$\alpha_2 = \frac{r}{4} \frac{15\pi - 32}{3\pi - 4} = 0,696r, \quad P = \frac{3\pi - 4}{6} \pi \rho g r^3.$$

Si l'on avait un quart de cercle vertical aAB , le calcul donnerait pour le centre de pression C' :

$$\alpha_2 = \frac{3\pi r}{16}, \quad \beta_2 = \frac{3r}{8},$$

$$P = \frac{2gr^3}{3}.$$



FIG. 232.

Ellipse. — Dans le cas d'une ellipse dont le petit axe est horizontal, on trouverait, en posant $OK = a$, $OB = b$:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{1}{4} \frac{a^2}{\alpha_1}.$$

$$P = \pi r g a b + (a + d) \sin \theta.$$

Si l'ellipse était tangente à la surface de l'eau : $\alpha_1 = a$, $d = 0$; on aurait :

$$\alpha_2 = \frac{5}{4} a, \quad P = \pi r g a^2 b \sin \theta.$$

20. Pression sur une surface courbe. — Lorsqu'une paroi courbe est pressée par un liquide en équilibre, les pressions qui s'exercent sur ses différents points et qui sont normales à la paroi ne sont plus parallèles entre elles, de sorte que leur composition ne conduit que rarement à une résultante unique. Il faut alors considérer la résultante générale et le couple résultant de toutes ces pressions.

On obtient une résultante unique dans le cas d'un vase de forme quelconque qui renferme, par exemple, un certain volume d'eau. Il serait facile de démontrer que les pressions exercées par le liquide sur tous les points de la paroi interne du vase sont réductibles à une force unique, verticale et égale au poids du liquide lui-même. Il suffit, pour se convaincre de ce fait, de placer le vase sur le plateau d'une balance et de le peser avant et après l'introduction de l'eau ; l'augmentation de poids représente précisément la résultante des pressions internes.

21. Pression sur une demi-sphère. — Supposons que le vase ait la forme d'une demi-sphère de rayon R ; les pressions normales sur les divers points de la paroi concourent au centre O où il est possible de les composer, et, par

symétrie, la résultante a la direction de la verti-

un point quelconque
à profondeur z ; tous
s de la zone élémen-
taire dz qui passent
supportent une pres-
sion, et la zone elle-
même une pression ré-
sultante dirigée suivant OC :

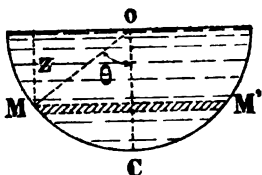


FIG. 293.

$$dP = 2\pi R dz \times \rho g z \times \cos \theta.$$

observe que $z = R \cos \theta$, alors :

$$dP = 2\pi \rho g z^2 dz.$$

pour la pression totale sur la paroi, il suffit d'inté-
grer l'équation depuis 0 jusqu'à R; on obtient :

$$P = \rho g \times 2\pi \int_0^R z^2 dz,$$

donc :

$$P = \rho g \times \frac{2\pi R^3}{3}.$$

on vérifie que la pression résultante est égale au poids de
l'eau contenue dans le vase.

Pression dans un tuyau cylindrique. — On obtient
encore une résultante unique
avec une paroi qui présente la
forme d'une surface de révolu-
tion. Dans chaque section trans-
versale, la résultante des pres-
sions normales est dirigée sui-
vant la verticale qui coupe l'axe,
de sorte que ces résultantes par-
tielles sont parallèles et peuvent
se réduire à une force unique.

Considérons un demi-cylindre à section circulaire de

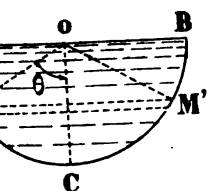


FIG. 294.

rayon R et de longueur L , dont tous les points supportent intérieurement la même pression p par mètre carré. Calculons la résultante de toutes ces pressions, qui est évidemment située dans le plan médian du cylindre et dirigée suivant la verticale OC .

La pression sur une bande de paroi de largeur ds passant par le point M a pour valeur $p ds$; la bande symétrique qui passe par M' supporte de même une pression $p ds$; les deux pressions réunies donnent une résultante dP dirigée suivant OC et qui a pour expression :

$$dP = 2pl \cos \theta ds.$$

On a donc :

$$P = 2pl \int \cos \theta ds = 2pR \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta,$$

car $ds = R d\theta$.

Effectuant l'intégration :

$$P = 2pR \left[\sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2pR.$$

La pression totale sur le demi-cylindre est égale au produit de la pression p par la surface du plan diamétral AB .

On voit que la pression P est égale à celle qui s'exerce sur le plan AB , projection horizontale du demi-cylindre.

23. Principe d'Archimède. — L'expérience montre que les corps solides plongés dans l'eau semblent éprouver une perte de poids. Ils sont donc soumis, de la part du liquide à une action dirigée de bas en haut; cette action a reçu le nom de poussée.

Lorsqu'un corps solide est plongé dans un liquide en équilibre, les pressions que le liquide exerce sur sa surface se traduisent par une poussée résultante, verticale, dirigée de bas en haut, et égale au poids du liquide déplacé.

C'est le principe découvert par Archimède, il y a près de deux mille ans.

Le principe d'Archimède peut être démontré rigoureuse-

par le calcul; il est également possible de l'établir a priori par le raisonnement suivant :

Considérons une masse d'eau en équilibre contenue dans une vase, et supposons qu'une portion quelconque vienne à se solidifier sans changer de poids ni de volume; le corps ainsi obtenu restera évidemment en équilibre au milieu du liquide; ceci prouve que les pressions supportées par les divers éléments de sa surface ont une résultante qui est égale et directement opposée à son poids. Or toutes ces pressions restent les mêmes lorsqu'on remplace ce solide par un solide réel de même forme et d'une nature quelconque: elles ont donc toujours une résultante qui est une force verticale dirigée de bas en haut et égale au poids du liquide déplacé.

Cette résultante, ou poussée verticale, est appliquée au centre de gravité du liquide déplacé; pour cette raison, ce point est appelé *centre de poussée* ou *centre de carène*.

Pour raisonner en toute rigueur, considérons un corps plongé dans un liquide en équilibre et proposons-nous de composer les pressions que ce liquide exerce sur la surface du corps. Soit p la pression du liquide en un point quelconque $M(x, y, z)$, dS l'élément de surface infinitésimal sur lequel la pression est exercée. Cherchons les composantes X, Y, Z de cette pression suivant les axes Ox, Oy, Oz ; soient α, β, γ les angles aigus que la normale à la surface du corps en M fait avec ces axes; on a :

$$X = p dS \cos \alpha, \quad Y = p dS \cos \beta, \quad Z = p dS \cos \gamma.$$

Considérons le cylindre infinitésimal parallèle à Ox , dont les bases s'appuient sur le contour de l'élément dS ; ce cylindre coupe la surface du corps suivant un second élément dS' sur lequel la pression du liquide est $p dS'$, car dS et dS' sont situés à la même distance du plan xy . La composante de $p dS'$ parallèle à Ox est donc $X' = p dS' \cos \alpha'$, α' désignant l'angle aigu que forme la normale à la surface en M' avec Ox . Mais, d'autre part, on a

$$dS \cos \alpha = dS' \cos \alpha' = d\omega,$$

appelant $d\omega$ l'aire de la section droite du cylindre MM' ; par conséquent, les composantes X et X' sont égales et directement opposées. Ainsi donc les pressions horizontales sur dS et dS' s'annulent, et, comme on peut étendre ce raisonnement à tous les

éléments dS situés sur la surface du corps, on en conclut que les composantes des pressions suivant Oz se font équilibre.

On démontrerait identiquement que toutes les composantes des pressions parallèles à Oy se font aussi équilibre.

Ainsi déjà, l'action résultante du fluide sur le corps est une force verticale; pour l'évaluer, considérons le cylindre MM' , parallèle à Oz et s'appuyant sur dS ; ce cylindre coupe la surface du corps suivant un élément dS^* sur lequel la pression exercée par le fluide est $p = p^* + \rho g(z^* - z)$, en appelant z^* l'ordonnée du

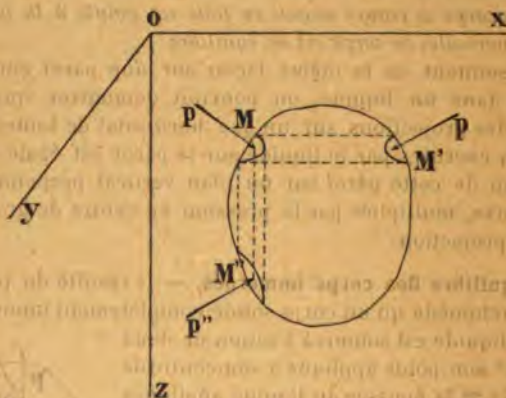


FIG. 295.

point M' ; la composante Z' de cette pression suivant Oz est dirigée de bas en haut et a pour valeur :

$$Z' = [p + \rho g(z^* - z)] dS^* \cos \gamma^*,$$

γ^* désignant l'angle aigu que la normale en M' à la surface forme avec Oz . Mais on a comme plus haut :

$$dS^* \cos \gamma^* = dS \cos \gamma = d\omega^*;$$

par suite :

$$Z' = [p + \rho g(z^* - z)] d\omega^*.$$

Les composantes Z et Z' étant opposées et $Z' > Z$, leur différence

$$Z' - Z = \rho g(z^* - z) d\omega^*$$

représente la poussée exercée de bas en haut par le liquide sur le cylindre MM' ; or, le produit $(z^* - z) d\omega^*$ représente le volume de ce cylindre; $\rho g(z^* - z)$ représente le poids d'un cylindre égal

fluide considéré; par conséquent la poussée du liquide sur le corps est égale au poids d'un cylindre égal de liquide. En faisant ce raisonnement à tous les cylindres élémentaires verticaux dans lesquels on peut décomposer le corps, on arrive à l'énoncé du principe d'Archimède.

REMARQUE. — Dans la démonstration précédente, si les pressions du fluide aux points M et M' avaient été égales, les composantes Z et Z' se seraient annulées, de sorte que le corps entier eût été en équilibre. On peut donc dire que, *si un corps se trouve soumis en tous ses points à la même pression normale, ce corps est en équilibre.*

En raisonnant de la même façon sur une paroi courbée plongée dans un liquide, on pourrait démontrer que la résultante des projections sur un axe horizontal de toutes les pressions exercées par le liquide sur la paroi est égale à la résultante de cette paroi sur un plan vertical perpendiculaire à l'axe, multipliée par la pression au centre de gravité de cette projection.

Équilibre des corps immergés. — Il résulte du principe d'Archimède qu'un corps solide complètement immergé dans un liquide est soumis à l'action de deux forces : 1° son poids appliqué à son centre de gravité G ; 2° la poussée du liquide appliquée au centre de poussée G' . Pour que le corps soit en équilibre, il faut et il suffit que ces deux forces soient égales et directement opposées; c'est-à-dire que le poids du corps soit égal à celui du liquide dont il occupe la place, et que le centre de gravité du solide

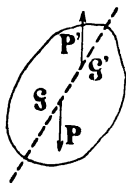


FIG. 296.

et le centre de gravité du liquide déplacé soient sur une même verticale. On cherche, en outre, à quelle condition l'équilibre du corps est stable, on voit qu'il suffit que le centre de poussée G' soit placé au-dessus du centre de gravité G ; car, dans le cas contraire, le moindre déplacement imprimé au corps le ferait basculer, et l'équilibre serait instable.

Plus généralement, soient : V , le volume du solide immergé; ρ , sa densité; ρ' , la densité du liquide; on a :

$$P = \rho g V, \quad P' = \rho' g V.$$

Trois cas peuvent se présenter :

1^o Lorsque $\rho > \rho'$, on a $P > P'$, et le corps est sollicité par une force $P - P'$ qui tend à le faire descendre au fond du liquide. C'est ce qu'on observe pour le fer et le plomb quand on les plonge dans l'eau ;

2^o Quand $\rho = \rho'$, alors $P = P'$, et le corps se tient en équilibre de lui-même au milieu du liquide ; c'est le cas examiné en premier lieu ;

3^o Enfin, lorsque $\rho < \rho'$, on a $P < P'$, et le solide est sollicité par une résultante $P' - P$ qui tend à le faire mouvoir de bas en haut et à le ramener à la surface. C'est ce qu'on observe pour le bois et le liège plongés dans l'eau.

25. Équilibre des corps flottants. — Les conditions d'équilibre d'un corps partiellement immergé, c'est-à-dire qui flotte à la surface du liquide, sont analogues à celles des corps complètement immergés. *Le poids du corps appliqué à son centre de gravité doit être égal et directement opposé à celui du liquide déplacé appliqué au centre de poussée.*

Dans le cas étendu où le corps et le liquide sont tous deux homogènes, le point G' coïncide avec le centre de gravité de la portion du corps qui est immergée ; alors, si l'on désigne par V le volume du corps, par V' celui de la partie immergée, par ρ et ρ' les poids spécifiques respectifs du liquide et du solide, on doit avoir :

$$V\rho = V'\rho', \quad \text{d'où} \quad \frac{V'}{V} = \frac{\rho'}{\rho}.$$

Mais dans ce cas le point G' est généralement placé au-dessous du point G , de sorte que la *stabilité* de l'équilibre du corps ne semble rien moins qu'assurée, et que le moindre déplacement de ce corps paraît devoir amener son renversement. En réalité, lorsque le corps flottant subit un certain déplacement, la partie immergée se trouve modifiée, le centre de carène se déplace aussi, et l'équilibre du corps peut encore être stable, à condition que le point G' ne soit pas trop au-dessous du point G .

La ligne GG' étant d'abord verticale, si elle prend la position inclinée Gg' , le centre de carène passe soit en G' sur la verticale GG' , soit en g' ou en G'' ; dans le premier cas, l'équi-

subsiste évidemment; dans le second, le couple formé par le poids du corps et la poussée du liquide tend à accroître l'inclinaison de Gg' sur la verticale, de sorte que l'équilibre est instable; dans le troisième cas, le même couple tend, au contraire, à redresser la droite Gg'' , et ainsi assure la stabilité.

On appelle position limite du point H' , lorsque le déplacement du corps est infiniment petit, la position où le point H' a reçu le nom de *métacentre*; ce point est déterminé par l'intersection de la droite $G'G$ très légèrement inclinée avec la verticale du point G' , nous verrons plus loin qu'il se confond avec le centre de courbure en un point G' de la courbe de carène, lieu des centres de carène G du plan vertical de symétrie du corps flottant.

Il voit donc que la stabilité du corps flottant sera assurée dans ses diverses positions, si le métacentre reste au-dessus du centre de gravité du corps G .

Stabilité des corps flottants en équilibre. — Le plan de la surface libre de l'eau est un plan de flottaison du corps; son intersection avec la surface du corps est une ligne de flottaison, et son intersection avec le corps est la ligne de flottaison ou d'affleurement. Nous supposons que le corps flottant admet un plan vertical de symétrie, dans lequel se trouvent le centre de gravité et le centre de carène. Ce cas est très étendu dans l'application.

Supposons que KL et $K'L'$ soient deux plans de flottaison voisins; soient G' et G'' les centres de carène correspondants. Les parties plongées dans les deux cas auront le volume commun $K'ILBK' = V - v$, en désignant par v le volume des onglets $KK'IR$ ou $LRIL'$, et par V le volume immergé du corps.

Soient C et C' les centres de gravité des deux onglets, S le centre de gravité du solide $V - v$; le centre de carène G' sera déterminé par la proportion :

$$\frac{CG'}{G'S} = \frac{V - v}{v},$$

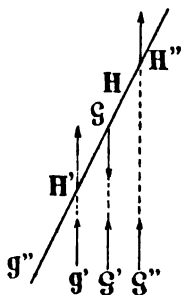


FIG. 297.

et le centre G' sera déterminé de même par :

$$\frac{C'G'}{G'S} = \frac{V-v}{v} = \frac{CG'}{G'S}$$

Cette proportion montre que la droite $G'G''$ est parallèle à CC' . Or les onglets étant très petits, les points C et C' peuvent être considérés comme situés dans l'un ou l'autre des plans de flottaison, et par conséquent dans le plan KL . La ligne $G'G''$ sera donc parallèle au plan de flottaison ; alors $G'G''$ est tangente en G' à la surface lieu des centres de carène, et, comme cela est vrai quel que soit le sens dans lequel on fait tourner le plan de flottaison d'un angle très petit, il en

résulte que toutes les tangentes en G' sont parallèles à ce plan ; donc le plan tangent en un point quelconque de la surface de carène est parallèle au plan de flottaison correspondant.

Il résulte de là que, G étant le centre de gravité du corps, la ligne GG' est normale en G à la surface de carène, lieu des centres de carène ; car, dans le cas d'équilibre, cette ligne étant verticale est perpendiculaire au plan de flottaison qui est horizontal, et, par suite, au plan tangent en G' qui est parallèle au plan de flottaison. On voit en outre que le métacentre H , intersection des deux droites infiniment rapprochées $G'G$ et $G'H$, n'est autre chose que le point de rencontre de deux normales très voisines à la courbe de carène ; il se confond donc avec le centre de courbure au point G' de cette courbe.



FIG. 298.



FIG. 299.

On peut voir ensuite que le centre de gravité d'une section de flottaison du corps est sur son intersection MI avec une section de flottaison infiniment voisine. En effet, soient Q et Q' les centres de gravité des aires KMI = ω et MIL = ω' ; ces points se confondent sensiblement avec C et C'; et le centre de gravité de KL s'obtiendra en divisant QQ' en deux parties inversement proportionnelles à ces aires.

Appelons θ l'angle infiniment petit des deux plans de flottaison, r et r' les distances QR et Q'R' des points Q et Q' à la ligne MI. Comme on peut assimiler les onglets à des solides de révolution, nous aurons d'après le théorème de Guldin :

$$\text{Vol. KMIK}' = \omega r \theta, \quad \text{Vol. LMIL}' = \omega' r' \theta;$$

ces deux volumes sont égaux, par suite $\omega r = \omega' r'$; c'est-à-dire :

$$\frac{r}{r'} = \frac{\omega'}{\omega};$$

à cause des triangles semblables QRO et Q'R'O, on aura aussi :

$$\frac{QO}{Q'O} = \frac{\omega'}{\omega},$$

ce qui montre que le point O est le centre de gravité de la section d'affleurement.

La ligne MI, étant l'intersection de deux plans perpendiculaires au plan vertical de symétrie, est elle-même perpendiculaire à ce plan, et, par suite, à la droite QQ', qui se projette par son pied dans ce plan; la longueur QQ' est donc égale à la somme des distances r et r' .

Soit a un élément d'aire de la section KMI; le produit θar représente le volume de l'élément d'onglet correspondant. D'après le théorème de Guldin, le volume total v de l'onglet est égal à $\theta \Sigma ar$, et, d'après la formule générale du centre de gravité, on a :

$$QO = \frac{\theta ar^2 + \theta a'r'^2 + \dots}{\theta ar + \theta a'r' + \dots} = \frac{\Sigma ar^2}{\Sigma ar},$$

c'est-à-dire, en posant $\Sigma ar^2 = I$:

$$QO = \frac{I\theta}{v}.$$

On aurait de même pour l'autre onglet :

$$Q'O = \frac{I'\theta}{v};$$

et, comme $QO + Q'O = QQ'$, il en résulte :

$$QQ' = \frac{\theta}{v}(I + I') = \frac{\theta I}{v},$$

I étant le moment d'inertie de la section d'affleurement par rapport à MI .

Enfin, si l'on observe que G' et G'' sont les centres de carène qui correspondent aux deux plans KL et $K'L'$, on sait que la droite $G'G''$ est parallèle à QQ' , de sorte que l'on a :

$$\frac{QQ'}{G'G''} = \frac{v}{v};$$

par suite :

$$G'G'' = \frac{\theta I}{v}.$$

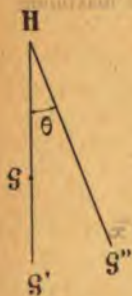


Fig. 300.

De plus, θ étant l'angle de deux plans de flottaison consécutifs, est aussi l'angle des deux normales HG' et HG'' , et H est le centre de courbure ; l'expression du rayon de cour-

bure est donc :

$$HG' = \frac{G'G''}{\theta},$$

ou bien, d'après la valeur de $G'G''$:

$$HG' = \frac{I}{v}.$$

Comme la condition de stabilité du corps flottant est

GG', si l'on appelle a la distance des centres de gravité G et G', cette condition s'écrira :

$$\frac{I}{V} > a.$$

distance du centre de gravité du corps au centre de flottaison doit être inférieure au quotient du plus petit moment d'inertie de la section d'affleurement, par rapport à tous les axes passant par son centre de gravité, par le volume immergé.

On peut raisonner d'une façon plus concise en partant du principe de Dirichlet sur la stabilité de l'équilibre d'un système matériel.

Il faut d'abord que, pour que le corps flottant soit en équilibre stable, il faut que, en lui imprimant un déplacement aussi petit qu'on voudra, ce déplacement reste toujours très petit. Si les forces qui agissent sur le corps dérivent d'un potentiel U , l'équilibre sera stable lorsque la fonction U passera par un maximum.

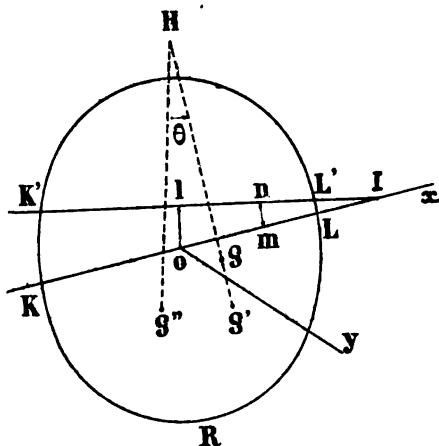


FIG. 301.

Le plan de la figure est mené par le centre de gravité G du corps normalement à l'intersection I des deux plans de flottaison voisins KL et K'L'; ce plan contient le centre de carène G'. Nous supposons, pour simplifier, que l'intersection I est exté-

rieure au corps, ce qui ne diminue pas la généralité de la démonstration.

Appelons :

M , la masse du corps ;

V , le volume KRL immergé dans le liquide de densité ρ ;

a , la distance du centre de gravité G au centre de carène ; cette distance sera négative si G est au-dessus de G' ;

z_0 et z , les distances du centre de gravité du corps au plan de flottaison K'L' pris pour plan de comparaison.

Les forces qui sollicitent le corps lorsque le plan de flottaison est parvenu en K'L' comprennent son poids Mg , la poussée opposée du liquide $-V\rho g$, et la poussée du volume K'LL'.

La distance de G à K'L' est $z + a \cos \theta$, et, si l'on néglige le cube de θ , on peut écrire :

$$z + a \cos \theta = z + a \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) ;$$

de sorte que l'accroissement du potentiel des deux premières forces est :

$$Mg(z - z_0) - V\rho g \left[z + a \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) - (z_0 + a) \right] = \frac{\theta^2}{2} \rho g Va, \quad (1)$$

en observant que $M = V\rho$.

Pour calculer le travail, c'est-à-dire la variation du potentiel de la poussée sur K'LL', désignons par :

S , l'aire de la section d'affleurement KL ;

oy , la perpendiculaire abaissée de son centre de gravité O sur la trace K'LX ;

dS , un élément de l'aire S au point m ;

u , la distance mn de cet élément à K'L' ;

u_0 , la valeur *ol* de u au point O ;

I , le moment d'inertie de l'aire S par rapport à oy .

Comme l'axe oy est mené par le centre de gravité de l'aire S , on a :

$$\int x dS = 0. \quad (\alpha)$$

D'autre part, la poussée élémentaire sur le point m , égale à $-\rho g u dS$, donne le potentiel $-\frac{1}{2} \rho g u^2 dS$; mais :

$$u = u_0 - x \sin \theta,$$

et, si l'on remplace $\sin \theta$ par θ , le potentiel de la poussée due à K'LL' aura pour expression :

$$-\frac{1}{2} \rho g \int (u_0 - \theta x)^2 dS = -\frac{1}{2} \rho g \int (u_0^2 - 2u_0\theta x + \theta^2 x^2) dS,$$

à-dire, en tenant compte de (α) :

$$-\frac{1}{2} \rho g (u_0^2 S + I \theta^2). \quad (2)$$

l'accroissement ΔU du potentiel total, c'est-à-dire la somme des expressions (1) et (2), sera :

$$\Delta U = -\frac{1}{2} \rho g \left[u_0^2 S + \theta^2 (I - V \alpha) \right];$$

Pour que l'équilibre du corps flottant soit stable, il faut que ΔU soit un minimum, ou bien que ΔU soit négatif. Cette condition sera toujours satisfaite, quelle que soit l'orientation de la ligne de flottaison KL, si α est négatif ou si G' est au-dessus de G . Dans le cas contraire, comme u_0 est arbitraire, il faudra que l'on ait $I - V \alpha > 0$,

$$\frac{I}{V} > \alpha,$$

et la condition précédemment trouvée. Le minimum de I se rapporte aux axes oy passant par le centre de gravité de la section S .

27. Stabilité des prismes flottants. — 1° Supposons que le corps flottant soit un prisme carré de longueur l , de section a^2 .

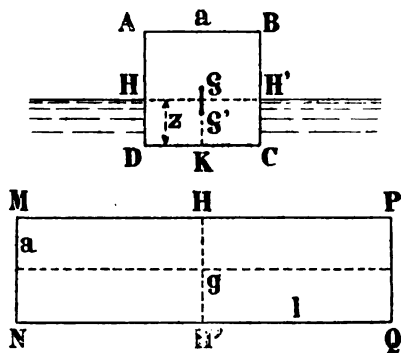


FIG. 302.

de section a^2 , et de poids spécifique ρ' ; appelons z la hauteur immergée et ρ le poids spécifique du liquide.

On a d'abord pour l'équilibre :

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{a}\right)^2 < \frac{la^2\rho'}{laz\rho} = \left(\frac{z}{a} - 1\right)^2$$

d'où :

$$\frac{z}{a} = \frac{\rho'}{\rho} \quad (4)$$

G étant le centre de gravité de la section ABCD, G' celui de la section immergée HH'CD, on a d'autre part :

$$GK = \frac{a}{2}, \quad G'K = \frac{z}{2};$$

de sorte que la distance du centre de gravité du prisme au centre de carène est :

$$GG' = \frac{a}{2} - \frac{z}{2}.$$

La section d'affleurement MNPQ est un rectangle de base l et de hauteur a ; le moment d'inertie de cette section par rapport à l'axe EF passant par son centre de gravité g est, comme on sait, $\frac{la^3}{12}$.

La condition de stabilité du prisme est donc, d'après le théorème précédent,

$$\frac{a}{2} - \frac{z}{2} < \frac{\frac{la^3}{12}}{laz},$$

ou

$$6z(a - z) < a^2,$$

ou encore :

$$z^2 - az + \frac{a^2}{6} > 0.$$

Mais, si z' et z'' sont les racines de l'équation :

$$z^2 - az + \frac{a^2}{6} = 0, \quad \text{d'où} \quad \left. \begin{matrix} z' \\ z'' \end{matrix} \right\} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{12}};$$

l'inégalité précédente sera satisfaite pour :

$$z < z' \quad \text{ou} \quad z > z'';$$

oit donc avoir :

$$\frac{z}{a} < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad \text{ou} \quad \frac{z}{a} > \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right);$$

on peut encore écrire d'après (1), en calculant les deux membres des inégalités :

$$\frac{\rho'}{\rho} < 0,212, \quad \text{ou} \quad \frac{\rho'}{\rho} > 0,788.$$

Supposons encore que le corps flottant soit un prisme de longueur l , de section a^2 et de densité ρ' , mais que ses diagonales de la section soit verticale. Appelons z hauteur immergée, ρ la densité du liquide. Pour l'eau,

calculant les poids, on obtient d'abord :

$$la^2\rho' = lz^2\rho,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{z^2}{a^2} = \frac{\rho'}{\rho}. \quad (1)$$

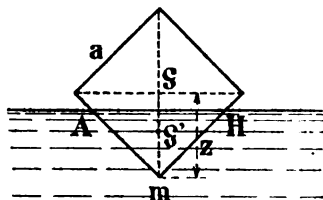


FIG. 303.

Soient G le centre de

gravité du carré, G' celui du triangle isocèle AmH ; on a, d'autre part :

$$mG = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad mG' = \frac{2}{3} z;$$

il suit :

$$GG' = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} z.$$

La section d'affleurement AH est un rectangle de longueur l et de largeur $2z$; le moment d'inertie de cette section par rapport à un axe parallèle à sa longueur et passant par son centre de gravité égale $\frac{2}{3} lz^3$.

La condition de stabilité est donc :

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} z < \frac{2lz^3}{3lz^2},$$

ce que l'on peut écrire :

$$a\sqrt{2} < \frac{8}{3}z,$$

ou encore :

$$\frac{z^2}{a^2} > \frac{18}{64},$$

enfin, d'après (1) :

$$\frac{\rho'}{\rho} > 0,281.$$

En examinant le cas où les trois arêtes du prisme seraient noyées, on trouverait de même la condition :

$$\frac{\rho'}{\rho} < 0,719.$$



FIG. 304.

3° Pour un prisme triangulaire, le calcul donne comme condition de stabilité :

$$\frac{\rho'}{\rho} > \cos^4 \varphi;$$

si le prisme est équilatéral, $\varphi = 30^\circ$, $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et l'inégalité devient :

$$\frac{\rho'}{\rho} > 0,563.$$

Enfin, lorsque l'arête horizontale est à la partie supérieure, on doit avoir :

$$\frac{\rho'}{\rho} < 0,438.$$

28. Mesure des hauteurs par le baromètre. — On se propose d'établir une formule qui permette de calculer approximativement la hauteur d'un point de l'atmosphère au-dessus de la surface terrestre, d'après les indications fournies par le baromètre.

Pour cela, on part de l'équation (2) de l'hydrostatique (5), qui est applicable à tous les fluides en équilibre, et en particulier aux gaz tels que l'air; mais la densité ρ n'est plus constante ni la valeur de g .

Supposons que l'atmosphère soit en parfait état d'équilibre,

un mouvement des molécules d'air. Soient A et B deux points situés sur une même verticale, le premier appartenant à la surface terrestre mn ; il faut calculer la distance $AB = z$.

À l'état d'équilibre de l'air, on a la relation :

$$(Xdx + Ydy + Zdz).$$

On prend le point A pour l'origine des coordonnées, l'axe vertical est dirigé vers le haut, on a $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -\rho g$ de sorte que l'équation

$$dp = -\rho g dz. \quad (m)$$

On applique les lois de Mariotte et de Laplace sur la compression

des gaz, la pression p et la densité ρ sont liées entre elles par la relation :

$$\rho = \frac{p}{K(1 + \alpha t)};$$

le coefficient constant pour un même gaz, mais variable d'un gaz à l'autre; dans le cas présent, c'est le rapport de la force de dilatation de l'air à sa densité à la température 0; α est le coefficient de dilatation de l'air, égal à 0,00366; t est la température de l'air, on prendra égale à la moyenne des températures observées aux stations A et B.

g_0 l'intensité de la pesanteur au point A situé à la distance R du centre de la terre; au point B à la distance $R + z$, la loi de Newton cette intensité prendra la valeur :

$$g = \frac{g_0 R^2}{(R + z)^2}.$$

l'équation (m) devient, en remplaçant ρ et g par leurs valeurs respectives :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_0}{K(1 + \alpha t)} \frac{R^2 dz}{(R + z)^2}.$$

l'intégration entre les limites 0 et z donne :

$$\log \frac{p_0}{p} = \frac{g_0}{K(1 + \alpha t)} \frac{z}{1 + \frac{z}{R}}.$$

puisque la hauteur z est assez petite par rapport au rayon R de la terre, on peut écrire :

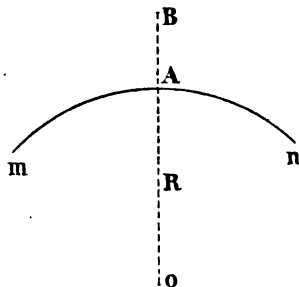


FIG. 305.

rayon R , lequel est voisin de 6.366 kilomètres, pour que l'on puisse négliger le rapport $\frac{z}{R}$ au dénominateur; alors l'équation s'écrit :

$$z = \frac{K(1 + \alpha t)}{g_0} \log \frac{p_0}{p}. \quad (n)$$

p_0 représente la pression de l'air au point A, p la pression au point B. Pour les latitudes voisines de Paris, $g = 9,81$. Les logarithmes qui figurent au second membre sont népériens, et, si l'on se sert des logarithmes vulgaires, il faudra les diviser par le module de transformation $M = 0,43429$.

Ce ne sont pas les pressions p_0 et p que l'on observe directement aux stations A et B, mais les hauteurs barométriques correspondantes h_0 et h ; si l'on remarque que ces pressions sont entre elles en raison directe des hauteurs et en raison inverse de l'intensité de la pesanteur aux points où elles s'exercent, c'est-à-dire en raison inverse des carrés des distances de ces points au centre de la terre, on pourra écrire :

$$\frac{p_0}{p} = \frac{h_0}{h} \frac{(R + z)^2}{R^2} = \frac{h_0}{h} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^2.$$

L'équation (n) devient donc :

$$z = \frac{K(1 + \alpha t)}{g_0} \left[\log h_0 - \log h + 2 \log \left(1 + \frac{z}{R}\right) \right];$$

mais dans la plupart des cas on pourra encore négliger le rapport $\frac{z}{R}$.

Pour raisonner en toute rigueur, il faudrait tenir compte des variations de g_0 avec la latitude λ du lieu de l'observation, ce qui introduirait le facteur $1 + 0,00265 \cos 2\lambda$. Il faudrait également tenir compte des variations de α provenant de l'état hygrométrique de l'air; à cet effet on pose $\alpha = 0,004$.

En résumé, on pourra écrire avec les logarithmes vulgaires :

$$z = \frac{K}{Mg_0} (1 + 0,004t) (1 + 0,00265 \cos 2\lambda) (\log h_0 - \log h).$$

D'après les observations de Ramond, confirmées par celles de Biot et d'autres plus récentes, on peut poser en France :

$$\frac{K}{Mg_0} = 18400.$$

Lorsque la hauteur z ne dépasse guère 2.000 mètres, on peut utiliser la formule plus simple :

$$z = 18402 (1 + 0,004t) (\log h_0 - \log h).$$

ans les mêmes conditions, on pourra se servir de la formule
abinet, sensiblement équivalente, et qui n'exige pas de loga-
nes :

$$z = 16000(1 + 0,004t) \frac{h_0 - h}{h_0 + h}.$$

alley employait la formule plus simple encore :

$$z = 18500 (\log h_0 - \log h).$$

outes ces formules donnent z en mètres; elles ne sont appli-
es que pour calculer approximativement de grandes hauteurs;
l'exposerait à de grosses erreurs en les utilisant pour les
lements ordinaires. D'ailleurs, elles supposent que les obser-
ons sont faites par un temps très calme, sans pluie ni courant

os un calcul de hauteur fait récemment en Suisse, on avait :

$$47^{\circ}, 12', \quad t_0 = 6^{\circ}, 76, \quad t_1 = - 5^{\circ}, \quad t = \frac{6,76 - 5}{2} = 0^{\circ}, 88, \\ = 716^{\circ}, \quad h = 558^{\circ}, \quad \log h_0 - \log h = 0,10872.$$

formule approchée donne $z = 2.012$ mètres; celle de
ey accuse $z = 2.010$ mètres. La hauteur déterminée par les
édés géodésiques était de 2.008 mètres. On voit que l'accord
rés satisfaisant; mais les observations ont été faites par un
s exceptionnellement calme.

ns des conditions ordinaires, on peut considérer que la tem-
ure moyenne diminue de 1 degré par 165 mètres d'augmen-
n d'altitude.

EXERCICES

*Démontrer que la pression moyenne exercée par un liquide
nt sur une surface courbe est égale à la pression sur le centre
ravité de la surface.*

observe d'abord que la projection sur un axe de la pression
'exerce sur un élément de surface courbe est égale à la pres-
que supporte la projection de cet élément sur un plan
gal à l'axe.

a démontre ensuite que la somme des projections sur un axe
outes les pressions exercées par le liquide sur la surface est
e à la projection de cette dernière sur un plan normal à
, multipliée par la pression sur le centre de gravité de cette
ection.

démonstration du théorème découle immédiatement de ces
propriétés.

2. Une cavité hémisphérique fermée par une paroi plane coïncidant avec sa base est exactement pleine d'eau. Comment faut-il orienter la base pour que la pression moyenne y soit maximum ou minimum?

3. Une porte d'écluse est formée d'un rectangle dont un côté AB est vertical, et d'un quart de cercle dont le rayon est égal à AB; la porte peut tourner autour de AB comme axe. Déterminer la largeur du rectangle de manière que, l'eau atteignant d'un côté le niveau supérieur de l'écluse et de l'autre côté le niveau inférieur, on puisse faire tourner la porte sans effort.

4. Parmi tous les vases de révolution autour d'un axe vertical, de hauteur et de capacité données, quel est celui qui éprouve la plus grande pression horizontale de la part du liquide qui le remplit?

5. Déterminer la position d'équilibre d'un prisme triangulaire homogène qui flotte sur un liquide en ayant ses arêtes horizontales.

6. Position d'équilibre d'un prisme à base carrée qui flotte de manière que ses arêtes soient horizontales, et que, seule, l'une d'elles ne soit pas immergée.

7. Déterminer le centre de pression pour une aire elliptique comprise entre deux demi-diamètres conjugués dont l'un est la surface libre du liquide.

8. Un parallélépipède rectangle est en équilibre sur un liquide, une de ses faces étant horizontale; on déplace le prisme de façon que deux côtés opposés de cette face restent horizontaux; condition de stabilité de l'équilibre primitif.

9. Un vase cylindrique contenant de l'eau tourne uniformément autour de son axe, qui est vertical; sur l'eau flotte un cylindre de bois dont l'axe coïncide avec celui du vase, et qui tourne avec la même vitesse angulaire. Etudier la figure du système, supposé en équilibre par rapport au vase.

10. Position d'équilibre d'un cylindre horizontal dont la section droite est un segment de parabole compris entre le sommet et une perpendiculaire à l'axe.

CHAPITRE II

HYDRODYNAMIQUE

9. Équations fondamentales. — On peut aborder le problème du mouvement d'une masse liquide par deux voies également fécondes : ou bien, avec Lagrange, chercher à exprimer en fonction du temps et de la position initiale les

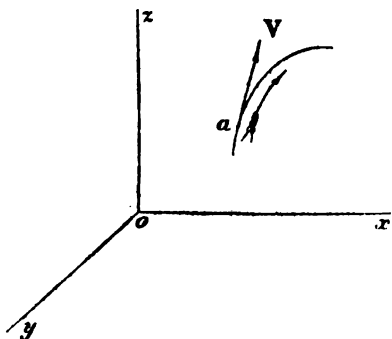


FIG. 306.

ordonnées des différents points de la masse liquide : c'est la méthode employée dans l'étude du mouvement des systèmes matériels ; ou encore, avec Euler, se proposer d'exprimer, toujours en fonction du temps et pour chaque point de la masse liquide, les composantes de la vitesse des particules qui passent successivement par ce point, la pression et la densité du liquide.

Évidemment ces deux méthodes conduisent toujours au

même résultat, qui est la détermination du mouvement de la masse liquide; mais les équations auxquelles conduit la méthode d'Euler sont généralement moins rebelles à l'intégration que celles fournies par la méthode de Lagrange.

Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque a de la masse liquide en mouvement; par u, v, w , les composantes de la vitesse V des filets liquides en ce point au temps t ; par p et ρ , la pression et la densité au même instant; et enfin, toujours à la même époque, par X, Y, Z , les sommes des composantes des forces extérieures, rapportées à l'unité de masse, qui agissent sur la molécule liquide entourant le point a . D'après Euler, il importe d'exprimer u, v, w, p, ρ en fonction du temps t et des coordonnées x, y, z du point a ; X, Y, Z étant d'ailleurs données en fonction des mêmes variables.

Si nous prenons comme élément de volume liquide au point a le parallélépipède infiniment petit $abcf$, les équations de son mouvement s'écrivent, d'après ce que nous avons dit au paragraphe 5,

$$\rho dx dy dz \frac{d^2 x}{dt^2} = p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz + \rho X dx dy dz,$$

avec deux équations analogues pour les composantes suivant Oy et Oz . Ces équations deviennent après simplification :

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2 x}{dt^2} &= \rho X - \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \rho \frac{d^2 y}{dt^2} &= \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \rho \frac{d^2 z}{dt^2} &= \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z}; \end{aligned} \quad (1)$$

mais, d'après la définition de l'accélération, et en observant que $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, $w = \frac{dz}{dt}$, sont des fonctions de x, y, z, t ,

on a :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

à dire :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z},$$

les équations analogues pour $\frac{d^2y}{dt^2}$ et $\frac{d^2z}{dt^2}$.

Les équations (1) peuvent donc se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= X - \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= Y - \frac{\partial v}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= Z - \frac{\partial w}{\partial t} - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z}; \end{aligned} \quad (2)$$

Comme ces équations ne sont qu'au nombre de trois, elles suffisent pas pour exprimer les quantités u, v, w, p, ρ , en fonction de x, y, z, t ; il faut en chercher d'autres.

Équation de continuité. — On obtient une quatrième équation en exprimant que la masse liquide *reste continue*

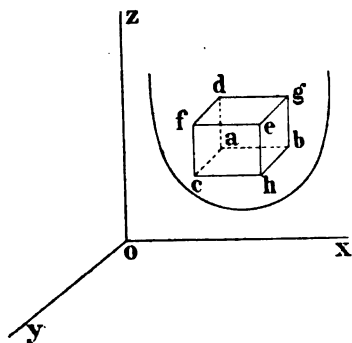


FIG. 307.

ant le mouvement, c'est-à-dire qu'il ne s'y forme pas de. Pour exprimer ce fait, il suffit d'écrire que l'accroissement total de la masse du liquide contenue dans le parallélépipède $abef$, pendant l'intervalle de temps dt , est égal à

la somme des accroissements partiels provenant des différences entre les masses entrées par les faces af , ag , ah , et celles sorties par les faces opposées bc , ce , de , pendant le même temps dt .

Or la masse du parallélépipède au temps t étant égale à $\rho dx dy dz$, devient au temps $t + dt$: $\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) dx dy dz$, de sorte que l'accroissement total de cette masse est égal à :

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) dx dy dz - \rho dx dy dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz. \quad (a)$$

D'autre part, pendant le même temps dt , il entre dans le parallélépipède par la face af , avec la vitesse u , une masse de liquide représentée par $\rho u dz dy dt$, et il en sort par la face opposée be une masse $\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\right) dy dz dt$; le premier accroissement partiel est donc égal à :

$$\rho u dy dz dt - \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\right) dy dz dt = - \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz dt.$$

Pareillement, les accroissements partiels provenant des vitesses v et w sont respectivement égaux à :

$$- \frac{\partial \rho v}{\partial y} dx dy dz dt, \quad - \frac{\partial \rho w}{\partial z} dx dy dz dt;$$

l'accroissement total est donc encore représenté par :

$$- \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) dx dy dz dt; \quad (b)$$

et, en égalant les deux expressions (a) et (b) de cet accroissement, on obtient après réductions :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0; \quad (3)$$

c'est l'équation de continuité. Comme les équations (2) et celles de l'hydrostatique, elle n'est rigoureusement vraie que pour les liquides parfaits dépourvus de viscosité; ce n'est

ailleurs qu'à de pareils liquides que le principe de l'égalité de pression en tous sens est applicable, aussi bien à l'état de repos qu'à l'état de mouvement.

Dans le cas d'un liquide incompressible, la densité ρ restant constante pour chaque molécule en mouvement, toutes les dérivées partielles de ρ sont nulles, de sorte que l'équation peut être simplifiée par la suppression du facteur commun ρ ; il reste :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Les équations (2) et (4) jointes à la condition $\rho = C^{\text{te}}$ forment un groupe de cinq équations à cinq inconnues, le problème du mouvement d'une masse liquide se trouve résolu au moins théoriquement. En réalité, l'intégration de ces équations aux dérivées partielles présente de très grandes difficultés, et ne peut être effectuée que dans des cas extrêmement rares.

31. Emploi des coordonnées cylindriques. — Soient u, v, w les

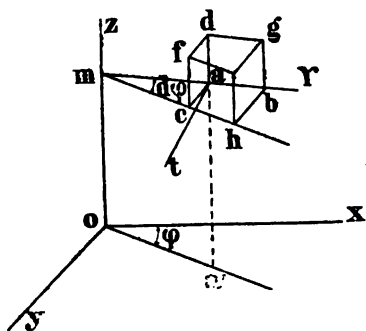


FIG. 306.

composantes de la vitesse du liquide au point a suivant le rayon vecteur horizontal mr , la normale at à ce rayon dans le sens où ϕ augmente, et la verticale az . D'après les relations démontrées en cinématique, on a :

$$u = \frac{dr}{dt}, \quad v = r \frac{d\phi}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}.$$

Si J_r, J_φ, J_z représentent les composantes semblables de l'accélération, on a de même, en posant $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$:

$$J_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{du}{dt} - \omega^2 r,$$

$$J_\varphi = r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} + 2\omega u,$$

$$J_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dw}{dt}.$$

Prenons comme élément de volume liquide le prisme courbe infiniment petit défini au numéro 5; on a les équations du mouvement :

$$\rho J_r = \rho R - \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \rho J_\varphi = \rho T - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad \rho J_z = \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1')$$

Mais, si l'on observe que u, v, w sont des fonctions de r, φ, z, t , on trouve en différentiant :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

ce que l'on peut écrire :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \omega \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \frac{\partial u}{\partial z},$$

et deux équations analogues pour $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{dw}{dt}$.

Les équations (1') peuvent donc se mettre sous la forme, d'après les valeurs de J_r, J_φ, J_z :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= R - \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \omega \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \omega^2 r, \\ \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= T - r \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} + w \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) - 2\omega u, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= Z - \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \omega \frac{\partial w}{\partial \varphi} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2')$$

Pour établir l'équation de continuité, on raisonne comme précédemment; la différence entre les masses de liquide qui, dans le temps dt , entrent dans l'élément de volume et en sortent, est :

$$\begin{aligned} &\rho r d\varphi dz u dt - \left(\rho r d\varphi dz u dt + d\varphi dz dt \frac{\partial \rho u r}{\partial r} dr \right) \\ &+ \rho r dr dz v dt - \left(\rho r dr dz v dt + dr dz dt \frac{\partial \rho v}{\partial \varphi} d\varphi \right) \\ &+ \rho r d\varphi dr w dt - \left(\rho r d\varphi dr w dt + r d\varphi dr dt \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz \right), \end{aligned}$$

ien en réduisant :

$$-drd\varphi dzdt \left(r \frac{\partial \varphi u}{\partial r} + \rho u + r \frac{\partial \rho \omega}{\partial \varphi} + r \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right);$$

me cette masse est aussi égale à $rd\varphi drdz \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$, on a l'équa-

:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial r} + \frac{\partial \rho \omega}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\rho u}{r} = 0. \quad (3')$$

la densité ρ du liquide est constante, on a plus simplement :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} = 0.$$

2. Mouvement autour d'un axe. — Considérons une masse liquide qui tourne d'un mouvement symétrique autour d'un axe quelconque oz , de sorte que, en tous les points pris sur une même circonférence autour de cet axe, la pression et la vitesse du liquide soient les mêmes. Les forces centrifuges sont censées rencontrer l'axe oz , ou lui être parallèles. Cherchons les propriétés d'un semblable mouvement. Des deux premières équations (1) on déduit, en les multipliant respectivement par dx et dy , et additionnant :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) = Xdx + Ydy - \left(\frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy \right).$$

Les différentielles dx et dy se rapportent à un déplacement quelconque ; supposons que ce dernier s'effectue sur la circonférence de rayon r autour de oz ; on aura, p étant alors constant ainsi que z : $dp = 0$, $dz = 0$, puis :

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy = 0.$$

On aura aussi $Xdx + Ydy = 0$, puisque la direction de la force extérieure est normale à celle de la circonférence. On conclut que

$$\frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy = 0. \quad (m)$$

Or, si l'on passe aux coordonnées polaires dans le plan xy , on a :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta;$$

l'angle θ est ici le même que l'angle φ du numéro 31. On obtient en différentiant :

$$dx = -r \sin \theta d\theta, \quad dy = r \cos \theta d\theta,$$

car r ne varie pas dans le déplacement adopté.

D'autre part, la différentiation donne, en regardant r et θ comme propres à une même molécule liquide :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2} \cos \theta - 2 \sin \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} - r \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} - r \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2} \sin \theta + 2 \cos \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} - r \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} + r \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2}; \end{aligned}$$

et la relation (m) deviendra, $\frac{d\theta}{dt}$ étant représenté par ω :

$$2\omega \frac{dr}{dt} + r \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

et en intégrant :

$$\omega r^2 = a \quad \text{ou} \quad Vr = a;$$

a désigne une quantité constante pour une même molécule. Il résulte de là que, dans le mouvement d'un liquide qui tourne autour d'un axe de symétrie, la vitesse d'une molécule varie, pendant la rotation, en raison inverse de sa distance à l'axe.

L'équation $r^2 d\theta = a dt$ montre, d'autre part, que le rayon vecteur de la molécule, projeté sur un plan normal à l'axe de rotation, décrit des aires proportionnelles aux temps.

On aurait pu déduire la relation $\omega r^2 = a$ des équations (2') en faisant $T = 0$ et supposant que les diverses variables sont indépendantes de φ .

33. Équation des forces vives. — On obtient une relation importante en formant sur les équations (1) la combinaison des forces vives, c'est-à-dire en les multipliant respectivement par $dx = vdt$, $dy = vdt$, $dz = vdt$, et les additionnant; il vient :

$$\begin{aligned} \varphi \left(\frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy + \frac{d^2z}{dt^2} dz \right) &= \varphi (Xdx + Ydy + Zdz) \\ &- \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right); \end{aligned}$$

p étant une fonction de x, y, z, t , on a en différentiant
lement :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz + \frac{\partial p}{\partial t} dt;$$

l'autre part, de l'égalité :

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

on déduit également en différentiant :

$$d\left(\frac{1}{2} v^2\right) = v dv = \frac{d^2 x}{dt^2} dx + \frac{d^2 y}{dt^2} dy + \frac{d^2 z}{dt^2} dz;$$

on porte que l'équation précédente peut s'écrire :

$$dp - \frac{\partial p}{\partial t} dt = \rho(Xdx + Ydy + Zdz) - \rho d\left(\frac{1}{2} v^2\right). \quad (5)$$

4. Régime permanent. — Dans un liquide en mouvement, le régime permanent est établi lorsque les molécules qui passent successivement par un point y passent avec la même vitesse, la même densité et la même pression; d'après cela, il est évident que dans un pareil mouvement les vitesses u, v, w, p, ρ ne dépendent plus du temps et restent seulement, en général, fonctions de x, y, z .

On a un exemple de mouvement permanent dans le cas d'une masse d'eau qui s'écoule dans une conduite ou par un orifice.

Il résulte de la définition du régime permanent que la même masse de liquide qui traverse dans un temps donné une section transversale pq du canal reste constante pendant toute la durée de l'écoulement, car tous les points de cette section sont constamment traversés par des molécules animées respectivement des mêmes vitesses.

Le volume d'eau qui traverse pq en une seconde est le produit de cette section.

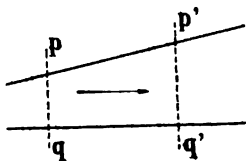


FIG. 309.

Il résulte encore de la même définition que, si l'on considère deux sections pq et $p'q'$ du canal, les masses d'eau qui traversent ces sections pendant le même temps doivent être égales, car autrement le régime permanent ne pourrait subsister dans l'intervalle pp' , qui se viderait ou se remplirait suivant que le débit en $p'q'$ serait supérieur ou inférieur au débit en pq .

Ainsi, lorsqu'une masse liquide a un mouvement permanent, les dérivées partielles par rapport à t des quantités u , v , w , p , ρ sont toutes nulles, de sorte que l'équation (5) peut s'écrire :

$$\frac{dp}{\rho} - (Xdx + Ydy + Zdz) + d\left(\frac{1}{2} V^2\right) = 0;$$

et, lorsque la fonction des forces existe :

$$\frac{dp}{\rho} - dU + d\left(\frac{1}{2} V^2\right) = 0.$$

Si l'on intègre cette dernière équation, on obtient :

$$\int \frac{dp}{\rho} - U + \frac{1}{2} V^2 = C,$$

C désignant une constante d'intégration, c'est-à-dire une quantité qui ne varie pas, pendant la durée du mouvement, tout le long de la trajectoire de la molécule liquide considérée.

Généralement, il existe entre la pression p et la densité ρ une certaine relation ; alors on peut considérer la fonction P définie par l'intégrale :

$$P = \int \frac{dp}{\rho};$$

et l'équation précédente devient, en transposant les termes :

$$V^2 = 2(U - P) + C. \quad (1)$$

Si le liquide est homogène, ρ est constant ; alors :

$$P = \frac{1}{\rho} \int dp = \frac{p}{\rho};$$

suite :

$$v^2 = 2 \left(U - \frac{p}{\rho} \right) + C, \quad (2)$$

on voit que l'on peut encore écrire en transposant de nouveaux termes :

$$p = \rho \left(U - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} C \right),$$

qui, sous cette forme, montre que, le long de la trajectoire d'une molécule liquide, la pression est d'autant moins grande que la vitesse l'est davantage.

6. **Théorème de Bernoulli.** — Ce théorème s'applique au mouvement permanent; il établit une relation entre l'altitude d'un

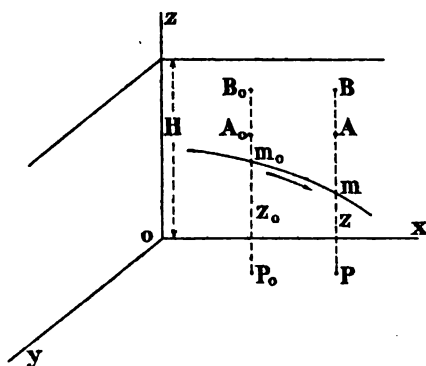


FIG. 310.

et m sur un fil donné, la vitesse et la pression du liquide en ce point.

Si l'on applique l'équation (2) à un liquide pesant, on a les composantes de la force qui agit au point m sur l'élément de masse :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g,$$

d'où l'on déduit $dU = -gdz$. La fonction des forces est $U = -gz$, par suite :

$$V^2 = -2 \left(gz + \frac{p}{\rho} \right) + C.$$

Pour interpréter cette équation, appelons $2gH$ la constante; il vient, en transposant les termes et posant $\pi g = \pi$:

$$z + \frac{p}{\pi} + \frac{V^2}{2g} = H. \quad (m)$$

Cette équation est susceptible d'une interprétation remarquable. Considérons le plan horizontal $z = H$, et soit m_0m le filet liquide lieu des positions successives d'une molécule; si en chaque point m de ce filet on élève une ordonnée mP , et que sur cette ordonnée on porte une première longueur $mA = \frac{p}{\pi}$, puis une seconde $AB = \frac{V^2}{2g}$, il résulte de l'équation précédente que le lieu des points B est le plan $z = H$.

La longueur $\frac{p}{\pi}$ n'est autre chose que la hauteur représentative de la pression p du liquide au point m , abstraction faite de la pression atmosphérique. Le quotient $\frac{V^2}{2g}$ est égal à la hauteur due à la vitesse V de la molécule m .

On peut donc énoncer le théorème de Bernoulli :

La hauteur au-dessus d'un plan horizontal fixe en un point quelconque d'un filet liquide, plus la hauteur représentative de la pression en ce point, plus encore la hauteur capable de la vitesse au même point, forment une somme constante.

Soient m_0 et m deux points du même filet liquide, z_0 et z leurs cotes, p_0 et p les pressions, V_0 et V les vitesses correspondantes. Ces divers éléments satisfont à la relation (m), de sorte que l'équation de Bernoulli peut s'écrire :

$$z_0 + \frac{p_0}{\pi} + \frac{V_0^2}{2g} = z + \frac{p}{\pi} + \frac{V^2}{2g}.$$

Le plan $z = H$ est appelé *plan de charge*; il ne faut pas le

fondre avec le plan considéré au numéro 7, dont la hauteur au-dessus de chaque molécule liquide était égale à $z + \frac{p_0}{\pi}$, qui restait le même pour tous les points de la masse liquide en équilibre. Dans le cas du mouvement, le plan de charge reste le même tout le long d'un filet liquide, mais varie avec le filet considéré; ce plan se trouve déterminé par le point du filet pour lequel la vitesse et la pression sont nulles. Si le courant provient d'un réservoir dont le niveau d'eau reste constant, alors la vitesse et la pression sont considérées comme nulles sur la surface de ce réservoir, et c'est ce plan qui représente le plan de charge. La colonne d'eau mA est appelée *hauteur piézométrique*; le point A est le niveau piézométrique en m . Si en ce point on plaçait dans le liquide un tube vertical ouvert en haut dans l'atmosphère, l'eau s'élèverait jusqu'au point A.

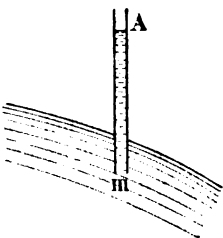


FIG. 311.

DÉMONSTRATION. — Le théorème de Bernoulli est très important au point de vue des applications de l'hydraulique, car de lui **qui** découlent toutes les formules de l'écoulement de fluide dans les tuyaux et dans les canaux.

Ce théorème peut être démontré directement en parlant de la conservation des forces vives; nous donnerons cette démonstration à la fin de l'importance de la question.

Considérons le filet liquide limité par les courbes ac et bd (Fig. 312), et soient ab et cd deux sections normales de ce filet. Si nous supposons que le liquide qui occupait à l'instant initial la position $abcd$ se soit transporté, au bout d'un instant très court, dans la position très voisine $a'b'c'd'$, alors on peut appliquer à ce déplacement l'équation des forces vives :

$$\frac{1}{2} m V^2 - \frac{1}{2} m V_0^2 = \Sigma U.$$

Designons par :

m , l'aire infiniment petite de la section ab ;

m_0 , l'aire de cd ;

z , la distance des sections ab et $a'b'$;

z_0 , la distance des sections cd et $c'd'$;

et z , les distances des centres de gravité m_0 et m des volumes

infinitement petits $aba'b'$ et $cdc'd'$ au-dessus du plan de comparaison horizontal H' .

On voit d'abord qu'en vertu de la permanence du régime, la force vive totale du liquide compris entre les sections $a'b'$ et cd est la même à l'instant final qu'à l'instant initial, puisque la vitesse de l'eau considérée à un même point reste constante en grandeur et en direction. La variation de force vive du filet liquide considéré se réduit donc à la différence entre la force vive du volume $cdc'd'$ et celle du volume $aba'b'$.

Le premier membre de l'équation des forces vives s'écrit donc ici :

$$\frac{1}{2} \frac{\pi \omega \varepsilon}{g} V^2 - \frac{1}{2} \frac{\pi (\omega_0 \varepsilon_0)}{g} V_0^2,$$

car $m = \frac{\pi \omega \varepsilon}{g}$ (m représente la masse du volume $aba'b'$ ou $cdc'd'$).

Mais, puisque le frottement des filets liquides les uns sur les

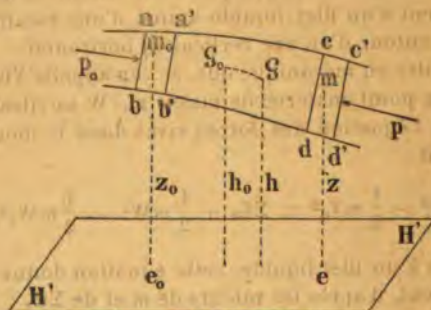


FIG 312.

autres est nul par hypothèse, les réactions latérales sont des forces normales qui ne produisent aucun travail, de sorte que, pour écrire le second membre de l'équation des forces vives, il suffit d'évaluer le travail des pressions qui s'exercent en ab et cd , et le travail de la pesanteur.

La pression sur ab a pour expression $p_0 \omega_0$, et son travail a pour valeur $p_0 \omega_0 \varepsilon_0$. La pression sur cd a pour expression $p \omega$, et, comme elle agit en sens contraire du mouvement, son travail a pour valeur $-p \omega \varepsilon$; les deux volumes $cdc'd'$ et $aba'b'$ sont équivalents, puisque l'eau est incompressible, c'est-à-dire que l'on a $\omega_0 \varepsilon_0 = \omega \varepsilon$.

Le travail de la pesanteur est égal au produit $P(h_0 - h)$ du poids P de la masse liquide $abcd$ par la hauteur $h_0 - h$ dont s'est abaissé son centre de gravité G ; mais, à cause de la partie $a'b'cd$ com-

aux deux volumes $abcd$ et $a'b'c'd'$, et dont le centre de gravité est invariable, ce travail est le même que si les molécules occupant l'espace $aba'b'$ s'étaient directement transportées de a en a' , c'est-à-dire que l'on a $P(h_0 - h) = \pi\omega\varepsilon(z_0 - z)$.
 si, on a pour la somme des travaux des forces :

$$\Sigma \mathcal{E}_e = p_0\omega_0\varepsilon_0 - p\omega\varepsilon + \pi\omega\varepsilon(z_0 - z),$$

de sorte que l'équation des forces vives s'écrira :

$$\frac{\pi\omega\varepsilon}{g} V^2 - \frac{1}{2} \frac{\pi\omega_0\varepsilon_0}{g} V_0^2 = p_0\omega_0\varepsilon_0 - p\omega\varepsilon + \pi\omega\varepsilon(z_0 - z);$$

on, en divisant par $\pi\omega\varepsilon = \pi\omega_0\varepsilon_0$ et transposant les termes :

$$z_0 + \frac{p_0}{\pi} + \frac{V_0^2}{2g} = z + \frac{p}{\pi} + \frac{V^2}{2g}.$$

Cas du mouvement relatif. — Pour le calcul des travaux, il est nécessaire d'appliquer le théorème de Bernoulli au mouvement d'un filet liquide animé d'une rotation d'ensemble autour d'un axe vertical ou horizontal.

On démontre en mécanique que, si l'on appelle V la vitesse de translation d'un point matériel de masse m , W sa vitesse d'ensemble, l'équation des forces vives dans le mouvement relatif s'écrit :

$$\frac{1}{2} mV^2 - \frac{1}{2} mV_0^2 = \Sigma \mathcal{E}_e + \frac{1}{2} mW^2 - \frac{1}{2} mW_0^2.$$

Appliquée à un filet liquide, cette équation donne comme on le verra plus bas, d'après les valeurs de m et de $\Sigma \mathcal{E}_e$:

$$z_0 + \frac{p_0}{\pi} + \frac{V_0^2}{2g} - \frac{W_0^2}{2g} = z + \frac{p}{\pi} + \frac{V^2}{2g} - \frac{W^2}{2g};$$

l'équation de Bernoulli dans le mouvement relatif.

Cas des liquides naturels. — L'équation de Bernoulli, déduite du théorème des forces vives, n'est rigoureusement vraie que pour les *liquides parfaits* dans lesquels la viscosité est absolument nulle. On a supposé, en effet, pour établir l'équation, que, pendant toute la durée de l'écoulement, les éléments liquides n'exerçaient les uns sur les autres aucun travail. C'est une hypothèse qu'il faut avoir présente à

l'esprit toutes les fois que l'on applique le théorème de Bernoulli.

Dans les liquides tels qu'on les rencontre dans la nature, la viscosité n'est jamais absolument nulle : les molécules de ces liquides, en roulant les unes sur les autres et en prenant contact avec les parois du canal, développent des frottements tangentiels plus ou moins considérables, opposés à leur mouvement, et qui se traduisent par une diminution progressive de la vitesse.

On doit donc considérer l'équation de Bernoulli comme une expression approchée de la loi qui régit les mouvements des liquides naturels. La quantité $z + \frac{p}{\pi} + \frac{V^2}{2g}$ ne reste plus constante tout le long d'un même filet liquide ; elle devient une certaine fonction de la distance du point va-

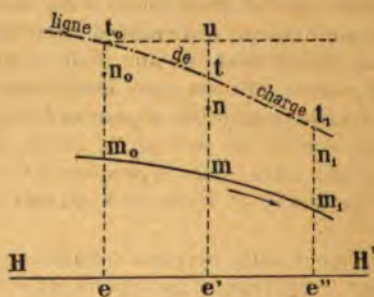


FIG. 313.

riable m à l'origine du filet, et le plan de charge s'abaisse progressivement lorsqu'on chemine sur ce filet dans le sens du mouvement. Entre deux points donnés m_0 et m , la dénivellation tu du plan de charge est appelée *perte de charge*; et, si l'on pose $m_0m = s$ et $tu = F(s)$, on aura plus exactement entre les points considérés :

$$z_0 + \frac{p_0}{\pi} + \frac{V_0^2}{2g} = z + \frac{p}{\pi} + \frac{V^2}{2g} + F(s).$$

Telle est l'équation applicable à l'écoulement des liquides

s ; nous verrons plus tard à préciser la forme de la $F(s)$, suivant que l'écoulement se fera dans une conduite forcée ou dans un canal découvert.

On choisit des extrémités t_0, t, t_1, \dots pour tous les points du canal, n est appelé *ligne de charge* ; on a :

$$m_0 t_0 = \frac{p_0}{\pi} + \frac{V_0^2}{2g}, \quad m t = \frac{p}{\pi} + \frac{V^2}{2g}.$$

On prend

$$m_0 n_0 = \frac{p_0}{\pi}, \quad m n = \frac{p}{\pi},$$

les points n est la ligne des niveaux piézométriques.

Pression dans un liquide en mouvement. — La constante m qui entre dans l'équation (m) se détermine dans un cas d'après les conditions particulières du problème on applique cette équation. Lorsque cette constante est connue pour un fillet quelconque d'une masse continue de liquide en mouvement, l'équation de Bernoulli ne donne pas, pour chaque fillet, qu'une seule relation entre la pression p et la vitesse ; elle est donc insuffisante pour déterminer la fois ces deux quantités et pour en déduire le débit du fluide par sa section. On voit par là que la question reste indéterminée ; il faudrait, pour la préciser, une seconde relation entre la pression p et la vitesse V , ou entre la pression p et l'altitude z .

Malheureusement cette dernière relation est loin d'être connue dans sa généralité. Si cependant on néglige les forces développées par le frottement des molécules les unes sur les autres et contre les parois du canal, alors il est possible dans certains cas de savoir comment les pressions varient avec les altitudes, c'est-à-dire d'avoir une relation entre p et z .

Si nous tenons à le répéter, il faut observer que cette relation n'est jamais réalisée dans les liquides naturels ; il vient à dire que les formules obtenues ne constituent qu'une approximation qui peut même, dans des circonstances défavorables, s'éloigner notablement de la vérité.

Enfin, lorsque chaque molécule possède un mouvement

rectiligne et uniforme, ce qui est un cas assez étendu, la pression dans le liquide varie d'un point à un autre suivant la loi hydrostatique, c'est-à-dire de la même façon que si le liquide était au repos. On voit, en effet, que, puisque l'écoulement est rectiligne et uniforme, c'est que toutes les actions auxquelles le liquide est soumis se font équilibre; ce dernier est alors dans les mêmes conditions que s'il se trouvait en repos.

De même, lorsque les molécules liquides sont animées de mouvements quelconques, mais très lents, on peut encore admettre que la pression varie suivant la loi hydrostatique. En effet, les mouvements étant très lents, les résistances dues au frottement sont très faibles et peuvent être négligées sans erreur appréciable.

39. Régime non permanent. — Lorsque la masse d'eau qui s'écoule dans un canal a un régime non permanent, les équations du mouvement se déduisent encore aisément des formules générales (29).

Supposons que les filets liquides soient sensiblement parallèles, et qu'on puisse faire abstraction des tourbillons qui se développent dans le courant. En prenant l'axe ox parallèle à la direction commune des filets, la première des équations (2) donne, en observant que, pour un point quelconque d'un filet, les quantités y, z, p sont constantes, et que les composantes v et w de la vitesse sont nulles :

$$\rho \left(X - \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0,$$

ce que l'on peut écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = X. \quad (a)$$

La composante X des forces extérieures comprend celle de la pesanteur dirigée dans le sens de l'écoulement, et celle du frottement qui a une direction opposée (128).

L'équation de continuité du filet se réduit à $\frac{du}{dx} = 0$, mais on l'écrit ordinairement sous une forme un peu différente

en introduisant l'aire ω de la section transversale et son débit q , lequel débit est égal au produit ωu de la section par la vitesse.

Considérons deux sections transversales très voisines séparées par une distance dx ou ds ; l'aire de la première est ω et son débit q ; dans la seconde, l'aire est $\omega + d\omega$ et le débit $q + dq$.

Pendant le temps dt , il s'emmasse entre les deux sections un volume de liquide dV qui est mesuré par le produit de la différence — dq des débits par l'accroissement dt du temps. D'autre part, le volume dV peut être mesuré par un prisme ayant pour base la différence $d\omega$ des sections et pour hauteur leur distance dx . On a donc l'équation :

$$-dqdt = d\omega dx,$$

ou l'on peut écrire :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{dq}{dx} = 0, \quad (\beta)$$

ou bien, puisque $q = \omega u$:

$$\frac{d\omega}{dt} + \omega \frac{du}{dx} + u \frac{d\omega}{dx} = 0.$$

Les équations (α) et (β) étendues à tous les filets qui constituent le courant liquide sont celles qui lient les fonctions u aux variables indépendantes x et t . Elles sont établies sous des hypothèses restrictives, telles que celles de l'écoulement par filets sensiblement parallèles, et de la permanence pendant le mouvement de l'axe le long duquel on compte les abscisses x . Il ne paraît pas possible de trouver des intégrales générales de ces équations; mais elles permettent, dans certains cas, de contrôler les observations faites sur les cours d'eau pendant les crues.

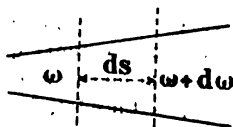


FIG. 314.

CHAPITRE III

ORIFICES. — AJUTAGES. — DÉVERSOIRS

40. Avec l'étude de l'écoulement de l'eau par des orifices ou par des déversoirs commence l'hydraulique proprement dite, qui n'est autre chose que l'application des formules de l'hydrodynamique aux questions qui relèvent plus spécialement de l'art de l'ingénieur.

Malgré l'appui des principes de la mécanique, en particulier du théorème des forces vives et de l'équation de Bernoulli, l'hydraulique est une science encore peu avancée où domine principalement l'empirisme.

Dubuat et Prony ont jeté les premiers fondements de cette science, il y a un siècle environ. Dupuit et Darcy l'ont perfectionnée sur bien des points, sans cependant lui enlever son caractère empirique et approximatif.

Mais les récents travaux de M. Bazin au point de vue expérimental, et de M. Boussinesq pour la théorie, semblent avoir fixé la voie scientifique dans laquelle il convient de marcher pour parvenir aux véritables lois.

ORIFICES

41. *Mince paroi.* — Lorsque le liquide contenu dans un vase s'écoule par un orifice de petites dimensions, en ne touchant que le bord interne de l'orifice, on dit que l'écoulement s'effectue en mince paroi. Cette circonstance se produit pour un orifice conique, ou pour un orifice quelconque lorsque l'épaisseur de la paroi est inférieure à la moitié de la plus petite dimension de l'ouverture.

A leur sortie de l'orifice, les filets liquides commencent par converger; à une petite distance cd , moitié environ de AB , ils deviennent sensiblement parallèles et se continuent dans l'air sous forme parabolique. La veine liquide, qui occupe d'abord toute la largeur AB de l'ouverture, passe ensuite par une *section contractée* ab , où les vitesses des molécules sont sensiblement égales.

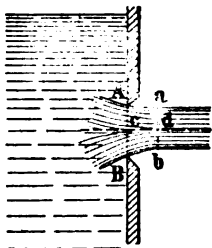


FIG. 315.

42. Théorème de Torricelli. — Si le liquide est maintenu à un niveau constant par un réservoir alimentaire, et que sa surface libre ef soit très étendue par rapport à celle de l'orifice, alors, pour toutes les molécules placées sur cette surface, la vitesse est extrêmement petite et peut être négligée.

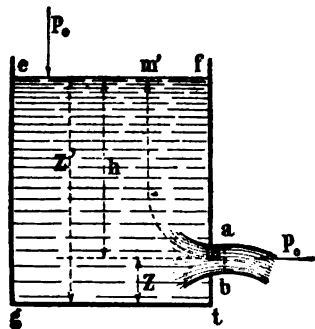


FIG. 316.

Considérons, à un instant donné, les deux molécules m' et m placées sur un même filet liquide, la première sur la surface libre, la seconde dans la section contractée.

Appelons :

z' , l'ordonnée du point m' ou du plan ef , rapportée à l'horizontale gt ;

p_0 , la pression atmosphérique qui s'exerce sur ef ;

z , l'ordonnée du point m de la section contractée ab ;

V , la vitesse des molécules dans la section contractée.

On peut observer que la pression au point m , et dans toute la section ab où les vitesses des molécules sont sensiblement parallèles, est égale à la pression atmosphérique p_0 . En effet cette pression s'exerce sur le périmètre entier de la veine liquide, et, puisque toutes les molécules voisines se meuvent parallèlement les unes aux autres, c'est qu'aucune

d'elles n'exerce sur ses voisins un effort tendant à les faire dévier; ces molécules se pressent donc également entre elles de toutes parts, et, puisque celles du pourtour supportent la pression de l'atmosphère, il en est de même de toutes les autres.

Appliquons l'équation de Bernoulli aux deux points m et m' du filet $m m'$. La vitesse sur ef étant supposée nulle et la pression en m étant égale à p_0 , on a immédiatement :

$$(1) \quad z' + \frac{p_0}{\pi} = z + \frac{p_0}{\pi} + \frac{V^2}{2g}.$$

Cette équation donne :

$$\frac{V^2}{2g} = z' - z = h,$$

c'est-à-dire :

$$V^2 = 2gh,$$

enfin :

$$V = \sqrt{2gh}.$$

La vitesse des molécules dans la section contractée est égale à celle qu'un point matériel acquerrait s'il tombait en chute libre, sans vitesse initiale, depuis la surface libre du liquide jusqu'au niveau du centre de cette section.

Cherchons quelle est la vitesse d'un liquide qui s'échappe par un orifice percé en mince paroi, sous une charge de 1,20.

On trouve, en se rappelant que $g = 9,81$:

$$V = \sqrt{2 \times 9,81 \times 1,20} = 4,85 \text{ par seconde.}$$

Si l'on cherchait la hauteur capable d'une vitesse de 4,20 par seconde, on trouverait :

$$h = \frac{V^2}{2g} = \frac{4,20^2}{2 \times 9,81} = 0,90.$$

La table I facilite les calculs numériques.

43. Calcul du débit. — Dans la section contractée ab , toutes les molécules ont des vitesses égales; il en résulte que le débit Q de l'orifice, par unité de temps, s'obtient en multipliant l'aire de la section contractée par la vitesse commune.

il fallait dans chaque cas mesurer l'aire exacte de la section contractée, l'opération présenterait d'assez grandes difficultés; pour obvier à cet inconvénient, on a déterminé expérimentalement par quel coefficient m , moindre que l'unité, il convenait de multiplier l'aire ω de l'orifice pour en avoir celle de la section contractée. D'après cela, la formule du débit peut s'écrire :

$$Q \pm m\omega \sqrt{2gh}; \quad (1)$$

et ce qu'on appelle le *coefficient de contraction*. Ce coefficient varie avec la forme de l'orifice AB et aussi avec la hauteur h ; mais, si la hauteur de l'orifice est très faible par rapport à h , sa valeur, qui reste toujours comprise entre 0,57 et 0,70, oscille autour du nombre moyen 0,62.

Inversion de la veine. — Un phénomène assez curieux, qui accompagne souvent l'écoulement par orifices, est celui que l'on désigne ordinairement sous le nom d'inversion de la veine, qui est présenté par tous les orifices dont la section n'est pas circulaire. Poncelet et Lesbros ont étudié ce phénomène en détail pour plusieurs orifices différents; par exemple, l'orifice est un carré ABCD, la section de la veine, à une distance égale à deux fois et demie le diamètre de cet orifice, est encore à très peu près un carré $h'b'd'f'$; seulement les diagonales de cette section sont parallèles aux côtés de l'orifice: les côtés sont donc légèrement courbés. Si l'on fait une section entre les deux premières, on obtient une figure $abcdefg$ qui est une sorte de transition entre les deux-ci. Cela paraît provenir de ce que, dans l'endroit où les filets qui viennent des milieux des côtés tendent à devenir parallèles, ceux qui viennent des angles tendent encore à se rapprocher et obligent les autres à s'éloigner.

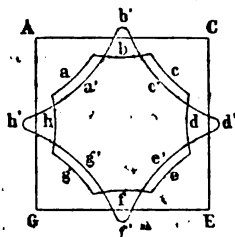


FIG. 317.

Poncelet et Lesbros ont également étudié un orifice rectangulaire de 0^m,60 de hauteur sur 0^m,02 de largeur, et ils ont cherché la forme de la section de la veine aux distances 0^m,10, 0^m,30, 0^m,70, 1^m,10 de l'orifice, et ils ont trouvé les courbes représentées par les figures 318 et 319.

Le phénomène de l'inversion de la veine n'a pas encore été étudié d'une manière très satisfaisante; d'après les expériences

de Lajerhjelm, il semble devoir être attribué à la diminution graduelle de la vitesse des filets liquides depuis les bords de l'orifice.

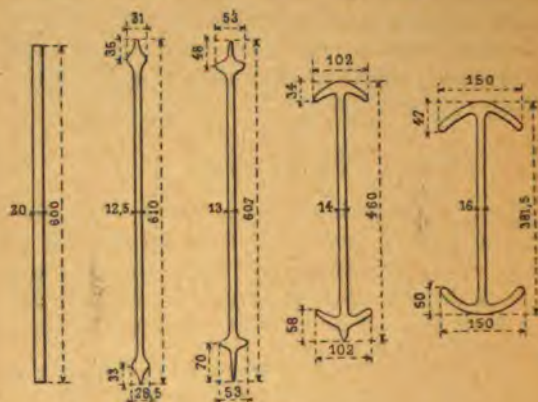


FIG. 318.

où cette vitesse est relativement considérable, jusqu'au centre, où elle est très faible.

44. Orifice de grande hauteur. — Lorsque l'orifice présente de grandes dimensions et en particulier une certaine hauteur, ce qui est le cas ordinaire de la pratique, il est difficile d'admettre que toutes les molécules qui traversent au même instant la section contractée y sont animées de vitesses égales. Comme, d'autre part, la formule (1) repose sur cette hypothèse, il ne semble pas *a priori* qu'elle puisse être utilisée pour calculer le débit.

En réalité, l'observation et le calcul s'accordent pour reconnaître que la formule est encore applicable, à condition de prendre pour h la distance du centre de gravité de l'orifice à la surface libre du liquide.

Appelons z_1 et z_2 les ordonnées des bords supérieur et inférieur de l'orifice, que nous supposerons rectangulaire et de largeur l , et appliquons le théorème de Torricelli à tous les filets liquides qui, au même instant, traversent la section contractée. Si dz est l'épaisseur infiniment petite d'une

tranche liquide située à une distance z de la surface libre, la vitesse dans cette tranche est égale à $\sqrt{2gz}$, et son débit a pour expression $mldz\sqrt{2gz}$. Pour obtenir le débit total de l'orifice, il suffit d'intégrer cette différentielle depuis z_1 jusqu'à z_2 ; on obtient ainsi :

$$Q = ml \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{2gz} dz,$$

c'est-à-dire :

$$Q = ml \sqrt{2g} \int_{z_1}^{z_2} z^{\frac{1}{2}} dz,$$

ou encore en intégrant :

$$Q = \frac{2}{3} ml \sqrt{2g} \left(z_2^{\frac{3}{2}} - z_1^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{3} m\omega \sqrt{2g} \frac{z_2^{\frac{3}{2}} - z_1^{\frac{3}{2}}}{z_2 - z_1}.$$

Sous cette forme compliquée, l'expression du débit semble dépourvue d'intérêt pratique ; fort heureusement on a

observé que le facteur $\frac{2}{3} \frac{z_2^{\frac{3}{2}} - z_1^{\frac{3}{2}}}{z_2 - z_1}$ était sensiblement égal à

$\sqrt{\frac{z_1 + z_2}{2}}$, de sorte qu'approximativement on peut écrire :

$$Q = m\omega \sqrt{2g \frac{z_1 + z_2}{2}},$$

ou bien, en posant $zh = \frac{z_1 + z_2}{2}$:

$$Q = m\omega \sqrt{2gh}.$$

Si l'on observe que h représente précisément la distance du centre de gravité de l'orifice à la surface libre du liquide, on voit que la formule (1) est applicable dans tous les cas.

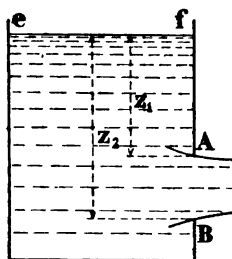


Fig. 319.

VALEUR DU COEFFICIENT m POUR DES ORIFICES RECTANGULAIRES
EN MINCE PAROI VERTICALE

CHARGE sur le sommet de l'orifice	HAUTEUR DE L'ORIFICE					
	0 ^m .20	0 ^m .10	0 ^m .05	0 ^m .03	0 ^m .02	0 ^m .01
0,005	»	»	»	»	»	0,705
0,010	»	»	0,607	0,630	0,660	0,701
0,015	»	0,593	0,612	0,632	0,660	0,697
0,020	0,572	0,596	0,615	0,634	0,659	0,694
0,030	0,578	0,600	0,620	0,638	0,659	0,688
0,040	0,582	0,607	0,623	0,640	0,658	0,683
0,050	0,585	0,605	0,625	0,640	0,658	0,679
0,060	0,587	0,603	0,627	0,640	0,657	0,676
0,070	0,588	0,609	0,628	0,639	0,656	0,673
0,080	0,589	0,610	0,629	0,638	0,656	0,670
0,090	0,591	0,610	0,629	0,637	0,655	0,668
0,100	0,592	0,611	0,630	0,637	0,654	0,666
0,120	0,593	0,612	0,630	0,636	0,653	0,663
0,140	0,595	0,613	0,630	0,635	0,651	0,660
0,160	0,596	0,614	0,631	0,634	0,650	0,658
0,180	0,597	0,615	0,630	0,634	0,649	0,657
0,200	0,598	0,615	0,630	0,633	0,648	0,655
0,250	0,599	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653
0,300	0,600	0,616	0,629	0,632	0,644	0,650
0,400	0,602	0,617	0,628	0,631	0,642	0,647
0,500	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644
0,600	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,642
0,700	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640
0,800	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637
0,900	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635
1,000	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632
1,100	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629
1,200	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626
1,300	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622
1,400	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,628
1,500	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615
1,600	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,618
1,700	0,602	0,610	0,616	0,616	0,615	0,612
1,800	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612
1,900	0,601	0,608	0,614	0,613	0,612	0,621
2,000	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,611
3,000	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609

45. Cas d'un orifice noyé. — Le théorème de Torricelli s'étend au cas où la veine liquide, au lieu de déboucher dans l'atmosphère, pénètre dans un autre vase où le niveau

est maintenu constant; mais la hauteur h représente l'écart de niveau entre les deux vases.

l'équation de Bernoulli, appliquée aux deux points m' et

~~filet $m'm$, donne, en observant~~

la pression sur le point m est égale

~~$-\pi z_1$ (fig. 310).~~

$$\frac{p_0}{\pi} = z + \frac{p_0 + \pi z_1}{\pi} + \frac{V^2}{2g}$$

on peut écrire :

$$\frac{V^2}{2g} = z' - z - z_1,$$

en observant que $z' - z - z_1 = h$:

$$V = \sqrt{2gh}.$$

l'expression du débit par seconde est toujours :

$$Q = m\omega \sqrt{2gh}.$$

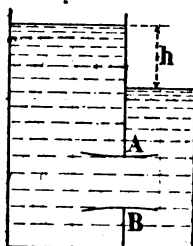


FIG. 320.

TABLEAU DU COEFFICIENT m POUR DES ORIFICES CIRCULAIRES
EN MINCE PAROI VERTICALE

RGE centre ORIFICE	DIAMÈTRE DE L'ORIFICE					
	0",30	0",18	0",06	0",03	0",015	0",006
2	»	»	»	0,618	0,631	»
5	»	0,592	0,600	0,615	0,627	»
8	»	0,593	0,601	0,613	0,624	0,635
11	0,590	0,594	0,601	0,611	0,622	0,631
14	0,591	0,594	0,601	0,610	0,620	0,638
17	0,591	0,595	0,601	0,609	0,618	0,636
20	0,591	0,595	0,600	0,608	0,617	0,634
23	0,593	0,596	0,600	0,605	0,613	0,638
26	0,595	0,597	0,599	0,604	0,610	0,632
29	0,597	0,598	0,599	0,603	0,606	0,627
32	0,596	0,597	0,599	0,602	0,605	0,623
35	0,596	0,597	0,598	0,600	0,603	0,618
38	0,596	0,596	0,598	0,600	0,603	0,614
41	0,595	0,596	0,597	0,598	0,601	0,611
44	0,594	0,596	0,596	0,596	0,598	0,601

EXEMPLE. — Calculer le débit d'un orifice circulaire de 0^m,30 diamètre, la charge sur le centre de l'orifice étant égale à 3 mètres.

La table ci-dessus donne 0,595 pour valeur du coefficient de contraction; on a donc :

$$Q = 0,595 \times 3,1416 \times 0,15^2 \times \sqrt{19,62 \times 3,00};$$

ou, en effectuant les calculs :

$$Q = 0^{\text{m}^3},322;$$

soit 322 litres par seconde.

46. **Contraction incomplète.** — Tout ce qui précède se rapporte au cas où la veine liquide se contracte sur le périmètre entier de l'orifice, autrement dit au cas où la contraction est complète. Les valeurs de m inscrites dans les tableaux ci-dessus s'appliquent seulement à ce cas.



FIG. 321.

Lorsque la contraction ne subsiste que sur une fraction du périmètre de l'orifice, condition qui est réalisée toutes les fois que les bords de l'orifice sont à des distances du fond ou des parois du vase inférieures à une fois et demie la plus petite dimension de l'ouverture, on conçoit que l'aire de la section contractée soit une fraction plus grande de celle de l'orifice que lorsque la contraction est complète, et que, par suite, la valeur du coefficient de contraction soit plus forte dans le premier cas que dans le second.

D'après Bidone, si l'on appelle m' le coefficient applicable à la contraction incomplète, m son correspondant pour la contraction complète, μ le rapport du périmètre de la paroi non contractée au périmètre total de l'orifice, on a :

1° Pour un orifice rectangulaire :

$$m' = m (1 + 0,15\mu);$$

2° Pour un orifice circulaire :

$$m' = m (1 + 0,13\mu).$$

Débit des vannes. — Le débit des vannes d'usines se fait par les formules précédentes; ordinairement les orifices sont rectangulaires.

Sur un barrage vertical *mn* est pratiquée une ouverture de largeur *l* derrière laquelle se meut une vanne *vu*, qui est à une hauteur *a* pour laisser passer l'eau.

Si on est la charge sur le sommet de l'orifice, on a :

$$z + \frac{a}{2}, \quad \omega = l z;$$

on a :

$$Q = mla \sqrt{2gh}.$$

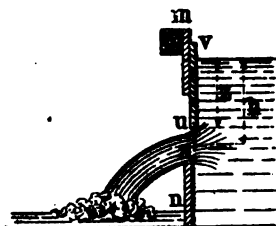


Fig. 322.

Le plus souvent on est en présence d'une vanne de fond, et l'installation présente la disposition de la figure 323, soit qu'il existe une petite chute à l'aval de la vanne comme le

dessin le montre, ou bien que le lit se prolonge horizontalement sans chute. Dans les deux cas, la contraction ne se produit que sur l'arête supérieure de l'orifice, on doit appliquer les coefficients de Bidone.

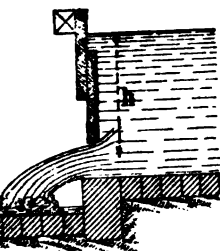


Fig. 323.

48. Table des débits. — La table ci-après facilite le calcul des débits des vannes de fond. Elle s'applique à des orifices rectan-

gulaires de 1 mètre de large; pour un orifice de largeur *l*, il faut multiplier par *l* le débit relevé dans la table. Les résultats sont un peu inférieurs à ceux que donnent les coefficients de Bidone; mais, dans l'espèce, il vaut mieux pécher par défaut que par excès.

TABLE DES DÉBITS D'UNE VANNE DE FOND

CHARGE sur le centre de l'orifice	DÉBIT EN LITRES PAR SECONDE POUR DES HAUTEURS D'ORIFICE DE :															
	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,18	0,20	0,25	0,30
0,10	41	53	61	69	78	87	94	102	110	119	126	134	150	167	254	307
0,12	54	65	73	83	94	105	115	125	135	145	155	165	188	203	274	333
0,15	62	75	86	98	109	122	133	145	157	168	179	190	213	235	329	400
0,20	70	82	96	110	124	138	149	162	175	188	201	214	239	264	363	445
0,25	76	91	106	120	135	149	161	175	192	206	220	234	264	291	393	471
0,30	82	98	114	130	146	162	177	192	208	223	238	253	284	314	418	507
0,35	88	107	122	139	156	173	189	206	222	238	255	271	304	337	440	538
0,40	93	111	130	148	165	183	201	219	236	253	271	288	324	362	468	568
0,45	98	117	136	155	174	193	212	230	249	267	285	304	340	377	486	588
0,50	107	128	148	170	191	212	230	251	272	292	312	330	370	414	516	624
0,60	116	139	161	184	208	228	249	272	294	316	338	360	403	447	549	670
0,70	124	148	171	196	220	246	267	291	314	338	361	385	431	485	588	718
0,80	131	157	183	207	236	259	284	309	334	359	384	409	459	509	613	762
0,90	138	165	192	219	246	272	299	326	352	379	405	432	484	536	640	801
1,00	145	173	201	229	257	285	314	341	368	396	424	452	506	562	666	833
1,10	151	181	210	240	267	298	327	356	385	414	443	472	529	586	690	860
1,20	157	187	218	249	279	310	340	371	401	431	461	491	551	610	714	889
1,30	162	194	226	258	289	321	353	384	416	446	477	509	571	631	736	915
1,40	168	201	233	266	300	332	365	397	429	462	493	526	589	650	756	938
1,50	173	207	241	275	309	342	376	409	443	476	509	542	606	668	775	961
1,60	178	213	248	283	318	352	387	422	456	491	524	559	624	687	795	984
1,70	182	218	254	290	326	361	396	431	466	501	536	571	637	701	810	1002
1,80	187	224	261	298	335	371	408	444	480	516	552	588	654	719	829	1024
1,90	191	229	267	305	343	380	418	455	492	530	566	603	670	735	846	1044
2,00	196	235	274	313	352	392	430	470	509	549	587	626	694	760	872	1072
2,25	204	244	285	324	364	404	446	486	526	566	606	646	716	782	896	1100
2,50	214	257	299	341	382	424	466	507	549	590	631	673	744	810	926	1132
3,00	235	281	327	371	414	456	500	543	586	629	672	715	788	854	972	1180
3,50	257	307	354	400	444	488	533	577	621	665	709	753	828	894	1014	1224
4,00	278	331	379	426	471	516	561	606	651	696	741	786	862	928	1050	1264

49. Vannes inclinées. — Dans quelques usines, on rencontre des vannes qui sont inclinées d'un certain angle sur la verticale. La formule du débit est la même, mais le coef-

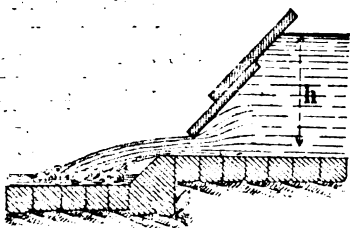


FIG. 324.

cient de contraction est plus élevé que pour une vanne verticale.

Pour une inclinaison de 45° , on peut faire :

$$m = 0,75.$$

50. Temps nécessaire à la vidange d'un réservoir par un orifice inférieur. — Nous supposons d'abord que le réservoir a la forme d'un parallélépipède rectangle de base

Si l'aire ω de l'orifice est assez petite par rapport à la surface de la base pour que l'on puisse négliger les vitesses des molécules placées sur la surface libre, on peut appliquer le théorème de Torricelli. Appelons h la hauteur initiale de l'eau dans le réservoir au-dessous de la surface libre, z cette hauteur au temps t .

Pendant l'intervalle de temps dt qui suit l'époque t , il s'écoule par l'orifice un volume d'eau représenté par $\omega \sqrt{2gz} dt$; mais, le plan d'eau dans le réservoir s'étant abaissé d'une hauteur $-dz$ (avec le signe $-$ puisque z

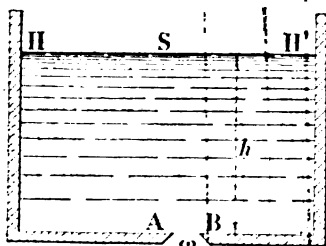


FIG. 325.

décroit avec t , le volume écoulé est encore égal à $-Sdz$; on a donc l'équation :

$$m\omega \sqrt{2gz} dt = -Sdz,$$

qui peut s'écrire, en séparant les variables,

$$\frac{m\omega}{S} \sqrt{2g} dt = -\frac{dz}{\sqrt{z}}. \quad (1)$$

Pour obtenir le temps T que met le réservoir à se vider, il suffit d'intégrer depuis h jusqu'à 0 , car pour $t = 0$, $z = h$, et pour $t = T$, $z = 0$; on a donc :

$$\frac{m\omega}{S} \sqrt{2g} T = -\int_h^0 \frac{dz}{\sqrt{z}} = -2[\sqrt{z}]_h^0 = 2\sqrt{h};$$

ce qui donne pour T :

$$T = \frac{2S\sqrt{h}}{m\omega \sqrt{2g}}.$$

Si l'on désigne par $V = Sh$ le volume d'eau contenu dans le réservoir, on a encore :

$$T = \frac{2V}{m\omega \sqrt{2gh}};$$

ce qui montre que le temps T est précisément le double de celui qui serait nécessaire si la vitesse d'écoulement restait constante et égale à sa valeur initiale.

EXEMPLE. — Quel temps mettra à se vider un réservoir de 3 mètres de hauteur et de 200 mètres carrés de surface, percé à sa base d'un orifice dont l'aire égale $1^{\text{m}},25$, en supposant $m = 0,625$?

On a :

$$h = 3,00, \quad S = 200, \quad \omega = 1,25, \quad m = 0,625;$$

par conséquent :

$$T = \frac{2 \times 200 \times 3,00}{0,625 \times 1,25 \times \sqrt{19,62 \times 3,00}} = 3^{\text{m}} 20^{\text{s}} 2.$$

On évaluerait de la même façon le temps t que mettrait le

l'eau pour s'abaisser à la hauteur z ; l'équation (1) en intégrant de h à z :

$$\frac{m\omega}{S} \sqrt{2g} t = - \int_h^z \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2 [\sqrt{z}]_z^h = 2 (\sqrt{h} - \sqrt{z}),$$

soit :

$$t = \frac{2S}{m\omega \sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{z}).$$

le cas d'un réservoir pyramidal dont le sommet est au centre, l'équation (1) subsiste encore, mais l'aire S cesse d'être constante pour devenir une fonction de z ; si S_0 est sa valeur initiale, c'est-à-dire l'aire de la surface libre, l'orifice n'est pas encore ouvert, et que les aires S et S_0 sont liées entre elles par la relation :

$$S = \frac{S_0}{h^2} z^2, \quad \text{d'où} \quad S = \frac{S_0}{h^2} z^2;$$

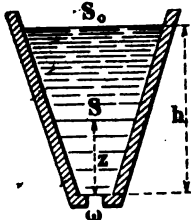


FIG. 326.

l'équation (1) devient donc :

$$m\omega \sqrt{2g} dt = - \frac{S_0}{h^2} \frac{z^2}{\sqrt{z}} dz = - \frac{S_0}{h^2} z^{\frac{3}{2}} dz;$$

soit :

$$m\omega \sqrt{2g} T = - \frac{S_0}{h^2} \int_h^0 z^{\frac{3}{2}} dz = \frac{2}{5} \frac{S_0}{h^2} \left[z^{\frac{5}{2}} \right]_0^h = \frac{2S_0}{5} \sqrt{h}.$$

Le temps nécessaire à la vidange est alors :

$$T = \frac{2}{5} \frac{S_0 \sqrt{h}}{m\omega \sqrt{2g}}.$$

Si on introduit le volume de la masse d'eau, on a :

$$V_1 = \frac{S_0 h}{3},$$

ce qui donne :

$$T = \frac{6}{5} \frac{V_1}{\cos \sqrt{2gh}}.$$

51. Tourbillons. — On donne ce nom à des mouvements giratoires réguliers et permanents, que l'on observe fréquemment dans l'écoulement par orifices et par vannes de fond, et dans lesquels les molécules liquides décrivent autour d'un axe vertical des trajectoires à peu près circulaires et horizontales. Par exemple, dans l'écoulement par un orifice inférieur, lorsque la charge d'eau du réservoir devient trop faible pour que la surface libre du liquide se maintienne horizontale, on voit cette surface devenir convexe, se creuser en entonnoir, et la masse d'eau tourner spontanément autour d'un axe sensiblement vertical, en même temps que le liquide descend le long de cet axe et s'écoule par l'orifice.

Les propriétés démontrées au numéro 32 s'appliquent aux mouvements tourbillonnants. Si l'on appelle V la vitesse d'une molécule liquide m située à la distance r de l'axe, a une quantité constante, on a la relation :

$$Vr = a.$$

Désignons par V_0 la vitesse avec laquelle les molécules arrivent sur la surface libre en m_0 , au bord du tourbillon; on peut écrire :

$$Vr = V_0 r_0 = a. \quad (1)$$

D'autre part, si l'on applique l'équation de Bernoulli à une molécule de la surface libre lorsqu'elle est descendue de m_0 en m , on obtient, en observant que la pression p est égale à p_0 :

$$z_0 + \frac{p_0}{\pi} + \frac{V_0^2}{2g} = z + \frac{p_0}{\pi} + \frac{V^2}{2g},$$

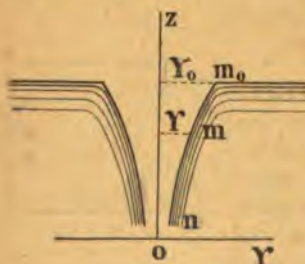


FIG. 327.

que l'on peut écrire d'après (1) :

$$z_0 - z = \frac{V^2 - V_0^2}{2g} = \frac{a^2}{2g} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right).$$

Cette relation entre z et r définit le profil m,n de la surface libre du liquide dans le tourbillon; on voit que ce profil est asymptote à l'axe de rotation oz ; mais il importe d'observer que la relation (1) ne s'applique pas aux molécules très voisines de l'axe, vers le point n , car leurs trajectoires circulaires ne sont plus horizontales.

AJUTAGES

52. On donne le nom d'ajutage à une portion de tuyau de petite longueur continuant intérieurement ou extérieurement un orifice percé en mince paroi. Il existe deux espèces d'ajutages : les *ajutages cylindriques* et les *ajutages coniques*. Nous parlerons très peu de ces derniers, qui ne sont d'aucune utilité.

La présence d'un ajutage modifie les conditions de l'écoulement en mince paroi et produit une certaine perte de charge.

53. **Ajutage parfaitement évasé.** — Dans cet ajutage, la paroi du tuyau épouse aussi exactement que possible la forme conique de la veine liquide; au droit de la section contractée ab , les filets d'eau sont tous parallèles; au delà, la veine est cylindrique.

Cet ajutage ne provoque qu'une perte de charge insignifiante; d'après Poncelet, le débit effectif Q est :

$$Q = 0,98\omega \sqrt{2gh};$$

ω désigne l'aire de la section ab , h la charge sur le centre de cette section. Michelotti indique pour les dimensions relatives qui donnent le maximum de débit : $AB = 100$, $ab = 80$, $ed = 50$.

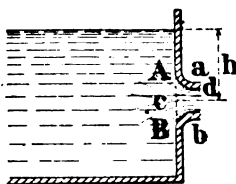


FIG. 228.

Lorsqu'une veine liquide traverse une paroi épaisse, on peut assimiler cette dernière à un ajutage.

54. Ajutage de Borda. — Dans l'ajutage cylindrique rampant de Borda, le coefficient m vaut exactement $\frac{1}{2}$, de sorte que l'on a :

$$Q = 0,50 \omega \sqrt{2gh}.$$

Ce coefficient peut se déterminer rigoureusement par le calcul, et l'expérience confirme les résultats de la théorie.

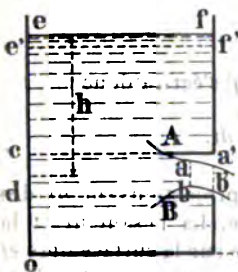


FIG. 550.

Cet ajutage fournit une veine plus nette et mieux calibrée que celle qui sortirait du même orifice percé en mince paroi.

Supposons que l'écoulement soit devenu permanent, et considérons la masse d'eau comprise entre la surface libre ef et la section contractée ab ; au bout d'un instant très court, cette masse d'eau s'est transportée dans la position très voisine $e'f'a'b'$; et l'on peut appliquer à ce déplacement le théorème des quantités de mouvement projetées sur l'horizontale ox . Si l'on désigne par V_0 la projection de la vitesse des molécules ef , par V la même projection pour les molécules ab , le théorème s'exprime par l'équation :

$$mV = mV_0 = \Sigma X dt. \quad (9)$$

Désignons par :

m , la masse du volume d'eau $efe'f'$ ou $aba'b'$;

h , la distance des sections ab et $a'b'$;

ω , l'aire de la section AB de l'ajutage;

ω' , l'aire de la section contractée ab .

On voit d'abord qu'en vertu de la permanence du régime la quantité de mouvement du liquide compris entre les sections $e'f'$ et ab est la même à l'instant final qu'à l'instant initial, puisque la vitesse de l'eau considérée en un même point reste constante en grandeur et en direction. La varia-

an de la quantité de mouvement de la masse liquide de considérée se réduit donc à la différence entre la quantité de mouvement du volume $aba'b'$ et celle du volume $efe'f'$.

Mais, pour les molécules du volume $efe'f'$, les vitesses sont verticales, c'est-à-dire normales à l'axe de projection ox ; elles ont donc une projection nulle, et l'on a $V_0 = 0$. L'accroissement de la quantité de mouvement projetée se réduit donc à mV . Comme le volume $aba'b'$ est égal à $\omega \epsilon$, sa masse

pour valeur $\frac{\pi \omega \epsilon}{g}$, ou encore, puisque $\epsilon = Vdt$:

$$m = \frac{\pi \omega V dt}{g}$$

Le premier membre de l'équation (q) s'écrit donc :

$$\frac{\pi \omega V dt}{g} \cdot V = \frac{\pi \omega V^2}{g} dt$$

Évaluons maintenant la somme des projections sur ox des forces appliquées au système liquide. La pesanteur et la pression atmosphérique p_0 qui s'exerce sur la surface libre ef sont verticales, de sorte que leurs projections sont nulles. Les réactions normales des parois du vase et de l'ajutage ont partout équilibrées par des réactions égales et directement opposées, sauf pour la section de paroi cd interceptée par le prolongement de l'ajutage. Sur cette section dont l'aire est égale à ω , la pression totale vaut $(p_0 + \pi h)\omega$, et, comme elle est dirigée suivant ox , elle s'y projette en vraie grandeur, ainsi que la réaction égale et opposée. Sur le contour $AabB$ de la veine liquide et sur la section contractée ab , la pression est égale à celle de l'atmosphère (42); comme la projection verticale du contour $AabB$ couvre la section entière AB de l'ajutage, la résultante des actions de la pression p_0 sur ce contour est égale à $p_0 \omega$, et elle est dirigée suivant ox dans le sens négatif. En résumé, on a :

$$\Sigma X = (p_0 + \pi h)\omega - p_0 \omega = \pi h \omega$$

de sorte que l'équation (q) devient :

$$\frac{\pi \omega V^2}{g} dt = \pi h \omega dt$$

ou bien, en divisant par la durée dt du déplacement et observant que $V^2 = 2gh$:

$$\frac{\pi \omega' \times 2gh}{g} = \pi \omega h,$$

ou enfin :

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{2}.$$

Le coefficient de contraction étant précisément égal au rapport des aires ω' et ω , on a bien $m = 0,50$.

55. Changement brusque de la section d'un courant

liquide. — Lorsqu'un liquide s'écoule dans un tuyau, tout changement brusque de la section d'écoulement provoque une absorption de force vive qui se traduit par une perte de charge plus ou moins considérable.

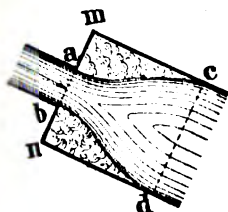


FIG. 330.

En vertu de la permanence du mouvement, la vitesse des filets liquides dans la section élargie cd est inférieure à leur vitesse dans

la section ab , de sorte que les molécules arrivant de ab heurtent celles qui les précèdent, glissent sur elles, et tourbillonnent dans les angles en produisant des *remous*. C'est un phénomène analogue à celui du choc de deux corps mous, qui est toujours accompagné d'une perte de force vive précisément égale à la force vive correspondante à la vitesse perdue.

56. Élargissement brusque. — Pour évaluer la perte de charge due à l'élargissement brusque de section, supposons que l'écoulement soit devenu permanent, et considérons la tranche d'eau comprise entre les sections ab et cd , dans lesquelles les filets liquides sont parallèles à l'axe du tuyau xy . Au bout d'un instant très court, cette tranche s'est transportée dans la position très voisine $a'b'c'd'$, et l'on peut appli-

er à ce déplacement le théorème des quantités de mouvement projetées sur xy .

Supposons, pour simplifier, que toutes les molécules d'eau

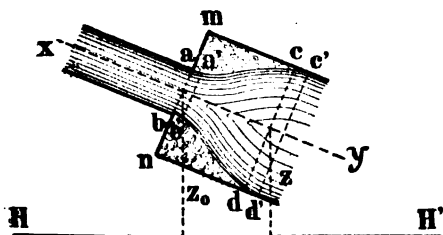


FIG. 331.

qui traversent la section ab aient une vitesse commune V_0 , que, parvenues en cd , elles aient également une même vitesse V .

Désignons par :

ω_0 , l'aire de la section ab ;

ω , l'aire de cd ;

p_0 , la pression moyenne sur ab ;

p , la pression moyenne sur cd ;

z_0 , l'ordonnée du centre de gravité de la section ab ;

z , l'ordonnée du centre de gravité de cd ;

ρ , la densité du liquide.

D'après une remarque déjà faite, on sait que la variation de la quantité de mouvement de la tranche liquide considérée se réduit à la différence entre la quantité de mouvement du volume $aba'b'$ et celle du volume $cdc'd'$.

Dans l'unité de temps, il passe au droit de la section cd un volume de liquide ωV , dont la masse est $\rho \omega V$; dans le temps dt , il passe une masse $\rho \omega V dt$, de sorte que le premier membre de l'équation (q) des quantités de mouvement projetées sur xy s'écrira :

$$\rho \omega V dt (V - V_0),$$

car les vitesses V_0 et V ont la direction de l'axe du tuyau.

En pénétrant dans la partie élargie, la veine liquide se gonfle pour occuper la section totale du tuyau; l'air se confine d'abord dans les angles *amc* et *bnd*, mais il ne tarde pas à être entraîné et remplacé par un liquide pour ainsi dire mort, qui tourbillonne très lentement, animé de mouvements non translatatoires, et dans lequel la pression varie suivant la loi hydrostatique, à cause de la lenteur du mouvement (38).

Évaluons la somme des projections des forces qui agissent sur la tranche liquide; il y a lieu de considérer le poids de ce liquide et les pressions normales.

Le poids est égal à celui du cylindre *mncd*, ou $\rho g \omega \times mc$, et sa composante suivant *xy* est $\rho g \omega (z_0 - z)$. Les pressions qui agissent normalement aux contours *ac* et *bd* donnent des projections dont la résultante, dirigée suivant l'axe du tuyau, est égale au produit de l'aire de la couronne *amnb* par la pression p_0 qui s'exerce sur son centre; enfin, les sections *ab* et *cd* supportent des pressions opposées, respectivement égales à $p_0 \omega_0$ et $p \omega$.

En résumé, l'équation (q) devient, en supprimant le facteur *dt* :

$$\rho \omega V (V - V_0) = \rho g \omega (z_0 - z) + p_0 (\omega - \omega_0) + p_0 \omega_0 - p \omega;$$

divisant par $\rho g \omega = \pi \omega$, on obtient :

$$\frac{V (V - V_0)}{g} = z_0 - z + \frac{p_0}{\pi} - \frac{p}{\pi},$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$z_0 + \frac{p_0}{\pi} + \frac{V_0^2}{2g} = z + \frac{p}{\pi} + \frac{V^2}{2g} + \frac{(V_0 - V)^2}{2g}. \quad (4)$$

Si l'on rapproche cette équation de celle de Bernoulli (38), on voit que, pour un même filet liquide, l'ordonnée du plan de charge cesse d'être constante; dans la section *cd*, ce plan est plus bas que dans la section *ab*, et la hauteur de chute, c'est-à-dire la perte de charge, est représentée par :

$$\frac{(V_0 - V)^2}{2g}.$$

précisément la hauteur capable de la vitesse perdue par le liquide.

Il importe d'observer que, pour établir l'équation (1), nous avons négligé le frottement du liquide sur les parois du tuyau; nous avons, en outre, supposé que, dans les sections ab et cd , les vitesses des filets liquides étaient toutes égales. Malheureusement l'observation s'accorde assez peu avec ces hypothèses; dans la pratique, le frottement sur les parois n'est jamais négligeable, et la vitesse des filets liquides, au lieu de rester constante dans la même section, va au contraire en diminuant du centre à la périphérie. Pour tenir compte de ces deux causes d'absorption de force vive, il convient, d'après les expériences de Borda, de majorer la quantité $\frac{V^2}{2g}$ d'environ $\frac{1}{9} \frac{V^2}{2g}$; de sorte que la perte de charge résultant d'un élargissement brusque de section est sensiblement représentée par :

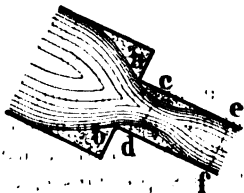
$$\frac{(V_0 - V)^2}{2g} + \frac{1}{9} \frac{V^2}{2g} = \frac{V^2}{2g} \left[\left(\frac{V_0}{V} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \right].$$

encore, en observant que la relation $V\omega = V_0\omega_0$ donne $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{V_0}{V}$:

$$\frac{V^2}{2g} \left[\left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \right]. \quad (2)$$

57. Rétrécissement brusque. — Le rétrécissement brusque d'un courant liquide produit également une perte de charge.

Les filets d'eau traversent la section rétrécie ab en convergeant, passent ensuite dans la section contractée cd , puis divergent de nouveau. Il y a donc un élargissement rapide de section entre cd et ef , et, par suite, une perte de charge.



Dans le cas de la figure 333, appelons ω_0 l'aire de la section ab , ω celle de ef , m le coefficient de contraction, V la vitesse du liquide dans la section ef .

D'après la formule (2), la perte de charge a pour expression :

$$\frac{V^2}{2g} \left[\left(\frac{\omega}{m\omega_0} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \right],$$

car l'aire de la section contractée est égale à $m\omega_0$.

Sur la figure 332, les sections ef et ab sont égales; on a $\omega_0 = \omega$, et la perte de charge a pour valeur :

$$\frac{V^2}{2g} \left[\left(\frac{1}{m} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \right].$$

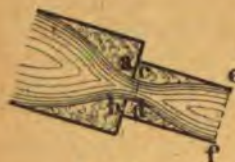


FIG. 333.

Si l'on fait $m = 0,62$, on obtient approximativement pour la perte de charge ξ due au changement de diamètre du tuyau :

$$\xi = \frac{V^2}{2g} (0,388 + 0,412) = 0,50 \frac{V^2}{2g},$$

c'est-à-dire :

$$\xi = \frac{V^2}{4g}.$$

58. Ajutage cylindrique extérieur. — Lorsque la longueur de l'ajutage est supérieure à une fois et demie et inférieure à deux fois et demie le diamètre ab de l'orifice, le débit est donné par la formule :

$$Q = 0,82\omega \sqrt{2gh};$$

ω représente l'aire de la section ab ou de cd .

On voit que ce débit est sensiblement supérieur à celui que donnerait le même orifice ouvert en mince paroi.

L'observation montre que les filets liquides commencent par converger; ils traversent ensuite la section contractée, puis divergent de nouveau; de sorte qu'à l'extrémité de l'ajutage l'écoulement s'effectue à plein tuyau.

On peut se rendre compte de l'accroissement de la vitesse

la section cd en appliquant l'équation de Bernoulli au d'une molécule depuis son sur la surface libre ef , sée invariable, jusqu'à son e dans la section cd . Évi- ent il faut tenir compte de e de charge produite par le ement de section.

ons la droite gl comme ho- ale de comparaison, et appe-

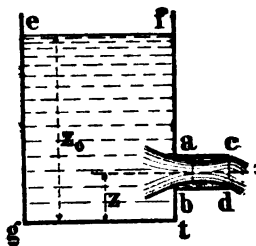


FIG. 334.

a vitesse des filets liquides

la section cd ;

ordonnée du centre de cette section;

aire de la section cd , ou de l'orifice ab ;

l'ordonnée du plan ef .

on observe que, sur la surface libre ef , la pression p_0 ale à celle de l'atmosphère, et que la vitesse des molé- est nulle, on a l'équation :

$$z_0 + \frac{p_0}{\pi} = z + \frac{p_0}{\pi} + \frac{V^2}{2g} + \frac{V^2}{4g},$$

on déduit, puisque $z_0 - z = h$:

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{2}{3} h,$$

:

$$V = 0,82 \sqrt{2gh}.$$

te vitesse s'applique à la section cd d'aire ω , ce qui jus- la formule du débit.

ns l'écoulement en mince paroi, la vitesse était égale $\sqrt{2gh}$, et le débit avait pour expression $0,62\omega\sqrt{2gh}$. On que la présence de l'ajutage a eu pour effet de réduire esse, mais d'augmenter la section d'écoulement et, par , le débit.

largissement de la veine au delà de la section contractée t à une diminution graduelle de la pression dans le e stagnant confiné autour de cette section. Ce fait a

été mis en évidence par une expérience célèbre, souvent rappelée, et due à Venturi. Ce physicien ayant eu l'idée de faire communiquer, au moyen d'un tube, l'ajutage, au droit de la contraction, avec un vase voisin contenant de l'eau, le liquide s'éleva graduellement dans le tube jusqu'à une certaine hauteur, laquelle hauteur mesurait évidemment la dépression dans l'ajutage. Mesurant alors cette hauteur, il la trouva égale à $0,75h$; c'est précisément le nombre qu'indique la théorie lorsqu'on fait $m = 0,62$.

59. Ajutages coniques. — Ajutage convergent. — Les filets liquides, d'abord convergents, traversent la section contractée, divergent ensuite, puis redeviennent convergents à cause de la forme de l'ajutage.



Fig. 335.

Entre la section contractée et l'orifice cd , il y a perte de charge due au changement de la section d'écoulement. La vitesse de sortie est donnée par la formule :

$$V = \mu \sqrt{2gh};$$

mais, cette vitesse ne s'appliquant qu'à la section mn dont l'aire est $m\omega$, en appelant ω l'aire de cd , le débit est réglé par l'équation :

$$Q = m\omega\mu\sqrt{2gh} = (m\mu)\omega\sqrt{2gh}.$$

Les coefficients m et μ varient avec la conicité de l'ajutage. L'expérience montre que le débit maximum est obtenu lorsque l'angle au sommet du cône est égal à 12° ; on a alors $m = 0,99$, $\mu = 0,95$, d'où :

$$Q = 0,94\omega\sqrt{2gh}.$$

Si cet angle est nul, l'ajutage est cylindrique, $m = 1$, et $\mu = 0,82$.

Ajutage divergent. — Lorsque le profil de l'ajutage est de façon que la veine liquide reste constamment en contact avec le tuyau, l'élargissement de la section d'écoulement se fait d'une manière continue, sans agitation tourbillonnaire, de sorte que la perte de charge est insignifiante. La vitesse à l'orifice est donc égale à $\sqrt{2gh}$, et le débit a pour expression :

$$Q = \omega \sqrt{2gh},$$

signifiant l'aire de la section cd .

On serait tenté de croire,

d'après cette formule, que le débit peut être rendu aussi grand qu'on le voudra en augmentant sans cesse l'aire de l'orifice cd par rapport à gf . En réalité, l'accroissement est limité par ce fait que la pression en gf ne peut descendre au-dessous de la pression atmosphérique p_0 , à partir de laquelle l'écoulement devient tumultueux, auquel cas la formule ci-dessus n'est plus applicable.

Appelons V et p la vitesse et la pression au centre de la section gf d'aire ω ; V_0 et p_0 les mêmes éléments pour la section cd d'aire ω' . Pour que l'écoulement soit possible, au moins théoriquement, il faut que p soit supérieur à 0. Or, si l'on applique le théorème de Bernoulli au trajet d'une molécule d'eau de gf en cd , en prenant pour horizontale de comparaison celle qui passe par le centre de gf , on obtient l'équation :

$$p + \frac{V^2}{2g} = p_0 + \frac{V_0^2}{2g},$$

donne

$$p = p_0 + \frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g}.$$

D'autre part, la permanence de l'écoulement exige que $\omega V = \omega' V_0$; d'où, en suite :

$$p = p_0 + \frac{V^2}{2g} - \frac{\omega^2 V^2}{\omega'^2 2g},$$

soit :

$$p = p_0 - \frac{V^2}{2g} \left(\frac{\omega^2}{\omega'^2} - 1 \right).$$

ou encore :

$$\frac{p}{\pi} = \frac{p_0}{\pi} - h \left(\frac{\omega^2}{\omega'^2} - 1 \right).$$

La limite supérieure de ω répond au cas où p serait nulle, ou alors :

$$\omega = \omega' \sqrt{1 + \frac{p_0}{\pi h}},$$

et l'expression du débit maximum est :

$$Q = \omega' \sqrt{2g \left(h + \frac{p_0}{\pi} \right)};$$

c'est le débit qu'on obtiendrait sans le secours de l'ajutage, si la veine liquide débouchait dans le vide barométrique.

60. Jet d'eau vertical. — Le calcul des jets d'eau au point de vue de l'hydraulique s'effectue au moyen des formules

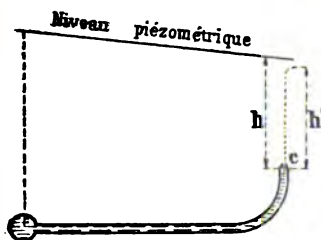


Fig. 337.

proposées, il y a fort longtemps déjà, par d'Aubuisson en France, et Weisbach en Allemagne.

Ces formules sont purement empiriques; elles ont été déduites d'observations plus ou moins nombreuses et font connaître la hauteur d'élévation d'un jet d'eau en fonction de la charge sur l'orifice, sans tenir compte

de la conformation de cet orifice, de la vitesse d'écoulement, du diamètre de la conduite, de son débit, etc.

Nous nous proposons de généraliser le calcul et d'établir une formule dans laquelle il sera tenu compte de la vitesse initiale du liquide et de la résistance opposée par l'air au mouvement ascensionnel de l'eau.

Formule de d'Aubuisson. — Considérons un jet d'eau vertical établi à l'extrémité c d'une conduite.

Pour que ce jet d'eau soit appréciable, il faut que l'orifice d'écoulement ait une section notablement moindre que celle du tuyau alimentaire.

Appelons h la pression sur ce tuyau au voisinage de l'orifice, h' la hauteur d'élévation du jet.

D'Aubuisson, après quelques expériences, avait indiqué entre h et h' la relation empirique :

$$h' = h - 0,01h^2.$$

Cette formule donne des résultats assez approchés tant que la pression h reste comprise entre 10 et 30 mètres; mais, au-dessus, l'écart en moins avec les hauteurs constatées augmente rapidement. Pour $h = 40$ mètres, la différence dépasse 3 mètres.

D'ailleurs, la formule ne vaut que pour des ajutages de section moyenne, entre 0,02 et 0,03.

Formule de Weisbach. — La formule de Weisbach ne vaut que pour les pressions inférieures à 20 mètres; elle s'écrit :

$$h' = \frac{h}{\alpha + \beta h + \gamma h^2};$$

α , β , γ sont des coefficients numériques dont les valeurs dépendent du diamètre de l'orifice et de la forme de l'ajutage. Le tableau ci-après donne les coefficients applicables aux ajutages coniques, pour des diamètres compris entre 0,01 et 0,016; on y trouve également les valeurs du rapport $\frac{h'}{h}$ pour $h = 5, 10, 15$ mètres.

DIAMÈTRES d	α	β	γ	RAPPORT $\frac{h'}{h}$		
				$h = 5,00$	$h = 10,00$	$h = 15,00$
0,010	1,016	0,007	0,0004	0,942	0,886	0,824
0,014	1,022	0,002	0,0003	0,960	0,928	0,884
0,016	1,060	0,005	0,0072	0,950	0,927	0,876

D'après les nouvelles expériences de M. Lueger, effectuées en 1884 avec des becs d'un diamètre compris entre 0,01.

et 0,03, on pourrait écrire plus simplement la formule de Weisbach :

$$h = \frac{h}{1 + \alpha h},$$

en posant

$$\alpha = \frac{0,0025}{d + (10d)^3};$$

d représente le diamètre de l'orifice. Les diverses valeurs de α sont indiquées dans le tableau ci-après :

DIAMÈTRES d m	α	MAXIMUM de h'
0,010	0,0228	44,00
0,015	0,0136	73,00
0,020	0,009	111,00
0,025	0,0061	163,00
0,030	0,0034	227,00

Formules générales. — Plus généralement, considérons un branchement ac piqué sur la conduite maîtresse A et à l'extrémité duquel existe un ajutage formant jet d'eau. Supposons que ce dernier soit ouvert.

Appelons :

H , la pression sur la conduite à la prise a , comptée au-dessus du niveau de l'ajutage ;

h , la pression sur le branchement au point c où l'ajutage est fixé ;

h' , la hauteur d'élévation du jet d'eau ;

l, D , la longueur et le diamètre du branchement ;

V_0 , la vitesse d'écoulement du liquide à la sortie de l'ajutage ;

Q, ω , le débit du jet d'eau et la section de l'ajutage.

Sur le branchement, l'équation de Darcy donne entre les points a et c (84) :

$$H - h = \frac{64b_l Q^2}{\pi \cdot D^5}; \quad (1)$$

on néglige la petite perte de charge qui se produit à l'origine a par

suite du changement de section, ce qui n'aura aucune influence appréciable dans la plupart des cas pratiques.

À l'extrémité du branchement, la formule des ajutages s'écrit :

$$V_0 = m \sqrt{2gh}. \quad (2)$$

Pour des ajutages moyennement convergents, ce qui est le cas ordinaire, $m = 0,92$; mais on doit faire $m = 0,98$ pour des ajutages divergents; $m = 0,82$ pour les ajutages cylindriques; $m = 1$ lorsque l'orifice est buvert en mince paroi.

L'équation du débit donne en troisième lieu :

$$Q = m' \omega V_0. \quad (3)$$

m' est un coefficient de réduction dont la valeur approche de 0,98, sauf dans le cas d'ajutages très convergents ou de mince paroi, auxquels cas $m' = 0,62$.

Pour déterminer complètement le problème, il reste à établir une relation entre la hauteur h et la vitesse initiale V_0 ; nous y parviendrons en appliquant l'équation du mouvement d'un point matériel à une molécule liquide issue de l'orifice c avec une vitesse V_0 , et qui se meut dans un milieu dense dont la résistance varie proportionnellement à la vitesse. Cette loi de résistance peut être admise dans l'espace, car c'est elle qui régit le mouvement des projectiles dans l'air lorsque la vitesse initiale ne dépasse pas 400 mètres par seconde.

Loi de l'écolement. — Vitesse. — Considérons une molécule liquide de masse ω qui se meut verticalement de bas en haut sur un axe cz à partir d'une origine c . Les forces qui agissent sur cette molécule sont la pesanteur ωg et la résistance R opposée par l'air au mouvement d'ascension; ces deux forces étant dirigées de haut en bas, on a l'équation du mouvement :

$$\omega \frac{d^2z}{dt^2} = -\omega g - R;$$

comme d'après l'hypothèse la résistance de l'air varie proportionnellement à la vitesse, on peut également poser, en désignant par a une constante :

$$R = \omega \frac{g}{a} \frac{dz}{dt};$$

par suite :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{g}{a} \frac{dz}{dt}. \quad (a)$$

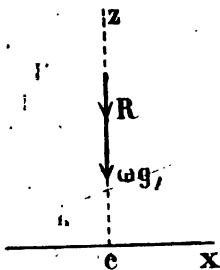


Fig. 339.

Pour intégrer cette équation du second ordre, il est commode de changer de variable par la relation :

$$u = z + at;$$

on trouve d'abord par double différentiation

$$\frac{du}{dt} = \frac{dz}{dt} + a, \quad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

portant ces expressions dans (α), on obtient, après réductions :

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{g}{a} \frac{du}{dt},$$

et, dans cette équation, on reconnaît la différentielle de la fonction :

$$\log \frac{du}{dt} = -\frac{g}{a} t + C.$$

Mais à la sortie de l'ajutage en c, pour $t = 0$, on a $\frac{dz}{dt} = V_0$; cette condition permet de déterminer la constante C dont la valeur est :

$$C = \log(V_0 + a);$$

en conséquence,

$$\log \frac{du}{dt} = -\frac{g}{a} t + \log(V_0 + a).$$

Si, maintenant, on passe des logarithmes aux exponentielles, on obtient :

$$\frac{du}{dt} = (V_0 + a)e^{-\frac{g}{a}t};$$

la seconde intégration est ainsi rendue immédiate, on trouve en revenant d'abord à la variable z :

$$\frac{dz}{dt} = -a + (V_0 + a)e^{-\frac{g}{a}t}, \quad (\beta)$$

puis

$$z = -at + \frac{a}{g}(V_0 + a)e^{-\frac{g}{a}t} + C',$$

et si l'on écrit que, pour $t = 0$, $z = 0$, il vient après élimination de C' :

$$z = -at + \frac{a}{g}(V_0 + a)\left(1 - e^{-\frac{g}{a}t}\right). \quad (\gamma)$$

Telle est l'équation du mouvement de la molécule liquide dans

air; t représente le temps, g est l'accélération due à la pesanteur, la base du système de logarithmes népériens. La formule (3) fait connaître à chaque instant la valeur de la vitesse.

Hauteur du jet d'eau. — La vitesse de la molécule d'eau diminue depuis sa valeur V_0 à l'ajutage jusqu'à 0 au point culminant du jet, après quoi le mouvement change de sens et le liquide tombe. La durée t de l'ascension est racine de l'équation :

$$-a + (V_0 + a)e^{-\frac{g}{a}t} = 0,$$

d'où l'on déduit :

$$e^{-\frac{g}{a}t} = \frac{a}{V_0 + a},$$

et l'on a :

$$t = -\frac{a}{g} \log \frac{a}{V_0 + a}.$$

Si l'on porte cette expression de t dans la formule (7), la valeur correspondante de z est précisément la hauteur h' du jet d'eau obtenue :

$$h' = \frac{a^2}{g} \log \frac{a}{V_0 + a} + \frac{a}{g} (V_0 + a) \left[1 - \frac{a}{V_0 + a} \right];$$

ce qui simplifie :

$$h' = \frac{aV_0}{g} - \frac{a^2}{g} \log \frac{V_0 + a}{a}. \quad (4)$$

Telle est la relation que nous avons en vue au paragraphe 4 après un groupe d'expériences effectuées par nous sur des becs de 0,02 et 0,03 de diamètre avec des pressions variables de 3 à 5 mètres, on pourrait attribuer à la constante a la valeur 75.

Pour faciliter le calcul de la formule (4), nous reproduisons après une table de logarithmes népériens pour les nombres compris entre 1 et 10.

Les formules (1), (2), (3), (4) donnent la solution des divers problèmes pratiques qui peuvent se présenter dans le calcul des jets d'eau. Nous développerons les deux applications suivantes, qui présentent un certain intérêt.

LOGARITHMES NÉPÉRIENS

1° De centième en centième, pour les nombres compris entre 1 et 10

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
1,0	0,000	0,010	0,020	0,030	0,039	0,049	0,058	0,068	0,077	0,086	9
1,1	0,095	104	113	122	131	140	148	157	165	174	8
1,2	182	191	199	207	215	223	231	239	247	255	7
1,3	262	270	278	285	293	300	307	315	322	329	6
1,4	336	344	351	358	365	372	378	385	392	399	6
1,5	405	412	419	425	432	438	445	451	457	464	6
1,6	470	476	482	487	495	501	507	513	519	525	6
1,7	531	536	542	548	554	560	565	571	577	582	6
1,8	588	593	599	604	610	615	621	626	631	637	5
1,9	642	647	652	657	663	668	673	678	683	688	5
2,0	693	698	703	708	713	718	723	727	732	737	5
2,1	742	747	751	756	761	765	770	775	779	784	4
2,2	788	793	797	802	806	811	815	820	824	829	4
2,3	833	837	842	846	850	854	859	863	867	871	4
2,4	875	880	884	888	892	896	900	904	908	912	4
2,5	916	920	924	928	932	936	940	944	948	952	4
2,6	956	959	963	967	971	975	978	982	986	989	4
2,7	993	997	1,001	1,004	1,008	1,012	1,015	1,019	1,022	1,026	4
2,8	1,030	1,033	1,037	1,040	1,044	1,047	1,051	1,054	1,058	1,061	4
2,9	1,065	1,068	1,072	1,075	1,078	1,082	1,085	1,089	1,092	1,095	4

2° De dixième en dixième, pour les nombres compris entre 1 et 10

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
1	0,000	0,095	0,182	0,262	0,336	0,405	0,470	0,531	0,588	0,642	51
2	0,693	0,742	0,788	0,833	0,875	0,916	0,955	0,993	1,030	1,065	34
3	1,099	1,131	1,163	1,194	1,224	1,253	1,281	1,308	1,335	1,361	25
4	386	411	435	459	482	504	526	548	569	589	20
5	609	629	649	668	686	705	723	740	758	775	17
6	792	808	824	840	856	872	887	902	917	934	14
7	946	960	974	988	2,001	2,015	2,028	2,041	2,054	2,067	12
8	2,079	2,092	2,104	2,116	2,128	2,140	2,152	2,163	2,175	2,186	11
9	2,197	2,208	2,219	2,230	241	251	262	272	282	2,292	10
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.

PROBLÈME I. — Un jet d'eau vertical est alimenté par un branchement dont la longueur et le diamètre sont connus. On connaît également la section du jet et la pression sur la conduite alimentaire.

Calculer le débit du jet d'eau et la hauteur d'élévation du liquide.

D'après les notations précédentes, on donne H , l , D , ω ; il faut calculer Q et h' .

L'élimination de V_0 entre les relations (2) et (3) donne :

$$V_0 = \frac{Q}{m\omega} = m\sqrt{2gh'}$$

et l'on déduit :

$$h' = \frac{Q^2}{m^2 m^2 \omega^2 \times 2g}$$

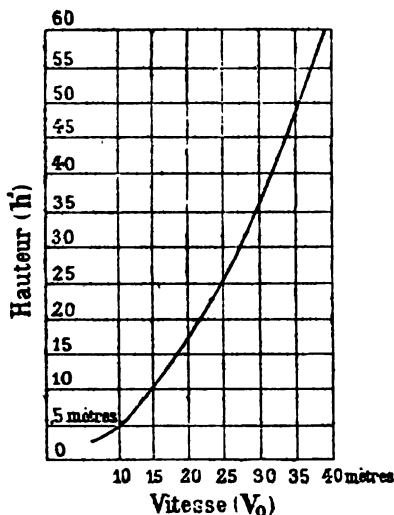


FIG. 340.

Portant cette valeur dans (1), il vient, en résolvant par rapport Q :

$$Q^2 = \frac{H}{\frac{64b_1 l}{\pi^2 D^5} + \frac{4}{m^2 m^2 \omega^2 \times 2g}}$$

Tout est connu dans le second membre, ce qui permet de calculer le débit. Il va sans dire que les coefficients m et m' seront déterminés dans chaque cas par la forme de l'ajutage.

Connaissant le débit, la formule (3) permet d'obtenir la vitesse V_0 , et l'on déduit la hauteur du jet h' au moyen de l'équation (4).

PROBLÈME II. — Un jet d'eau vertical est alimenté par un bran-

chement dont la longueur et le diamètre sont connus. On connaît également la pression sur la conduite alimentaire.

Quelle section faut-il donner à l'orifice pour que le liquide s'élève à une hauteur déterminée? Calculer ensuite le débit.

Dans le cas présent, on donne H , L , D , h' ; il faut calculer Q et ω .

De l'équation (4) on déduira V_0 par la méthode des approximations successives; ce calcul sera immédiat avec la courbe (fig. 340) qui exprime la relation existant entre V_0 et h' . L'équation (2) fera ensuite connaître h . Avec la charge h , la relation (1) donnera le débit Q . Enfin on obtiendra ω au moyen de l'équation (3).

DÉVERSOIRS

61. Un orifice d'assez grandes dimensions ouvert à sa partie supérieure constitue un déversoir; la crête supérieure horizontale s'appelle le seuil, et les côtés latéraux les jones.

Lorsque le seuil a une très petite épaisseur, on dit que le déversoir est en *mince paroi* (fig. 342); dans le cas contraire, il est à *crête épaisse* (fig. 332).

On réalise le déversoir en mince paroi en constituant le seuil par une feuille de tôle ou par une planche taillée en biseau.



FIG. 341.

62. Déversoir en mince paroi. — En suivant attentivement l'écoulement de l'eau sur un déversoir en mince paroi, on ne tarde pas à reconnaître que la surface du

liquide, d'abord horizontale, s'abaisse en passant sur le seuil. Les filets d'eau inférieurs qui touchent la crête ont une direction inclinée qui produit un phénomène de contraction, de sorte que l'épaisseur h' de la lame d'eau qui tombe est inférieure à la hauteur h du niveau d'amont au-dessus du seuil.

Les expériences de M. Bazin, venant confirmer celles d'Aubuisson et de Poncelet, ont montré que le débit pouvait

représenter par la formule générique, analogue à celle des orifices :

$$Q = m h \sqrt{2gh}; \quad (1)$$

représente la longueur du déversoir.

Mais la valeur du coefficient m est influencée par divers éléments :

- 1° Vitesse d'arrivée de l'eau sur le déversoir;
- 2° Contraction longitudinale qui dépend de la forme du seuil;
- 3° Contraction latérale qui varie avec la longueur du déversoir;
- 4° Accès de l'air sous la nappe dans l'espace A.

Pour justifier la formule (1), on est conduit à admettre que, lorsque le régime permanent est établi d'une manière stable, et que le débit du déversoir reste constant ainsi que la hauteur h , l'épaisseur h' de la lame d'eau qui tombe est minimum. Cette hypothèse revient d'ailleurs à admettre que, dans les mêmes conditions, pour une valeur déterminée de h' , le débit du déversoir est maximum.

On voit, en effet, que le débit Q dépend de la charge d'eau h et de la hauteur h' de la section d'écoulement; c'est-à-dire que l'on a $Q = f(h, h')$, d'où l'on déduit :

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial h} dh + \frac{\partial Q}{\partial h'} dh'.$$

Si Q reste constant ainsi que h , mais que h' soit variable, on a $dQ = 0$, $dh = 0$, $dh' \neq 0$; par suite, $\frac{\partial Q}{\partial h'} = 0$. Or cette dernière équation montre que le débit Q , considéré comme fonction de h' , est maximum pour une valeur donnée de cette variable; l'hypothèse ci-dessus se trouve donc justifiée.

63. Théorie du déversoir en mince paroi. — On suppose que tous les filets liquides qui traversent la section con-

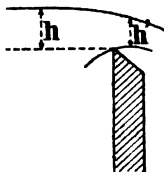
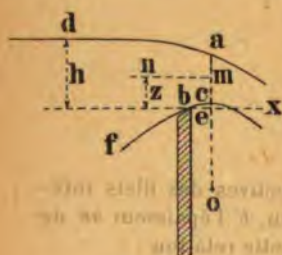


Fig. 342.

tractée ac sont normaux à cette section, c'est-à-dire que les trajectoires des diverses molécules ont même centre de courbure o . Ceci revient à admettre que la masse liquide, au droit de la section ac , tourne autour d'un axe horizontal passant par o et parallèle au seuil du déversoir. Les forces extérieures, qui sont ici la pesanteur, rencontrent l'axe de rotation, et sur tous les points d'un filet la pression est constante.

Rapportons les ordonnées à une horizontale bx passant par le seuil du déversoir; appelons R_0 le rayon de courbure oc du



filet inférieur, ϵ le relèvement ce de ce filet par rapport à bx , z l'ordonnée d'un filet quelconque m pour lequel le rayon de courbure est $R = R_0 + z - \epsilon$ et la vitesse V .

La dernière des équations (1) du numéro 33 peut s'écrire :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z - \frac{d^2z}{dt^2} \quad (\alpha)$$

Fig. 343.

Actuellement l'axe des z est parallèle à om , de sorte que la composante verticale de l'accélération du point m n'est autre chose que sa composante normale changée de signe, c'est-à-dire que l'on a :

$$-\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{V^2}{R}.$$

D'autre part, l'unique force extérieure qui agit sur la molécule m est la pesanteur; par suite :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g.$$

L'équation (α) peut donc s'écrire :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = -g + \frac{V^2}{R}.$$

Enfin l'équation du régime permanent (37) :

$$\frac{1}{\rho} dp = Xdx + Ydy + Zdz - VdV,$$

ent ici :

$$\frac{1}{\rho} dp = -g dz - V dV,$$

ne l'on peut aussi écrire :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = -g - V \frac{dV}{dz}.$$

Valant les deux expressions de $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}$, on obtient immédiatement :

$$\frac{V}{R} + \frac{dV}{dz} = 0,$$

ou, en observant que $dz = dR$,

$$\frac{V}{R} + \frac{dV}{dR} = 0.$$

L'intégration donne :

$$VR = \text{const}^e.$$

Appelons V_0 et V_1 les vitesses respectives des filets inférieurs et supérieurs de la lame d'eau, h l'épaisseur ao de la lame; on pourra écrire d'après cette relation :

$$V_0 R_0 = V_1 (R_0 - \epsilon + z) = V_1 (R_0 + h'). \quad (\beta)$$

On applique l'équation de Bernoulli aux mêmes filets et da , depuis la surface libre jusqu'à la section contractée. En supposant nulles les vitesses à l'amont, on obtient, en observant que ces deux filets supportent la pression p_0 atmosphère :

$$h + \frac{p_0}{\pi} = \epsilon + \frac{p_0}{\pi} + \frac{V_0^2}{2g},$$

$$h + \frac{p_0}{\pi} = \epsilon + h' + \frac{p_0}{\pi} + \frac{V_1^2}{2g}.$$

On déduit de ces équations :

$$V_0 = \sqrt{2g(h - \epsilon)}, \quad V_1 = \sqrt{2g(h - \epsilon - h')}; \quad (\gamma)$$

ce qui donne pour la vitesse d'un filet quelconque m :

$$V = \frac{V_0 R_0}{R} = \sqrt{2g(h - \epsilon)} \frac{R_0}{R_0 - \epsilon + z}.$$

Désignons par λ , le rapport des vitesses V_1 et V_0 ; on aura d'après les relations (β) et (γ) :

$$\lambda = \frac{V_1}{V_0} = \frac{R_0}{R_0 + h'} = \sqrt{\frac{h - \varepsilon - h'}{h - \varepsilon}},$$

d'où l'on tire :

$$R_0 = \frac{\lambda h'}{1 - \lambda}, \quad 1 - \lambda^2 = \frac{h'}{h - \varepsilon}, \quad R_0 = \lambda(1 + \lambda)(h - \varepsilon).$$

Il est maintenant facile d'exprimer le débit Q du déversoir dont la longueur est l ; on a :

$$Q = l \int_0^{h'+\varepsilon} V dz = R_0 \sqrt{2g(h - \varepsilon)} \int_0^{h'+\varepsilon} \frac{dz}{R_0 + z - \varepsilon}$$

et en effectuant l'intégration :

$$Q = l R_0 \sqrt{2g(h - \varepsilon)} \log \left(1 + \frac{h}{R_0} \right),$$

ce que l'on peut écrire en remplaçant R_0 par sa valeur, en fonction de λ :

$$Q = l \sqrt{2g(h - \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} (\lambda + \lambda^2) \log \frac{4}{\lambda}.$$

Actuellement le rapport λ , qui dépend de h' , est inconnu de sorte qu'on ne saurait calculer Q ; mais, pour évaluer ce rapport, on peut appliquer le principe du débit maximum; alors cette quantité doit satisfaire à l'équation dérivée :

$$\frac{dQ}{d\lambda} = l \sqrt{2g(h - \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} \left[(1 + 2\lambda) \log \frac{4}{\lambda} - (1 + \lambda) \right] = 0,$$

qui donne :

$$(1 + 2\lambda) \log \frac{4}{\lambda} - (1 + \lambda) = 0.$$

La racine λ est voisine de 0,469, on en déduit $h' = 0,78(h - \varepsilon)$; puis :

$$Q = 0,522l \sqrt{2g(h - \varepsilon)^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme cette expression peut s'écrire :

$$Q = 0,522l \left(1 - \frac{\epsilon}{h}\right)^{\frac{3}{2}} h \sqrt{2gh},$$

on pose :

$$m = 0,522 \left(1 - \frac{\epsilon}{h}\right)^{\frac{3}{2}},$$

et trouve la formule (1) :

$$Q = m l h \sqrt{2gh}. \quad (1)$$

Après les observations très nombreuses et très précises effectuées par M. Bazin, le relèvement ϵ de la nappe déversée au-dessus du seuil est sensiblement proportionnel à la charge d'eau h , et sa valeur moyenne est $\epsilon = 0,13h$. Si l'on introduit ce chiffre dans la valeur de m , on obtient $m = 0,423$. Comme cette valeur est voisine de celle qui résulte des expériences pratiques de M. Bazin, de Lesbros, de Lécuyer, d'Aubuisson, on voit que l'accord est satisfaisant entre la théorie précédente et les faits observés.

4. Influence de la vitesse à l'amont. — La théorie précédente suppose que l'air a librement accès sous la nappe déversante pour que les filets d'eau inférieurs supportent la pression de l'atmosphère ; elle suppose également que la vitesse d'arrivée de l'eau sur le déversoir est nulle. Lorsque la vitesse a une valeur appréciable, ce qui est le cas ordinaire de la pratique, il faut en tenir compte en majorant la charge h d'une certaine hauteur h' fonction de la vitesse exigée.

Pour cet effet, on a observé qu'en appelant U la vitesse moyenne de l'eau à l'amont et au voisinage du déversoir, α le coefficient dont la valeur est très voisine de 1,56, on peut poser :

$$h' = \alpha \frac{U^2}{2g},$$

de sorte que la formule (1) devient dans ce cas :

$$Q = \mu l \left(h + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) \sqrt{2g \left(h + \alpha \frac{U^2}{2g} \right)},$$

en désignant par μ le coefficient de débit, qui varie très légèrement avec la charge d'eau h . Mais on peut encore écrire :

$$Q = \mu l h \sqrt{2gh} \left(1 + \alpha \frac{U^2}{2gh} \right)^{\frac{3}{2}},$$

ou bien, en développant le binôme du second membre et en retenant que les deux premiers termes à cause de la petitesse de $\frac{\alpha U^2}{2gh}$:

$$Q = \mu l h \sqrt{2gh} \left(1 + \frac{3}{2} \alpha \frac{U^2}{2gh} \right).$$

Cette formule prend la forme générale (1) quand on pose

$$m = \mu \left(1 + \frac{3}{2} \alpha \frac{U^2}{2gh} \right).$$

La vitesse moyenne U est celle dont le produit par l'aire de la section du canal près du déversoir donne le débit effectif Q . Si l'on appelle p la hauteur du barrage dont la longueur est l , on aura :

$$Q = l(p + h)U,$$

d'où l'on tire :

$$U = \frac{Q}{l(p + h)},$$

puis, en tenant compte de (1),

$$\frac{U^2}{2gh} = \frac{Q^2}{2ghl^2(p + h)^2} = \frac{m^2 l^2 h^2 \times 2gh}{2ghl^2(p + h)^2} = m^2 \left(\frac{h}{p + h} \right)^2,$$

enfin, en appelant k un nouveau coefficient égal à $\frac{3}{2} \alpha m^2$,

$$m = \mu \left[1 + k \left(\frac{h}{p + h} \right)^2 \right].$$

On voit que m dépend de h , p , μ , et du coefficient k , lequel est voisin de 0,55 d'après M. Bazin.

En résumé, on pourra calculer le débit d'un déversoir en mince paroi en appliquant la formule :

$$Q = m h \sqrt{2gh}, \quad (1)$$

à condition de déterminer dans chaque cas le coefficient m par la relation :

$$m = \mu \left[1 + 0,55 \frac{h^2}{(p + h)^2} \right], \quad (2)$$

avec

$$\mu = 0,405 + \frac{0,003}{h}.$$

Pour les valeurs de h comprises entre 0,10 et 0,30, on pourra se contenter de la relation :

$$m = 0,425 + 0,24 \frac{h^2}{(p + h)^2}.$$

Mais ces formules supposent que l'air a librement accès sous la nappe déversante; c'est une condition qu'il faut réaliser autant que possible lorsqu'on établit un déversoir, afin de pouvoir appliquer sûrement les coefficients de M. Bazin. Lorsque cette condition n'est pas remplie, la loi de l'écoulement devient plus compliquée, variable suivant les circonstances, et la valeur du coefficient m peut s'écarter notablement de celle qui résulte de la formule ci-dessus.

Le tableau ci-dessous traduit la formule (2); lorsque la profondeur p dépasse 2,00, on applique uniformément les nombres de la dernière colonne.

h	VALEURS DE m POUR LES PROFONDEURS SUIVANTES DU FOND DU CANAL AU-DESSOUS DU SEUIL									
	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,80	1,00	1,50	2,00	5
0,05...	0,458	0,453	0,451	0,450	0,449	0,449	0,449	0,448	0,448	0
0,06...	0,456	0,450	0,447	0,445	0,445	0,444	0,444	0,443	0,443	0
0,08...	0,456	0,447	0,443	0,441	0,440	0,438	0,438	0,437	0,437	0
0,10...	0,459	0,447	0,443	0,439	0,437	0,435	0,434	0,433	0,433	0
0,12...	0,462	0,448	0,442	0,438	0,436	0,433	0,432	0,430	0,430	0
0,14...	0,466	0,450	0,444	0,438	0,435	0,432	0,430	0,428	0,428	0
0,16...	0,471	0,453	0,444	0,438	0,435	0,431	0,429	0,427	0,426	0
0,18...	0,475	0,460	0,445	0,439	0,435	0,431	0,428	0,426	0,425	0
0,20...	0,480	0,459	0,447	0,440	0,436	0,431	0,428	0,425	0,423	0
0,22...	0,484	0,462	0,449	0,442	0,437	0,431	0,428	0,424	0,423	0
0,24...	0,488	0,465	0,452	0,444	0,438	0,432	0,428	0,424	0,422	0
0,26...	0,492	0,468	0,455	0,446	0,440	0,432	0,429	0,424	0,422	0
0,28...	0,491	0,472	0,457	0,448	0,441	0,433	0,429	0,424	0,422	0
0,30...	0,500	0,475	0,460	0,450	0,443	0,434	0,430	0,424	0,421	0
0,35...	»	0,482	0,465	0,455	0,447	0,437	0,431	0,424	0,421	0
0,40...	»	0,489	0,472	0,459	0,451	0,440	0,433	0,424	0,421	0
0,45...	»	0,495	0,477	0,464	0,455	0,442	0,435	0,425	0,421	0
0,50...	»	»	0,482	0,468	0,459	0,445	0,437	0,426	0,421	0

PROBLEME. — Calculer le débit d'un déversoir en mince paroi de 2 mètres de long, avec 0^m,20 de charge, le fond du canal étant à 1 mètre au-dessous du seuil.

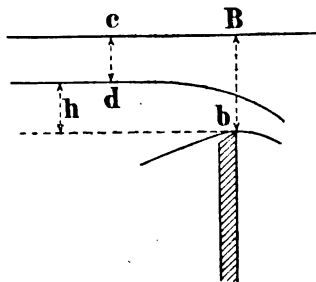


FIG. 344.

Le tableau accuse pour $h = 0^m,20$ et une profondeur de 1 mètre au-dessous du seuil :

$$Q = 0,428 \times 2,00 \times 0,20 \times \sqrt{19,62 \times 0,20}$$

effectuant les calculs :

$$Q = 339 \text{ litres par seconde}$$

Mesure de la tranche. — On mesure la hauteur h du plan d'eau d'amont au-dessous d'un repère fixe.

exemple l'arête BC de la berge du canal. On mesure une fois la hauteur Bb' au droit du barrage, et la tranche h pour toutes les hauteurs Bb' au droit du barrage, et la tranche h donnée par la différence $Bb' - Cd$.

5. **Formes diverses des nappes déversantes.** — Dans un déversoir en mince paroi, la nappe d'eau tombe affectée, suivant les circonstances, plusieurs formes très distinctes, qui constituent en quelque sorte une série de cas spéciaux, et auxquelles correspondent des coefficients de débit sensiblement différents. Ces formes diverses des nappes déversantes ont été mises en évidence par les expériences de M. Bazin.

Nappes libres. — Le cas le plus simple est celui d'un déversoir en mince paroi, tel que nous l'avons précédemment vu (fig. 341), dans lequel la nappe tombe librement dans un réservoir, sa face inférieure restant toujours soumise à la pression de l'atmosphère, et la contraction latérale étant complètement supprimée. C'est ce déversoir-type que l'on doit réaliser, autant que possible, toutes les fois que l'on utilise ce genre de jaugeage.

Nappes déprimées. — Lorsque les parois du canal de fuite, en aval du déversoir, ne sont pas disposées de manière à permettre le libre accès de l'air sous la nappe, le phénomène de l'écoulement se modifie, et la forme de la nappe se modifie, entraînant le débit.

Si la charge ne dépasse pas une certaine limite, la nappe reste détachée du barrage, emprisonnant sous elle un certain volume d'air dont la pression est inférieure à celle de l'atmosphère. L'eau d'aval s'élève sous la nappe au-dessus de son niveau dans le canal de fuite; en même temps, l'excès de pression sur la face externe de la nappe la rapproche du barrage. Ces deux effets croissant avec la charge, la nappe se déprime en s'écartant peu à peu de la forme plus allongée qu'elle affecte, lorsque sa face inférieure est librement soumise à la pression de l'atmosphère.

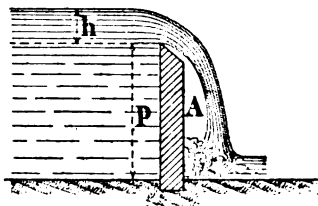


FIG. 345.

Ce changement de forme est accompagné d'un accroissement graduel du coefficient de débit, qui varie suivant charge depuis m jusqu'à $1,10 m$, en désignant par m le coefficient de la nappe libre.

Les nappes déprimées ne sont pas très stables; des rentrées d'air accidentelles se produisent de temps à autre et font varier à la fois la pression intérieure et le débit.

Nappes noyées en dessous. — Dès que l'air emprisonné est complètement disparu, entraîné par le liquide, la nappe

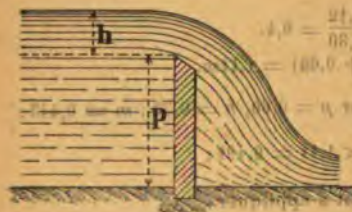


Fig. 346.

fait place ordinairement à une forme plus allongée : c'est la *nappe noyée en dessous*. La partie vive de la veine, où s'opère le débordement, recouvre une petite masse d'eau animée de mouvements tourbillonnaires non translatatoires. Dans ce cas, qui ne produit qu'autant que le rapport $\frac{p}{h}$ reste compris entre 0, et 2,5, le coefficient de débit m' oscille entre m et $1,20m$ suivant la valeur du rapport $\frac{p}{h}$; m représente le coefficient de la nappe libre sous la charge h .

Deux cas sont à considérer :

Lorsque la nappe n'est pas influencée par le niveau d'aval (fig. 346), M. Bazin estime que l'on peut calculer m' par la formule :

$$m' = 0,470 + 0,0075 \frac{p^2}{h^2}$$

Mais, lorsque le pied de la nappe se trouve en part



Fig. 347.

ouvert par l'eau du canal de fuite (fig. 347), il faut poser :

$$m' = m \left(1,05 + 0,15 \frac{h_1}{h} \right).$$

Par exemple, pour un déversoir de 2 mètres de long, libre vers l'amont, avec 0^m,30 de charge et 0^m,60 de profondeur au barrage, on a :

$$\frac{p}{h} = \frac{0,60}{0,30} = 2, \quad m' = 0,500,$$

$$Q = 0,500 \times 2,00 \times 0,30 \times \sqrt{19,62 \times 0,30} = 726 \text{ litres}$$

si la nappe était influencée par le niveau d'aval et que l'on ait 0,12, alors :

$$\frac{h_1}{h} = \frac{0,12}{0,30} = 0,4,$$

$$m' = m (1,05 + 0,06) = 1,11m.$$

Le tableau de Bazin indique pour $p = 0,60$, $h = 0,30$: $m = 0,443$; on a :

$$m' = 0,443 \times 1,11 = 0,491 ;$$

on prendrait la valeur du coefficient à appliquer.

Nappes adhérentes. — Les nappes prennent quelquefois, très rarement, une forme particulière dont la production dépend de l'épaisseur du barrage et du profil de sa partie supérieure. Le pied de la nappe se retire vers le barrage au point de passer en arrière du plan vertical correspondant à sa partie supérieure ; en même temps le coefficient de débit s'élève brusquement jusqu'à atteindre la valeur théorique.

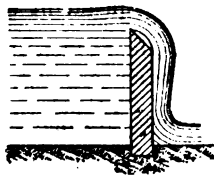


FIG. 348.

Une nappe adhérente est l'état limite de la nappe déprimée que l'air confiné en A a été complètement expulsé ; elle n'apparaît que sous certaines conditions, et son étude n'offre aucun intérêt au point de vue pratique.

Contraction latérale. — Les coefficients de M. Bazin s'appliquent au cas où la contraction latérale de la lame d'eau est nulle, ce qui se produit lorsque la longueur l

du déversoir est exactement égale à la largeur L du bief d'amont.

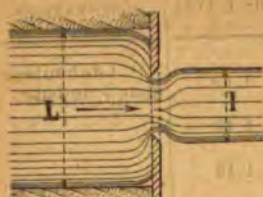


FIG. 349.

Mais il arrive quelquefois que l n'est qu'une fraction de L ; dans ce cas, la formule du débit demande une correction.

Il résulte des expériences de M. Francis que, dès que la longueur l dépasse trois ou quatre fois la charge h , on tient suffisamment compte de l'effet de

contraction en appliquant la formule :

$$Q = m \left(l - \frac{h}{5} \right) h \sqrt{2gh};$$

m se lit dans la table de Bazin.

67. Déversoir incliné. — Dans les vannages d'usine, on rencontre quelquefois des déversoirs inclinés; ces déversoirs ont été expérimentés par M. Bazin. Le débit est accru lorsque l'inclinaison est dirigée vers l'aval, comme le montre la figure; on le réduit en inclinant le barrage vers l'amont.

La table ci-après indique par quels facteurs il convient de multiplier les coefficients m des déversoirs verticaux pour obtenir le débit effectif.

Par exemple, dans le premier problème, si l'on suppose que le barrage est incliné de 4° vers l'aval, on obtient pour le débit :

$$Q = 339 \times 1,10 = 373 \text{ litres.}$$



FIG. 350.

INCLINAISON	VERS L'AMONT	VERS L'AVAL	OBSERVATIONS
$\frac{1}{4}$ ⁽¹⁾	»	1,09	⁽¹⁾ 1 de hauteur pour 4 de base.
$\frac{1}{2}$	0,93	1,12	
$\frac{1}{1}$	0,93	1,10	
$\frac{3}{2}$	0,94	1,07	
$\frac{3}{1}$	0,96	1,04	
déversoir vertical	1,00	1,00	

68. Déversoir noyé. — Nous donnerons la formule des déversoirs noyés dans lesquels le niveau d'aval est plus haut que le seuil, bien que ces déversoirs ne se rencontrent que rarement dans la pratique.

Cette formule a été indiquée par Dubuat; elle est tout à fait empirique. D'après ce dernier, on aurait :

$$Q = 0,41 l \left(h + \frac{h'}{2} \right) \times \sqrt{2g(h - h')}.$$

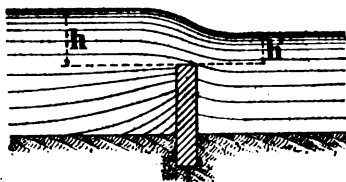


FIG. 351.

Par exemple, pour l

$= 3,00$, $h = 0,50$, $h' = 0,30$, il vient : $Q = 1.580$ litres.

69. Déversoir à crête épaisse. — Dans ce cas, la lame déversante coule sur le seuil, et l'on peut admettre que, sur une petite longueur, les filets liquides sont tous horizontaux et parallèles; alors les pressions dans la masse suivent la loi hydrostatique.

Appliquons l'équation de Bernoulli au mouvement d'une molécule depuis son départ en amont, où sa vitesse est supposée nulle, jusqu'à son passage sur le déversoir; on trouve comme au numéro 47 :

$$V = \sqrt{2g(h - h')}.$$

Si on suppose que tous les filets liquides qui passent sur la crête ont même vitesse V , et si on désigne par l la longueur du déversoir, l'aire de la tranche liquide sera lh , et le débit :

$$Q = lh' \sqrt{2g(h - h')}.$$

Actuellement, l'épaisseur h' est inconnue, de sorte qu'on ne saurait calculer Q ; mais,

pour évaluer h' , on peut appliquer le principe du débit maximum (62); alors cette quantité doit satisfaire à l'équation dérivée :

$$\frac{dQ}{dh'} = l \sqrt{2g} \left(\sqrt{h - h'} - \frac{h'}{2\sqrt{h - h'}} \right) = 0,$$

qui donne :

$$2h - 3h' = 0 \quad \text{et} \quad h' = \frac{2}{3}h.$$

La formule du débit devient donc, en remplaçant h' par sa valeur :

$$Q = \frac{2}{3}lh \sqrt{2g \frac{h}{3}} = 0,385lh \sqrt{2gh}.$$

D'après les expériences de Lesbros, il convient de substituer au coefficient théorique 0,385 le coefficient pratique 0,350; cette différence provient du caractère approximatif de l'équation de Bernoulli à l'égard des liquides naturels. La formule de Lesbros est donc :

$$Q = 0,35lh \sqrt{2gh}.$$

M. Bazin a également fait plusieurs expériences sur des barrages constitués par des pièces de bois équarries, à parements verticaux, dans le cas des nappes libres.

Si c représente l'épaisseur des poutrelles, la nappe s'appuie sur le seuil horizontal lorsque $h < \frac{3c}{2}$ (fig. 353); elle s'en

étache spontanément à partir de l'arête d'amont dès que $h > 2c$ (fig. 354).

Dans le premier cas, jusqu'à $h = 2c$, le coefficient de débit m peut se calculer par la formule :

$$m' = m \left(0,70 + 0,185 \frac{h}{c} \right);$$

on lit dans la table de Bazin (64).

Cette formule est encore valable, à 2

ou 3 0/0 près, pour des seuils très larges.

Dans le second cas, l'influence du seuil disparaît et tout se passe comme si le déversoir était en mince paroi.

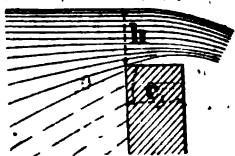


FIG. 354.

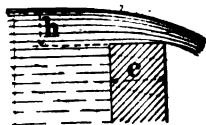


FIG. 355.

PROBLÈME. — Calculer le débit d'un déversoir à large crête de 1^m,50 de long, de 0^m,25 d'épaisseur, dont le seuil est à 0^m,20 au-dessous du niveau de l'eau pris à une certaine distance à l'amont; la profondeur au barrage égale 1^m,50.

On a :

$$L = 1,50, \quad c = 0,25; \quad A = 0,20, \quad p = 1,50, \quad m = 0,425,$$

ce qui donne avec la formule de M. Bazin :

$$\frac{h}{c} = \frac{0,20}{0,25} = 0,80, \quad m' = 0,425 (0,70 + 0,148) = 0,360;$$

par suite :

$$Q = 0,360 \times 1,50 \times 0,20 \times 1,98 = 214 \text{ litres.}$$

La formule de Lesbros accuse :

$$Q = 0,35 \times 1,50 \times 0,20 \times 1,98 = 208 \text{ litres.}$$

70. Déversoir en triangle. — On rencontre quelquefois des déversoirs en mince paroi dont le seuil n'est pas horizontal; la section d'écoulement présente la forme d'un triangle isocèle ou d'un trapèze.

Soit le déversoir triangulaire (fig. 355); pour calculer son débit, considérons la tranche d'eau de longueur x , de hauteur dz , située à la profondeur z au-dessous de la

surface libre. Le débit dQ de cette tranche a pour expression :

$$dQ = mx\sqrt{2gz}dz;$$

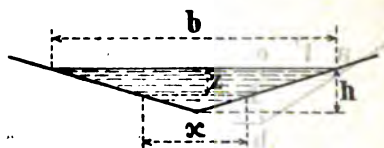


Fig. 355.

mais la figure donne la relation :

$$\frac{x}{h-z} = \frac{b}{h},$$

d'où l'on déduit :

$$x = \frac{b}{h}(h-z),$$

par suite :

$$dQ = \frac{mb}{h}(h-z)\sqrt{2gz}dz,$$

et

$$Q = \frac{mb}{h} \int_0^h (h-z)\sqrt{2gz}dz.$$

L'intégration s'effectue en observant que :

$$\int (h-z)\sqrt{2gz}dz = h\sqrt{2g} \int z^{\frac{1}{2}}dz - \sqrt{2g} \int z^{\frac{3}{2}}dz,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^h (h-z)\sqrt{2gz}dz = \frac{2}{3}\sqrt{2g}h^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}\sqrt{2g}h^{\frac{5}{2}}.$$

On peut donc écrire :

$$Q = \frac{4}{15}mbh\sqrt{2gh}. \quad (7)$$

La valeur de m oscille entre 0,58 et 0,62 suivant le rapport $\frac{b}{h}$; pour $b = 2h$, $m = 0,59$; lorsque $b = 4h$, $m = 0,62$.

Pour un déversoir en *trapèze*, appelons Q' le débit du rec-

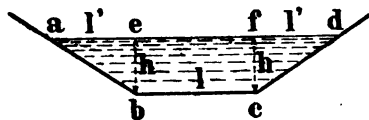


FIG. 356.

tangle $ebcf$, Q' celui des deux sections égales aeb et dfe .
On a :

$$Q' = m l h \sqrt{2gh},$$

et d'après (7) :

$$Q' = \frac{8}{15} m' l' h \sqrt{2gh}.$$

Le débit total Q du déversoir égale :

$$Q = Q' + Q''.$$

71. Temps nécessaire à la vidange d'un bassin par un déversoir. — Nous supposons que le bassin, dont la surface S est constante, présente sur l'une de ses faces une échancrure horizontale de longueur l qui forme déversoir et par où l'eau s'échappe.

Cherchons d'abord le temps que met la tranche d'eau h à diminuer d'une hauteur ϵ .

Si l'on appelle z l'épaisseur de la tranche d'eau au temps t , pendant l'intervalle de temps dt qui suit l'époque t il s'écoule un volume d'eau :

$$m l z \sqrt{2gz} dt;$$

d'autre part, comme le plan d'eau s'est abaissé d'une hau-

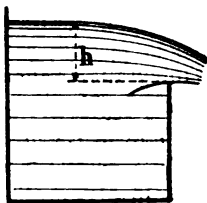


FIG. 357.

teur $-dz$, le même volume a pour expression $-Sdz$. On a donc l'égalité :

$Sdz = mlz\sqrt{2g}dt$,
et en séparant les variables :

$$dt = \frac{S}{ml\sqrt{2g}} \frac{dz}{z^2}$$

L'intégration est immédiate; il vient :

$$t = \frac{2S}{ml\sqrt{2g}} \frac{1}{\sqrt{z}} + C.$$

Pour $t = 0$, on a $z = h$; par suite, en appelant T le temps cherché :

$$T = \frac{2S}{ml\sqrt{2g}} \left[\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{h}} \right], \quad (a')$$

ou bien, puisque $z = h - \epsilon$:

$$T = \frac{2S}{ml\sqrt{2g}} \left[\frac{1}{\sqrt{h - \epsilon}} - \frac{1}{\sqrt{h}} \right].$$

Si l'on fait $\epsilon = h$, on trouve $T = \infty$; d'où l'on peut conclure qu'il faudrait un temps extrêmement long pour amener le plan d'eau du bassin au niveau du déversoir. Cependant, comme le calcul précédent ne tient pas compte de la vitesse des molécules d'eau à l'intérieur du bassin, vitesse qui n'est pas rigoureusement nulle, la durée théorique de vidange serait un peu inférieure à T .

D'ailleurs, pratiquement, cette durée est finie et notablement inférieure au temps calculé, car le ralentissement de la descente du plan d'eau s'accroît surtout lorsque la charge devient très faible. On peut se rendre compte, par exemple, en faisant successivement $z = 0,25h$ et $z = 0,00$ dans la formule (a'), que le temps nécessaire pour réduire la charge d'eau z au millième de sa valeur initiale h n'est qu'à peine trente fois plus long que celui qu'il faudrait pour vider les trois quarts du bassin. De même, la surface libre du bass

extrait seulement neuf fois plus de temps pour descendre de la hauteur $0,25h$ à $0,01h$ que de h à $0,25h$. Au degré d'approximation que comportent les questions pratiques, on voit que la durée de la vidange est parfaitement limitée.

Lorsque l'aire S est variable et fonction de z , on conduit le calcul comme au numéro 52.

L'intégration de l'écoulement serait plus compliquée si le bassin, tout en se vidant, recevait par des affluents un volume d'eau constant de Q mètres cubes à la seconde. On aurait alors l'égalité :

$$mlz \sqrt{2gz} dt = Qdt - Sdz,$$

et l'on peut écrire :

$$(Q - mlz \sqrt{2gz}) dt = Sdz,$$

d'où l'on déduit comme plus haut :

$$T = \int_z^h \frac{Sdz}{mlz \sqrt{2gz} - Q}.$$

L'intégration s'effectue en posant : $ml\sqrt{2gz} = Qu^2$, et en décomposant en fractions rationnelles ; on obtient pour l'intégrale indéfinie :

$$t = \frac{S}{6Q} \left[\log \frac{1+u+u^2}{(1-u)^2} - 2\sqrt{3} \arctg \frac{2u+1}{\sqrt{3}} \right] + C.$$

Il ne reste plus qu'à introduire les conditions initiales et revenir à la variable z ; mais la formule obtenue est trop compliquée pour être utilisée dans la pratique.

Dans le cas général où S est fonction de z , et Q fonction de z ou de t , le problème théorique présente d'assez grandes difficultés, et la formule définitive est encore plus compliquée, car on est ramené à intégrer une équation du premier ordre.

Les considérations qui précèdent trouvent leur application dans le calcul de la longueur à donner aux déversoirs de

superficie, qui accompagnent les grands barrages en maçonnerie que l'on construit dans certaines vallées étroites pour rassembler les eaux superficielles des régions plus élevées. Ces déversoirs servent alors de régulateurs pour maintenir le niveau de l'eau entre des limites déterminées. Dans ce cas, le débit Q est une fonction du temps, l'aire S est une fonction de z ; de sorte que l'on pourrait rigoureusement déduire la longueur du déversoir des formules ci-dessus. Mais, à cause de la complication de ces formules, on se contente ordinairement de déterminer l de façon que, le débit ayant sa valeur maximum Q' , et la charge d'eau ne dépassant pas une certaine valeur z' fixée à l'avance, le déversoir soit capable d'évacuer le débit Q' sous la charge z' . On a alors l'équation :

$$Q' = mlz' \sqrt{2gz'},$$

qui permet de calculer l . On obtient ainsi la longueur maximum à donner au seuil du déversoir.

72. Jaugeage des sources et des ruisseaux. — Le jaugeage d'une petite source s'effectue au moyen d'un vase dans lequel on connaît exactement la capacité. On s'arrange pour que tout le produit de la source pénètre dans le vase, puis on observe avec une montre à secondes le temps que met le vase à se remplir. Il est facile, d'après la durée du remplissage et la contenance du vase, de connaître le débit par seconde. On doit répéter cette opération un certain nombre de fois et prendre la moyenne des résultats.

Pour les sources abondantes, on peut quelquefois appliquer le même procédé de jaugeage direct en utilisant une cuve en bois ou en tôle de plusieurs mètres cubes de capacité. Dans ce cas, lorsqu'on veut procéder à des observations continues pendant plusieurs mois, l'emploi du compteur d'eau est naturellement indiqué. On prolonge la cuve par un bout de plomb de 0,027 ou de 0,040 sur lequel on installe le compteur; les indications de ce dernier sont relevées toutes les semaines.

Mais il arrive fréquemment que la source forme un ruissseau d'une certaine largeur, et que l'emploi d'une cuve

est impraticable. Il faut alors chercher un emplacement convenable pour y établir un barrage transversal formant déversoir. On choisit un endroit peu profond du ruisseau, où le courant est bien marqué et autant que possible rectiligne; on le barre complètement à l'aide d'une planche, au moyen d'un petit mur en maçonnerie surmonté d'une feuille de tôle A; le mur doit être enraciné dans le lit du ruisseau pour que l'eau ne filtre pas au-dessous, il faut veiller à ce que la totalité du débit passe sur le seuil du déversoir.

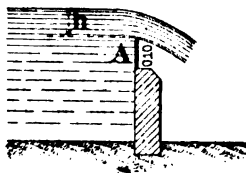


FIG. 358.

Lorsque le régime permanent est établi, on mesure l'épaisseur h de la lame d'eau au-dessus du seuil, ainsi que la longueur l du déversoir, et le débit par seconde correspond à la formule :

$$Q = m l h \sqrt{2gh};$$

la valeur de m se lit dans la table de M. Bazin (64).

Un déversoir très pratique pour les petits cours d'eau est constitué par une planche en sapin de 0^m,30 de largeur et

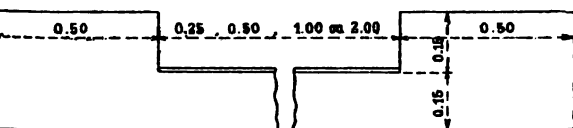


FIG. 359.

de 0^m,022 d'épaisseur, dans laquelle on découpe une échancrement rectangle de 0^m,50 de long et de 0^m,13 à 0^m,18 de large. Pour obtenir l'écoulement en mince paroi, il est nécessaire de chanfreiner à 45° l'arête horizontale.

Suivant l'importance du débit, on pourra donner à l'échancrement des longueurs de 0,25, 0,50, 1,00 et même 2 mètres.

Pour que la formule ci-dessus s'applique avec une approximation acceptable, il faut que la charge h , c'est-à-dire

l'épaisseur de la lame déversante, ne soit pas inférieure à 0,05 ; la longueur du déversoir doit être choisie en conséquence. De même, pour que le débit ne soit pas influencé

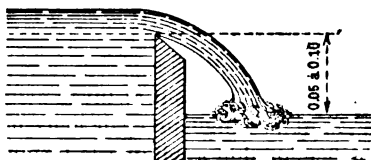


FIG. 360.

par le niveau d'aval, que le déversement fasse à l'air libre, il est nécessaire que le déversoir soit arasé horizontalement au moins à 0,10 m au-dessus du niveau d'aval.

En amont du déversoir et aux extrémités de sa crête, on place deux planches parallèles au fil de l'eau sur une longueur de 1 mètre environ, afin de supprimer la contraction latérale. Ces planches

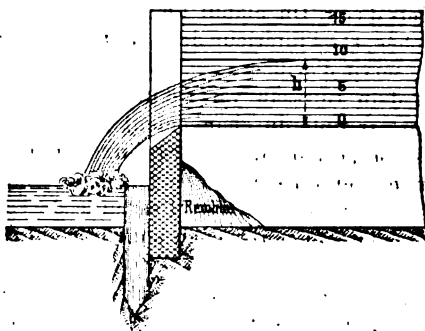


FIG. 361.

préalablement divisées en centimètres par des traits de crayon noir, comme l'indique la figure, servent en même temps à la mesure de h : il suffit pour cela de placer le niveau de la crête sur l'horizontale 0 et de lire la division de la planche affleurée par la surface de l'eau.

On ne doit jamais mettre l'appareil dans un remous, ni pratiquer les jaugeages lorsque les moulins retiennent l'eau et marchent par éclusees.

Dans d'autres cas, il est plus commode de faire passer l'eau au travers d'un orifice de section connue ouvert en face paroi.

On mesure la charge h sur le centre de l'orifice, et, si on désigne son aire, l'expression du débit est :

$$Q = 0,62\omega \sqrt{2gh}.$$

Lorsque l'orifice est accompagné d'un bout de tuyau cylindrique du même calibre, dont la longueur égale deux fois environ le diamètre de l'orifice, on doit appliquer la formule des ajutages :

$$Q = 0,82\omega \sqrt{2gh}.$$

Pour les sources profondes, on opère d'une façon analogue, après avoir creusé une tranchée perpendiculaire à la direction du courant et suffisamment longue pour ramasser tous les filets d'eau. On établit un mur étanche sur le fond de la tranchée, et à l'intérieur de ce mur on noie un bout de tuyau pour servir d'orifice.

Le débit d'un ruisseau varie d'un jour à l'autre sur le même point par suite du changement des conditions atmosphériques ; la période des basses eaux commence ordinairement en mai et dure jusqu'en octobre. Pour se rendre compte des variations du débit, il est utile de construire la courbe des débits du cours d'eau pour le point considéré.

Débit moyen. — On fait relever chaque jour au déversoir l'épaisseur h de la lame d'eau, ce qui fait connaître immédiatement le débit au moyen de la formule. En additionnant les débits journaliers pendant un mois et divisant par le nombre de jours, on obtient la moyenne pour le mois. On peut obtenir de la même façon le débit moyen pour toute une année, pour plusieurs années.

73. Courbe des débits. — Ayant fait choix d'une feuille de papier quadrillé, on porte le temps en abscisses à une échelle quelconque en séparant les différents mois. Sur l'ordonnée de chaque mois on porte ensuite une longueur qui

doit être proportionnelle à la moyenne pour le mois considéré.

En joignant les douze points obtenus par cette construction, on obtient la courbe des débits moyens mensuels. complète le tableau en traçant l'horizontale du débit

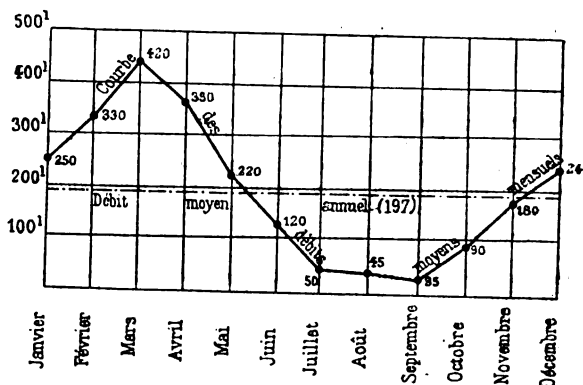


FIG. 362.

annuel, que l'on détermine en cumulant tous les chiffres mensuels et divisant le total par 12.

La connaissance de la courbe des débits pour divers points d'un cours d'eau, notamment à l'amont et à l'aval de chaque affluent, est d'une grande importance pratique pour les industriels qui utilisent la force motrice du cours d'eau ; cette connaissance n'est pas moins nécessaire aux cultivateurs, mécaniciens, et aux administrations publiques qui ont évidemment intérêt à connaître les ressources d'une vallée au point de vue hydraulique.

EXERCICES

1. Calculer le volume d'eau qui s'écoule dans un temps donné par un orifice circulaire en mince paroi, de dimensions finies, ouvert dans la paroi verticale d'un vase où le niveau est maintenu constant.

Désignant par r le rayon du cercle, y l'ordonnée d'un point du cercle, h la charge d'eau sur son centre, on trouve :

$$Q = 2m \sqrt{2gh} \int_{-r}^{+r} \left(1 - \frac{y}{2h}\right) \sqrt{r^2 - y^2} dy,$$

que l'on peut écrire approximativement :

$$Q = m\pi r^2 \sqrt{2gh}.$$

2. Faire voir que, lorsqu'on suppose que la vitesse des molécules fluides qui s'écoulent par un orifice est la même aux divers points d'une section normale, on diminue la somme des forces vives, *invenitur*, bien entendu, qu'on ne change pas le débit effectif de l'orifice pour un temps donné.

C'est un cas particulier du problème 6.

3. Déterminer une surface de révolution à axe vertical telle que, après l'avoir remplie de liquide, on laisse celui-ci s'écouler par un petit orifice en mince paroi, le niveau supérieur baisse d'un mouvement uniforme.

Voir n° 92 du Cours.

4. On connaît la hauteur et la grande base d'un tronc de cône immergé dans un liquide qui coule dans la direction de l'axe. Déterminer la petite base de manière que la résultante des pressions éprouvées par cette base et par la surface convexe du tronc soit minimum.

5. Déterminer une surface de révolution telle que la résultante des pressions exercées entre deux parallèles données par un liquide se meuvent dans le sens de l'axe soit minimum.

6. Calculer la quantité de mouvement et la force vive d'un courant liquide en fonction de la vitesse moyenne. Comparer ces quantités à ce qu'elles seraient si tous les filets avaient, au lieu de leurs vitesses individuelles, une même vitesse moyenne.

La quantité de mouvement et la force vive qui correspondent à l'unité de temps ont pour expressions (168, Remarque) :

$$M = \rho \int v^2 d\omega, \quad I = \frac{1}{2} \rho \int v^3 d\omega.$$

7. Deux robinets de puisage de 0,026 et de 0,027 fournissent le même débit ; le premier supporte 2 mètres de pression. A quelle charge h fonctionne le second ?

On assimile ces robinets à des ajutages cylindriques : $h = 0^m,60$.

8. Deux déversoirs en mince paroi verticale fournissent le même débit. Quelle relation existe-t-il entre leurs longueurs l et l' et les charges d'eau h et h' ?

On suppose que les deux déversoirs ont même coefficient de débit m .

9. Étudier la forme et le mouvement d'une bulle d'air qui s'élève à travers un liquide pesant.

CHAPITRE IV

TUYAUX DE CONDUITE

74. Lorsqu'une masse d'eau s'écoule à l'intérieur d'un tuyau de conduite, le frottement de ses molécules contre la paroi du tuyau développe une résistance considérable dont il est nécessaire de tenir compte dans les calculs.

Les divers filets liquides parallèles à l'axe du tuyau ne sont pas animés de vitesses égales ; ceux qui touchent la paroi se trouvent retardés par sa résistance, qui tend à les ralentir ; ces derniers, à leur tour, retardent ceux qui les suivent, et ainsi de suite jusqu'au filet central, qui est animé de la plus grande vitesse.

Dans la pratique, on ne tient pas compte de cette différence de vitesse ; dès que le régime permanent est établi, on admet que les divers filets qui, à un instant donné, traversent la même section normale, sont animés d'une même *vitesse moyenne*.

La résistance qu'oppose la paroi à l'écoulement de l'eau se traduit par une certaine perte de charge, ou diminution de pression disponible, et les mémorables expériences de Darcy ont montré que *cette résistance était proportionnelle à l'étendue de la surface mouillée et à une certaine fonction de la vitesse moyenne, qu'elle dépendait de la nature de la paroi, mais qu'elle était indépendante de la pression du liquide.*

Soient $\omega, \omega', \omega'', \dots$, les aires des sections normales du tuyau aux points différents ; U, U', U'', \dots , les vitesses moyennes correspondantes ; on a, lorsque l'écoulement est devenu permanent, ce que nous supposerons toujours dans la suite :

$$\omega U = \omega' U' = \omega'' U'' = \dots = Q ; \quad (1)$$

représente le débit du tuyau, ou le volume d'eau qui

pas dans l'unité de temps au droit d'une section normale.

DIAMÈTRE CONSTANT

75. Équation de l'écoulement. — Lorsque le diamètre du tuyau reste constant, il en est de même de la vitesse moyenne et le mouvement du liquide est alors permanent et uniforme. Les équations (1) donnent, en effet, en y faisant $\omega = \omega' = \omega'' \dots$

$$U = U' = U'' = \dots$$

Considérons la tranche d'eau comprise entre deux sections transversales A et B; soient a et b les niveaux piézométriques en A et B. Écrivons que le mouvement de la tranche

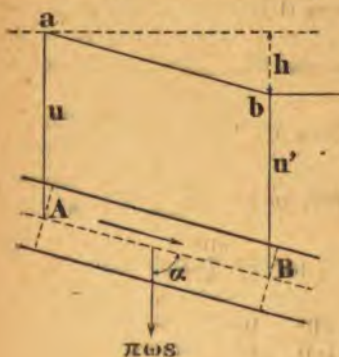


FIG. 363.

est uniforme, c'est-à-dire que les forces qui la sollicitent se font équilibre.

Désignons par :

s , la distance rectiligne

des sections considérées

α , l'angle formé par l'axe du tuyau avec la verticale

ω , l'aire de la section

transversale;

χ , le périmètre de cette

section;

u , la hauteur piézométrique Aa;

u' , la hauteur Bb;

h , la dénivellation piézométrique entre les points A et B

f , la composante tangentielle du frottement par unité d'aire de la paroi;

π , le poids du mètre cube d'eau.

La tranche est soumise à quatre forces :

1) La pression normale $\pi\omega u$ sur la section A;

2) La pression opposée $\pi\omega u'$ sur la section B;

3) Le poids $\pi\omega s$ du liquide;

4) La résistance dirigée dans le sens BA est égale à $f\chi s$.

puisque cette force est proportionnelle à la surface mouillée.

En projetant toutes les forces sur l'axe du tuyau, on obtient l'équation d'équilibre :

$$\pi \omega u + \pi \omega s \cos \alpha - \pi \omega u' - f \chi s = 0;$$

cette équation peut s'écrire :

$$\omega (u + s \cos \alpha - u') = \frac{f}{\pi} \chi s,$$

c'est-à-dire :

$$\omega h = \frac{f}{\pi} \chi s.$$

Comme la résistance est proportionnelle à une certaine fonction de la vitesse moyenne, on peut évidemment poser :

$$f = \pi \varphi (U);$$

alors :

$$\omega h = \chi s \varphi (U),$$

ou bien :

$$\frac{\omega}{\chi} \frac{h}{s} = \varphi (U).$$

Soit D le diamètre du tuyau, on a :

$$\chi = \pi D, \quad \omega = \frac{\pi D^2}{4};$$

par suite :

$$\frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi D^2}{4 \pi D} = \frac{D}{4}.$$

Enfin, si l'on pose $J = \frac{h}{s}$, il en résulte l'équation fondamentale :

$$\frac{1}{4} DJ = \varphi (U). \quad (2)$$

La dénivellation h représente la perte de charge du courant liquide entre les sections A et B (40); en effet, puisque la vitesse moyenne est la même en un point quelconque du tuyau, la ligne de charge est parallèle à la ligne des niveaux piézométriques; par conséquent, la dénivellation du plan de

charge entre les sections A et B, c'est-à-dire la perte de charge, est égale à la chute du niveau piézométrique h .

J représente la *perte de charge par mètre linéaire de tuyau*.

76. Conduite sortant d'un réservoir. — Supposons que la conduite AB sorte du réservoir R. Sur le point A la hauteur

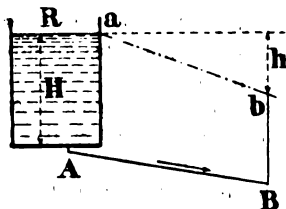


FIG. 361.

piézométrique égale H , et la perte de charge totale entre les points A et B est encore représentée par h .

Cependant la perte de charge par mètre le long de la conduite n'est pas rigoureusement

égale à $\frac{h}{s}$, s désignant la longueur AB.

Une première fraction de h est absorbée pour produire la vitesse d'écoulement du liquide : une seconde se trouve perdue à l'origine A par suite du changement brusque de section et de la présence de la bonde. Ce qui reste constitue réellement la perte de charge due à la résistance développée par les parois du tuyau.

Or la charge capable de la vitesse U égale $\frac{U^2}{2g}$; celle perdue à l'entrée de l'eau dans la conduite peut aussi être évaluée $\frac{U^2}{2g}$; donc la perte de charge par mètre linéaire de tuyau est exprimée par le quotient :

$$J = \frac{h - \frac{U^2}{2g}}{s}. \quad (3)$$

A vrai dire cette correction de J est ordinairement très faible, et bien peu de praticiens y procèdent dès que la longueur AB de la conduite dépasse 15 mètres, ce qui est le cas ordinaire; néanmoins il était utile d'en parler pour certains cas exceptionnels.

77. Détermination de la fonction $\varphi(U)$. — La fonction $\varphi(U)$ qu'il est intéressant de connaître pour le calcul des dia-

mètres, ne semble pas susceptible d'une détermination analytique directe, car les résistances que développe la viscosité du liquide, celles qui résultent de la plus ou moins grande rugosité de la paroi, ne sont encore qu'imparfaitement connues en grandeur et en direction. Quelques analystes distingués : Bresse, Kleitz, M. Maurice Lévy, M. Bousinesq, se sont essayés à cette détermination, mais, exception faite des formules de M. Lévy couramment employées dans la pratique, les résultats obtenus par ces analystes ne sont pas encore susceptibles d'une application étendue.

Parmi les nombreuses formules empiriques proposées, en France et à l'étranger, par divers ingénieurs, peu sont entrées dans la pratique courante.

Les plus anciennes, comme celle de Prony, ne tiennent pas compte de la nature de la paroi, bien qu'il soit logique de considérer que l'état de cette paroi influe sur la résistance qu'elle oppose à l'écoulement de l'eau, c'est-à-dire sur la perte de charge.

Toutes les formules préconisées depuis Darcy envisagent deux cas : celui des tuyaux neufs, lisses à l'intérieur, et le cas plus pratique de tuyaux en service depuis un certain temps et recouverts de dépôts calcaires.

Les mêmes formules s'appliquent pour des tuyaux d'une nature quelconque : bois, poterie, ciment, fonte, tôle et plomb.

78. Formules anciennes. — La plus ancienne fut présentée par Prony en 1804 dans ses recherches physico-mathématiques sur le mouvement des eaux courantes. De la discussion approfondie des 51 expériences effectuées par Couplet, Bossut, Dubuat, sur des tuyaux en fonte et en plomb de diamètre variable, depuis 0^m,027 jusqu'à 0^m,487, cet ingénieur crut pouvoir déduire :

$$\frac{1}{4} DJ = aU + bU^2;$$

a et b désignent des coefficients constants dont les valeurs sont :

$$a = 0,0000173, \quad b = 0,000348.$$

Les tables calculées par Prony à l'aide de ces coefficients ont été très employées et le sont encore aujourd'hui par beaucoup d'ingénieurs, qui les préfèrent à celles de Darcy pour les diamètres compris entre 0,20 et 0,60.

Après de nouvelles expériences exécutées à Toulouse vers 1825, d'Aubuisson proposa pour a et b les valeurs légèrement différentes :

$$a = 0,0000188, \quad b = 0,000343,$$

qui n'ont jamais été utilisées par les praticiens.

La forme binôme de l'expression de Prony la rend très incommode pour les calculs algébriques et logarithmiques; ainsi que pour la traduction en abaque; frappé de cet inconvénient, Barré de Saint-Venant a cherché à représenter la fonction $\varphi(U)$ par une formule monôme; un nouvel examen des expériences de Dubuat l'a conduit à l'expression :

$$\frac{1}{4} DJ = 0,0002955 U^{\frac{18}{7}},$$

dont l'emploi ne s'est pas non plus généralisé, probablement à cause de la complication, plus apparente que réelle cependant, qui semble *a priori* résulter de la présence d'un exposant fractionnaire.

Dupuit a réalisé la formule monôme en supprimant simplement le premier terme de celle de Prony, et en portant à 0,0004 la valeur du coefficient b . Il est certain, en effet, que, pour des vitesses supérieures à 0,20, cas ordinaire de la pratique, la suppression du terme en U , même sans accroissement de b , n'a que fort peu d'inconvénient à cause de la petitesse relative de a par rapport à b . Les relations

$$\frac{1}{4} DJ = 0,0004 U^2, \quad Q = \frac{\pi D^2}{4} U,$$

donnent par élimination de U :

$$\frac{1}{4} DJ = \frac{0,0004 Q^2}{\pi^2 D^3},$$

ce que l'on peut écrire :

$$J = \frac{0,0256 Q^2}{\pi^2} \frac{1}{D^5}$$

ou encore :

$$J = \left(\frac{Q}{20}\right)^2 \frac{1}{D^5};$$

c'est la forme classique de l'équation de Dupuit, qui fut au début favorablement accueillie par les ingénieurs à cause de sa simplicité.

Les formules anciennes sont à peu près abandonnées aujourd'hui ; on leur reproche avec raison de ne pas se préoccuper de l'état de la paroi des tuyaux, dont la plus ou moins grande rugosité influe cependant sur la perte de charge, ainsi que l'ont prouvé les expériences de Darcy. Ces formules donnent d'assez bons résultats pour les diamètres moyens entre 0,15 et 0,80, mais trop faibles au-dessous de 0,15, exagérés au-dessus de 0,80.

79. Formules modernes. — Les 198 expériences de Darcy, exécutées à Paris de 1852 à 1857, ont porté sur des tuyaux neufs et anciens, en verre, en plomb, en fer et en fonte, de plus de 100 mètres de longueur, et de diamètre variable depuis 0,013 jusqu'à 0,50, avec des vitesses moyennes poussées jusqu'à 6 mètres par seconde.

Ces expériences ont nettement fait ressortir l'indépendance de la résistance par rapport à la pression de l'eau, sa proportionnalité à l'aire des surfaces frottantes, ainsi que l'influence de la structure de la paroi.

La comparaison des chiffres obtenus a conduit Darcy à la formule :

$$\frac{1}{4} DJ = \left(\alpha + \frac{\beta}{D}\right) U^3,$$

dans laquelle α et β sont des coefficients numériques et D le diamètre de la conduite ; pour des tuyaux en fonte neuve lisses à l'intérieur, cet ingénieur donne aux coefficients les valeurs : $\alpha = 0,0002535$, $\beta = 0,00000647$, qu'il recommande de doubler pour des tuyaux anciens en service depuis un certain temps et recouverts de dépôts calcaires.

Les tables numériques calculées par Darcy à l'aide de ces coefficients jouissent, jusqu'au diamètre de 0,50, d'une autorité parfaitement justifiée, en raison de leur base expérimentale indiscutable; mais les chiffres relatifs aux diamètres supérieurs ont été obtenus par extrapolation, et leur valeur est plus sujette à caution. En fait, les ingénieurs ont reconnu depuis longtemps, comme l'avait d'ailleurs pressenti Bresse, qu'au delà de 0,50 pour les tuyaux anciens les tables de Darcy exagèrent les résistances et indiquent des diamètres sensiblement trop forts pour des pertes de charge et des débits donnés.

Au lieu de déterminer expérimentalement la fonction $\varphi(U)$, M. Maurice Lévy a essayé d'en préciser la forme par le calcul; partant de l'hypothèse de Navier qui admettait l'existence de couches liquides concentriques animées d'une même vitesse, et développant cette hypothèse en ce qui concerne l'action mutuelle de deux couches infiniment voisines, cet ingénieur est parvenu, pour les tuyaux en fonte neuve, à la formule :

$$U = 36,4 \sqrt{RJ(1 + 3\sqrt{R})},$$

et pour les conduites chargées de dépôts :

$$U = 20,5 \sqrt{RJ(1 + 3\sqrt{R})},$$

R désignant le rayon de la conduite.

Les résultats fournis par ces formules s'accordent assez bien avec ceux de l'observation, aussi bien même que ceux de Darcy, et certainement mieux que ces derniers pour les conduites d'un grand diamètre. Plusieurs expériences, effectuées par M. de Tournadre au canal du Verdon en Provence sur des siphons en tôle et en maçonnerie de 1,73 et de 2,30 de diamètre, ont marqué l'incontestable supériorité de la formule de M. Lévy sur celles de Prony, de Darcy (tuyaux anciens) et de M. Gauckler pour ces diamètres exceptionnels.

On doit à M. Henri Vallot la formule monôme :

$$D = 0,324 \left(\frac{Q}{\sqrt{J}} \right)^{\frac{2}{3}},$$

équivalente à celle de M. Lévy pour les conduites chargées de dépôts.

D'une autre interprétation des résultats de Darcy, M. Gauckler a déduit la formule compliquée :

$$\sqrt{U} + \frac{1}{4} D \sqrt{U} = 5,5 \sqrt[3]{D} \sqrt[4]{J},$$

qui est encore moins exacte que celle de Darcy pour les grands diamètres et dont l'emploi ne s'est pas étendu dans la pratique.

On peut en dire autant de la formule de Hagen :

$$\frac{1}{4} D J = \frac{a}{D} U + b U^2,$$

dans laquelle a et b désignent des coefficients numériques constants.

De l'examen comparatif des résultats fournis par plus de 500 expériences exécutées en France et en Angleterre, M. Flamant a conclu que l'on pouvait poser pour les tuyaux légèrement incrustés :

$$\frac{1}{4} D J = 0,00023 \sqrt[4]{\frac{U^7}{D}}. \quad (a)$$

Cette formule donne de bons diamètres jusqu'à 1,00.

Enfin, après des expériences très précises effectuées sur les siphons en fonte des dérivations de la Ville de Paris, M. Geslain a proposé la formule :

$$U = (0,96 + 0,24n) D^{0,75} - 0,10n J^{0,50} + 0,05n.$$

J représente la perte de charge par kilomètre; n est un indice variable auquel on donne les valeurs :

$$n = \begin{cases} 1 & \text{pour les tuyaux à parois lisses : verre, plomb laminé;} \\ \frac{2}{3} & \text{pour les tuyaux neufs en fonte;} \\ \frac{1}{3} & \text{pour les tuyaux en fonte légèrement incrustés;} \\ 0 & \text{pour les tuyaux fortement incrustés.} \end{cases}$$

Le cas ordinaire de la pratique correspond à la valeur $n = \frac{1}{3}$ pour laquelle la formule donne de bons diamètres.

80. Formules employées à l'étranger. — Une des plus anciennes est celle de Weisbach :

$$\frac{1}{4} DJ = \left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{U}} \right) U^2, \quad \begin{cases} \alpha = 0,0007336, \\ \beta = 0,0004828, \end{cases}$$

dont l'emploi est très étendu en Allemagne, bien qu'elle résume les pertes de charge plus encore que la formule de Darcy.

La formule, plus récente, de MM. Ganguillet et Kappeler, ingénieurs suisses, y est également usitée, quoique plus compliquée :

$$\frac{1}{4} DJ = \left(0,0001 + 0,00028 \frac{\alpha}{\sqrt{\frac{D}{2}}} + 0,0004 \frac{\alpha^2}{D} \right) U^2,$$

$\alpha = 0,15$ pour les tuyaux neufs, $\alpha = 0,25$ pour les conduites anciennes. Avec cette dernière valeur de α , la formule est comparable à celle de M. Flamant et donne de bons diamètres jusqu'à 1,00.

Après un certain nombre d'expériences exécutées sur des conduites en service depuis plusieurs années, M. A. Fanning s'est arrêté à l'expression :

$$\frac{1}{4} DJ = \left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{D}} \right) U^2, \quad \begin{cases} \alpha = 0,000512, \\ \beta = 0,000385. \end{cases}$$

Mais la préférence des ingénieurs anglais va aux formules monômes, plus avantageuses à tous égards pour les calculs numériques.

M. Robert Manning, professeur à Dublin, propose pour les tuyaux incrustés :

$$\frac{1}{4} DJ = \frac{0,0002}{\sqrt[3]{D}} U^2.$$

D'après le Dr Lampe, on devrait poser dans les mêmes conditions :

$$\frac{1}{4} DJ = \frac{0,0004889 U^{\frac{9}{5}}}{\sqrt{D}}.$$

Le professeur Unwin recommande la formule :

$$\frac{1}{4} DJ = \frac{a}{4} \frac{U^n}{D^{2-n}};$$

et n sont des variables dépendant du degré de rugosité des parois; n reste compris entre 1,79 et 2 pour les tuyaux en fonte.

M. Osborne Reynolds, qui a effectué de nombreuses expériences et dont le nom fait autorité en Angleterre en matière hydraulique, s'est arrêté à la formule générale analogue à celle de Unwin :

$$\frac{1}{4} DJ = \lambda T^{2-n} \frac{U^n}{D^{2-n}};$$

est un coefficient numérique égal à $\frac{396^n}{4 \times 67,7 \times 10^6}$; T , une fonction de la température centigrade définie par la relation:

$$T = 1 + 0,0336t + 0,000221t^2;$$

est un indice dont la valeur oscille entre 1,8 pour les tuyaux très lisses et 2 pour ceux à parois très rugueuses. Pour les tuyaux neufs, on doit faire $n = 1,85$; pour ceux légèrement incrustés, $n = 1,90$; pour les tuyaux assez fortement incrustés, $n = 1,95$.

MM. Thrupp et Robinson préconisent pour les tuyaux peu incrustés la relation :

$$J = 0,00113 \frac{Q^{1,85}}{D^{5,94}}.$$

Enfin, la formule de Colombo se met sous la forme :

$$J = \frac{0,00243 Q^2}{D^5};$$

elle diffère peu de celle de Dupuit.

81. Tableau des diverses formules. — A la formule fondamentale

$$\frac{1}{4} DJ = \varphi(U), \quad (2)$$

il faut joindre celle qui exprime le débit par seconde Q :

$$Q = \pi \frac{D^2}{4} U; \quad (1)$$

si on élimine la vitesse U entre ces deux équations, on obtient une relation de la forme générale $J = f(D, Q)$.

Prenons, par exemple, la formule de Prony (78); l'élimination de U donne :

$$\frac{1}{4} DJ = a \frac{4Q}{\pi D^3} + b \left(\frac{4Q}{\pi D^2} \right)^2 = \frac{4a}{\pi} \frac{Q}{D^3} + \frac{16b}{\pi^2} \frac{Q^2}{D^4},$$

d'où l'on déduit :

$$J = \frac{16a}{\pi} \frac{Q}{D^3} + \frac{64b}{\pi^2} \frac{Q^2}{D^4};$$

remplaçant a et b par leurs valeurs et faisant $\pi = 3,1416$, on trouve en fin de compte :

$$\text{Prony} \dots \dots J = 0,000088 \frac{Q}{D^3} + 0,00226 \frac{Q^2}{D^4}.$$

Effectuant les mêmes calculs sur les diverses formules, on obtient :

$$\text{Dupuit} \dots \dots J = 0,00250 \frac{Q^2}{D^5}, \quad \text{tuyaux incrustés.}$$

$$\text{Colombo} \dots \dots J = 0,00243 \frac{Q^2}{D^5},$$

$$\text{Manning} \dots \dots J = 0,00132 \frac{Q^2}{D^{5,33}},$$

$$\left. \begin{aligned} J &= \left(0,001643 \frac{Q}{D^3} + 0,0000419 \frac{Q^2}{D^4} \right) Q^2, \\ \text{Darcy} \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad \text{tuyaux neufs.}$$

$$\left. \begin{aligned} J &= \left(0,003286 \frac{Q}{D^3} + 0,0000838 \frac{Q^2}{D^4} \right) Q^2, \\ \end{aligned} \right\} \quad \text{tuyaux incrustés.}$$

$$\text{Lévy} \dots \dots J = 0,00242 \frac{Q^2}{D^{5,32}},$$

$$\text{Flamant} \dots \dots J = 0,00140 \frac{Q^{1,75}}{D^{4,75}},$$

Geslain.....	{	$J = 0,00115 \frac{Q^2}{D^{5,30}}$	parois lisses.
		$J = 0,00135 \frac{Q^2}{D^{5,366}}$	tuyaux neufs.
		$J = 0,00155 \frac{Q^2}{D^{5,43}}$	légèrement incrustés
		$J = 0,00175 \frac{Q^2}{D^{5,50}}$	très incrustés.
Thrupp-Robinson		$J = 0,00113 \frac{Q^{1,85}}{D^{4,91}}$	légèrement incrustés
Kutter.....	{	$J = \left(\frac{0,000648}{D^5} + \frac{0,000389}{D^{5,50}} + \frac{0,000584}{D^6} \right) Q^2$	tuyaux neufs.
		$J = \left(\frac{0,000648}{D^5} + \frac{0,000648}{D^{5,50}} + \frac{0,0001621}{D^6} \right) Q^2$	incrustés.
Reynolds.....	{	$J = 0,00108 \frac{Q^{1,80}}{D^{4,80}}$	parois très lisses
		$J = 0,00146 \frac{Q^{1,85}}{D^{4,83}}$	tuyaux neufs.
		$J = 0,00190 \frac{Q^{1,90}}{D^{4,90}}$	légèrement incrustés
		$J = 0,00264 \frac{Q^{1,95}}{D^{4,98}}$	incrustés.
		$J = 0,00355 \frac{Q^2}{D^5}$	très incrustés.

82. Choix d'une formule. — M. Debaue, qui a calculé et installé un grand nombre de distributions d'eau, recommande l'emploi exclusif de la formule de Darcy, avec coefficients des tuyaux incrustés jusqu'au diamètre de 0,50, et coefficients des tuyaux neufs pour les diamètres supérieurs. Au-dessous de 0,10, pour les conduites d'une certaine longueur, il recommande de majorer un tant soit peu les chiffres obtenus, substituer par exemple le diamètre de 0,04 à celui de 0,027.

A l'appui de sa recommandation, M. Debaue rapporte les résultats d'une expérience exécutée à Séville en 1895 sur une conduite en service depuis 1884, dépourvue de dépôts calcaires, de 0,533 de diamètre et de 12.816 mètres de longueur, laquelle a débité 198 litres par seconde sous une charge exactement mesurée de 19,39. Le calcul de la perte de charge par la formule de Darcy, tuyaux neufs, indique 21,06. Les autres formules donnent :

Filament.....	21,25	Geslain.....	48,70	tuyaux neufs.
Manning.....	19,40	—	21,50	légèrement incrustés.
Colombo.....	23,45	Reynolds.....	21,12	tuyaux neufs.

On voit que ces résultats sont assez approchés, sauf celui de Colombo. La formule de Darcy (tuyaux incrustés), celle de Lévy, de Prony, Dupuit, accuseraient des pertes de charge beaucoup trop fortes.

Dans une autre expérience effectuée à Buenos-Aires en 1897, une conduite de 1,22 de diamètre a débité 1.533 litres par seconde sous une charge de 2 mètres par kilomètre. Les diverses formules indiquent pour $D = 1,22$, $J = 0,001$:

Prony.....	1.534 ^l	Darcy.....	1.799 ^l	tuyaux neufs.
Dupuit.....	1.475 ^l	Geslain.....	2.050 ^l	légèrement incrustés.
Colombo.....	1.400 ^l	Flamant.....	2.100 ^l	—
Lévy.....	1.610 ^l	Reynolds.....	1.710 ^l	—
Thrupp-Robinson...	2.250 ^l	Darcy.....	1.157 ^l	tuyaux incrustés.

Ici les formules anciennes reprennent l'avantage. On voit apparaître la supériorité des formules de Lévy et de Reynolds, et l'infériorité de celle de Flamant, pour les gros diamètres.

Au siphon de Saint-Paul, sur le canal du Verdon, un tuyau de 1,75 de diamètre, dont la pente est de 0,001, débite jusqu'à 3 mètres cubes d'eau par seconde; le diamètre a été calculé par la formule de Prony pour un débit de 2.500 litres par seconde. Les formules accusent pour $D = 1,75$, $J = 0,001$:

Prony.....	2.650 ^l	Darcy.....	3.257 ^l	tuyaux neufs.
Lévy.....	2.985 ^l	Geslain.....	3.700 ^l	légèrement incrustés.
Flamant.....	3.500 ^l	—.....	3.400 ^l	très incrustés.

Cette expérience fait nettement ressortir l'exactitude de la formule de M. Lévy pour les gros diamètres.

Les réservoirs de chasse qui servent au nettoyage des égouts de Paris sont alimentés par des tubes en fer de 0,005 de diamètre, qui doivent fournir uniformément 10 mètres cubes par 24 heures, ou 0^l,116 à la seconde. Ce résultat est sensiblement acquis. Les tubes de 0,005 s'écroulent pour les pressions comprises entre 6 et 45 mètres, ceux de 0,004 pour les pressions plus élevées.

Dans les tubes de 0,005, la vitesse est de 5 mètres par seconde; la perte de charge se rapproche de 15 mètres, les tubes ont 3 mètres de long pour 45 mètres de pression.

ur la conduite, 2,60 pour 40 mètres, et 2 mètres seulement pour 30 mètres.

Les diverses formules donnent comme perte de charge par mètre, pour $D = 0,003$, $Q = 0,116$:

Flamant.....	11 ^m ,50	Geslain.....	14 ^m ,00	tuyaux neufs.
Flamant.....	16 ^m ,00	—.....	20 ^m ,50	légèrement incrustés.
Darcy.....	50 ^m ,30	Lévy.....	40 ^m ,00	—

Ces chiffres marquent la supériorité des formules de Flamant et de M. Geslain pour les petits diamètres.

Personnellement nous donnons la préférence à la formule de M. Flamant pour les petits et moyens diamètres jusqu'à 1 mètre, et à celle de M. Lévy pour les diamètres plus élevés.

Néanmoins nous reconnaissons que, pour les diamètres compris entre 0,15 et 0,80, on obtient des résultats assez satisfaisants avec la plupart des formules anciennes, et celles de Darcy, Manning, Kutter, etc. Les formules de Reynolds se présentent également dans d'assez bonnes conditions sur toute l'échelle des diamètres.

83. Tables numériques. — Tous les problèmes que l'on peut avoir à résoudre sur les conduites se ramènent en définitive à la détermination de deux des quantités D , J , U , Q , en fonction des deux autres, ces quatre quantités étant liées par les relations (1) et (2) (84).

La plupart des ingénieurs qui ont proposé des formules d'écoulement, frappés de la longueur et de l'aridité des calculs numériques qu'entraîne, en général, l'emploi de ces formules, les ont traduites en tables. Nous reproduisons, à la fin du volume, celles de Darcy, de M. Lévy et de M. Flamant, suffisantes pour la pratique; les exemples des paragraphes suivants indiqueront leur mode d'emploi.

84. Problème I. — *Connaissant la perte de charge par mètre d'une conduite et son débit Q , déterminer le diamètre D de cette conduite et la vitesse moyenne de l'eau U .*

1^o Si entre l'équation de Darcy :

$$\frac{1}{4} DJ = \left(\alpha + \frac{\beta}{D} \right) U^2 = b_1 U^2, \quad b_1 = \alpha + \frac{\beta}{D},$$

et celle du débit, on élimine la vitesse U , il vient

$$\frac{J}{Q^2} = \frac{64b_1}{\pi^2 D^5};$$

le premier membre étant connu et le second ne contenant que D comme inconnue, cette équation permet de calculer le diamètre. On obtient ensuite :

$$U = \frac{4Q}{\pi D^2}.$$

La table III fait connaître, en fonction du diamètre, les valeurs de $\frac{J}{Q^2}$ et de b_1 pour des conduites chargées de déversoirs. *pour les tuyaux neufs, ces valeurs doivent être réduites à moitié.*

La table X donne directement, ou par interpolation, les valeurs de la vitesse d'après celles du diamètre et du débit.

EXEMPLE. — La conduite en ciment qui amène à Ferrare les eaux des puits artésiens de Castel-Franco a été calculée sur un

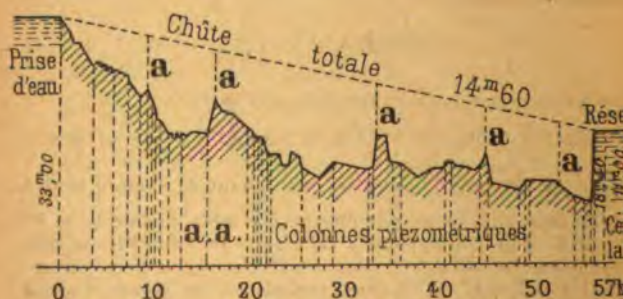


FIG. 365.

quotidien de 2.500 mètres cubes, avec 14,60 de perte de charge pour une longueur de 57 kilomètres.

Les données du problème étaient donc :

$$J = \frac{14,60}{57000} = 0,00026; \quad Q = \frac{2500000}{86400} = 28 \text{ litres;}$$

en déduit :

$$\frac{J}{Q^2} = 0,27,$$

La table III donne ensuite $D = 0,42$; c'est le diamètre qui a été opté. On trouve enfin dans la table X :

$$U = 0,24 \text{ environ.}$$

2° La table V de M. Lévy exige le calcul préalable du rapport

$$\frac{Q}{\sqrt{J}} = \frac{0,028}{\sqrt{0,00026}} = \frac{2,8}{\sqrt{2,5}} = 1,75,$$

à quel correspond sensiblement, colonne β , le diamètre 0,40.

3° L'élimination de U entre l'équation de M. Flamant :

$$\frac{1}{4} DJ = 0,00023 \sqrt{\frac{U^7}{D}},$$

celle du débit, donne la relation :

$$\frac{1}{\sqrt[4]{Q^7}} = \frac{0,00092}{J} \sqrt[4]{\left(\frac{4}{\pi}\right)^2} \frac{1}{\sqrt[4]{D^{10}}} = \frac{\gamma}{J},$$

en posant pour abréger :

$$\gamma = 0,00092 \sqrt[4]{\left(\frac{4}{\pi}\right)^2} \frac{1}{\sqrt[4]{D^{10}}},$$

cette relation détermine D en fonction de J et de Q .

La table VII donne les valeurs du rapport $\frac{J}{\gamma} = \sqrt[4]{Q^7}$ et de son

inverse $\frac{\gamma}{J}$ en fonction du débit Q ; multipliant le nombre trouvé

par J , on obtient γ ; il ne reste plus qu'à relever dans la table VI la valeur de D qui correspond à celle de γ . La table VIII facilite beaucoup les calculs.

Avec les éléments numériques précédents, on trouve d'abord (table VII) :

$$\frac{\gamma}{J} = 522,$$

$$\gamma = 522 \times 0,00026 = 0,132,$$

ce qui donne (table VI) 0,39 comme diamètre.

4° Lorsque la conduite sort d'un réservoir, le calcul de J appelle une correction pour tenir compte des pertes de charge dues à la contraction à l'entrée de la conduite et à la production de la vitesse (§ 76).

On commence par évaluer J en négligeant dans la formule le terme soustractif $\frac{U^2}{g}$, puis, d'après le chiffre obtenu pour la vitesse, on calcule la valeur de ce terme, qui vient alors en déduction de h dans une seconde détermination de J .

Disons d'ailleurs que cette correction est généralement très faible, et qu'elle n'offre de l'intérêt que pour le calcul des conduites de petite longueur, par exemple les tuyaux de communication et de décharge des réservoirs.

On peut exprimer, en fonction du diamètre, la longueur du tronçon de conduite qui équivaut comme charge absorbée aux pertes en question.

Soient s la longueur réelle de la conduite, s' sa longueur augmentée de celle du tronçon ; on a, en posant $\varphi(U) = b_1 U^2$:

$$\frac{1}{4} D \frac{h - \frac{U^2}{g}}{s} = b_1 U^2, \quad (2)$$

et d'autre part :

$$\frac{1}{4} D \frac{h}{s'} = b_1 U^2; \quad (a)$$

le rapprochement des premiers membres conduit à la relation :

$$\frac{h(s' - s)}{s'} = \frac{U^2}{g};$$

qui donne à son tour, en la divisant par (a) et transposant les termes :

$$s' = s + \frac{D}{4gb_1}$$

Adoptant pour b_1 la valeur moyenne 0,00055 et effectuant les calculs, il vient :

$$s' = s + 45D.$$

La charge absorbée par la vitesse, la bonde, et le changement brusque de section, équivaut à la perte de charge qui résultera d'un supplément de parcours, avec la même vitesse, dans un tuyau long de 45 diamètres environ.

Si la bonde n'existait pas, la longueur du tronçon se réduirait à 34 diamètres.

REMARQUE. — On déduit de l'équation (3) ci-dessus :

$$U = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{8sb_1g}{D} + 2}} = \mu \sqrt{2gh},$$

en posant :

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\frac{8sb_1g}{D} + 2}}.$$

Le coefficient de réduction μ , et par suite la vitesse à l'extrémité B de la conduite (fig. 364), diminue donc en raison directe de la longueur s , ou encore du rapport $\frac{s}{D}$. Si l'on fait successi-

vement $\frac{s}{D} = 5, 10, 15, \dots, 200$, on obtient approximativement pour ce coefficient :

$\frac{s}{D}$	μ	$\frac{s}{D}$	μ
5	0,77	30	0,55
10	0,64	40	0,52
15	0,61	50	0,49
20	0,59	100	0,40
25	0,57	200	0,30

85. Problème II. — On connaît la pente J et le diamètre D d'une conduite; calculer son débit Q et la vitesse moyenne de l'eau U .

Ce problème et le précédent sont ceux qui se présentent le plus fréquemment dans la pratique, les autres n'offrent guère qu'un intérêt théorique.

La solution est immédiate par les tables VI, VII, X.

EXEMPLE. — Sur une conduite de 1,40, la perte de charge est de 0,60 par kilomètre; calculer le débit et la vitesse.

En regard du diamètre de 1,10, la table VI indique :

$$\gamma = 0,00089 ;$$

on déduit :

$$\frac{\gamma}{J} = \frac{0,00089}{0,0006} = 1,48 ;$$

à ce nombre correspond, table VII, un débit de 800 litres.
La table X donne ensuite pour ce débit et le diamètre 1,10 :

$$U = 0,84.$$

86. Influence du diamètre. — Lorsqu'on fait croître le diamètre d'une conduite en laissant constante la pente, ou lorsqu'on augmente cette dernière sans faire varier le diamètre, dans les deux cas le débit va en augmentant, mais l'accroissement est beaucoup plus accéléré dans le premier que dans le second.

La formule de M. Flamant mise sous la forme :

$$Q = \lambda D^{\frac{19}{7}} J^{\frac{4}{7}},$$

fait nettement ressortir l'influence prépondérante du diamètre sur le débit ; on y voit, en effet, le facteur D intervenant à la puissance $\frac{19}{7}$, et la pente J au degré $\frac{4}{7}$ seulement, de sorte qu'à des variations élémentaires égales de ces quantités correspondent déjà des accroissements de Q dans le rapport $\frac{19}{4}$; et que, pour des variations plus considérables, ce rapport se trouve lui-même beaucoup plus élevé.

Les résultats numériques consignés dans le tableau ci-après et calculés avec les tables de M. Flamant viennent d'ailleurs à l'appui de cette observation, en même temps qu'ils la précisent. Une simple diminution d'un dixième sur le diamètre d'une conduite restreint son débit de plus d'un quart ; faite sur la perte de charge, elle ne le réduit que d'un quinzième. Si l'on double le diamètre, le débit est plus que sextuplé ; en doublant la perte de charge, on ne l'augmente que des trois demis. Une conduite d'un mètre équivaut à 322 conduites

de 0,10; une pente décuple ne quadruple même pas le débit.

Ainsi, lorsqu'une conduite d'eau laisse à désirer comme débit, c'est par un accroissement du diamètre que l'on augmente efficacement sa portée, et non par une augmentation de la perte de charge.

PERTE DE CHARGE CONSTANTE DE 0,0006				DIAMÈTRE CONSTANT DE 0,20			
DIAMÈTRE	VITESSE en mètres par seconde	DÉBIT en litres par seconde	NOMBRE de conduites de 0,10 équivalentes	PERTE de charge par mètre	VITESSE en mètres par seconde	DÉBIT en litres par seconde	NOMBRE de conduites de 0,10 équivalentes
0,10	0,15	1,18	1	0,0006	0,24	7,65	1
0,15	0,19	3,56	3	0,0 12	0,34	11,30	1,48
0,20	0,24	7,65	6,5	0,0018	0,46	14,20	1,84
0,25	0,29	14,3	12	0,0024	0,54	16,90	2,21
0,30	0,36	24	20	0,0 36	0,60	19	2,48
0,40	0,41	52	44	0,0036	0,66	21	2,74
0,50	0,46	93	80	0,0042	0,73	22,7	2,96
0,60	0,53	155	131	0,0048	0,79	24,5	3,17
0,80	0,69	340	288	0,0054	0,86	27,5	3,59
1,00	0,81	617	522	0,0060	0,90	28,8	3,76
1,10	0,84	800	678	0,0066	0,95	31	4,00

87. Problème III. — Etant donnés le débit Q et le diamètre D d'une conduite, déterminer la perte de charge J et la vitesse U .

La perte de charge se calcule avec les tables VI et VII, ou VIII; la vitesse, par la table IX.

1° Pratiquement nous estimons qu'une conduite de distribution de 1,10 doit débiter 800 litres à la seconde. Quelles sont les valeurs correspondantes de la perte de charge et de la vitesse?

Pour un débit de 800 litres, la table VII donne :

$$\frac{J}{\gamma} = 0,677;$$

en regard du diamètre 1,10, la table VI indique :

$$\gamma = 0,00089;$$

par suite :

$$J = \frac{J}{\gamma} \times \gamma = 0,677 \times 0,00089 = 0^m,60 \text{ par km.}$$

Ce chiffre se lit immédiatement dans la table VIII.

On lit enfin dans la table IX :

$$U = 0,84.$$

2° Au cours d'une expérience exécutée à Séville en 1893 une conduite en fonte de 0,533 de diamètre et de 12.816 mètres de long a débité 198 litres par seconde sous une charge mesurée de 19,39.

Les tables de M. Flamant fournissent par interpolation proportionnelle :

$$\frac{J}{\gamma} = 0,0588, \quad \gamma = 0,0288;$$

d'où :

$$J = 0,0588 \times 0,0288 = 0,0016934;$$

si l'on désigne par h la charge correspondant à 12.816 mètres on trouve :

$$h = 0,0016934 \times 12816 = 21^m,25.$$

La table III de Darcy donne pour le diamètre 0,533 (tuyau neufs) :

$$\frac{J}{Q^2} = 0,042565,$$

d'où :

$$h = 12816J = 12816 \times 0,042565 \times 0,198^2 = 21^m,06.$$

88. Vitesse moyenne maxima. — Lorsqu'on a fixé le débit d'une conduite projetée, on peut le réaliser en faisant varier en sens inverses le diamètre et la vitesse moyenne; mais, à point de vue pratique, les vitesses considérables ne sont pas à rechercher.

Une bonne distribution exige que la vitesse ne dépasse guère 0,80 par seconde, surtout dans les localités à fortes déclivités où les parties basses font appel sur les régions hautes, ce qui accroît démesurément la vitesse et rend dé

ectueux le service de ces régions; l'eau coule rapidement dans la conduite sans pénétrer dans les branchements.

Dans certaines rues de Paris, où les déclivités sont très prononcées, la pression normale de 25 mètres tombe à 5 mètres aux heures de forte consommation.

En outre, les vitesses considérables rendent les coups de bélier, provenant de la fermeture brusque des robinets, extrêmement dangereux à cause de la valeur de la force vive qui se trouve subitement détruite. Cet inconvénient est des plus sérieux pour les conduites en poterie et en ciment dont la résistance est relativement faible. Aussi a-t-on vu que, dans la conduite de dérivation de Ferrare (§ 84), la vitesse ne dépassait pas 0,24 par seconde.

A ce dernier point de vue, pour les conduites en fonte, il est prudent de ne pas dépasser les limites supérieures indiquées dans le tableau ci-dessous :

DIAMÈTRES	VITESSES MAXIMA	DIAMÈTRES	VITESSES MAXIMA
0 ^m ,06	0 ^m ,70	0 ^m ,40	1 ^m ,25
0 ^m ,10	0 ^m ,75	0 ^m ,50	1 ^m ,40
0 ^m ,15	0 ^m ,80	0 ^m ,60	1 ^m ,60
0 ^m ,20	0 ^m ,90	0 ^m ,80	1 ^m ,80
0 ^m ,25	1 ^m ,00	1 ^m ,00	2 ^m ,00
0 ^m ,30	1 ^m ,10	1 ^m ,10	2 ^m ,20

89. Conduites de refoulement. — Ce sont les conduites qui mènent l'eau d'une rivière ou d'une source dans un réservoir placé à un niveau plus élevé; le liquide est aspiré, puis refoulé dans la conduite par un système de pompes installées au voisinage de la rivière et qu'actionnent plusieurs moteurs hydrauliques ou à vapeur.

La longueur de la conduite est connue, ainsi que son débit par seconde Q ; mais le diamètre reste indéterminé, puisque l'on peut toujours, en faisant varier la puissance de la machine, accroître ou diminuer la vitesse de l'eau de façon à produire le débit voulu.

Lorsque la conduite a une grande longueur, une diminu-

tion du diamètre restreint sensiblement les frais d'établissement, mais entraîne à un accroissement de vitesse, c'est-à-dire de travail moteur, qui se traduit par une dépense supplémentaire de combustible. Les circonstances sont inverses quand l'on augmente le diamètre; on dépense davantage sur la canalisation, mais on économise sur les machines. Ces considérations conduisent à penser qu'il doit exister un

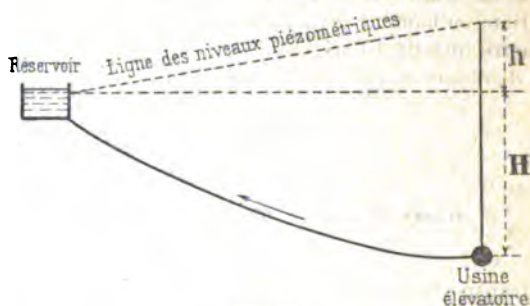


FIG. 366.

combinaison de diamètre et de vitesse plus économique que toutes les autres; l'analyse permet de déterminer cette combinaison. Disons d'ailleurs que pratiquement la vitesse doit rester comprise entre 0^m,50 et 1 mètre.

Appelons :

l , la longueur de la conduite;

H , la hauteur totale d'élévation, aspiration et refoulement;

p , le prix du cheval-vapeur de la machine élévatrice, y compris la dépense d'entretien et d'exploitation capitalisée;

p' , le prix du mètre linéaire de conduite de 1,00 de diamètre toute posée;

N , le nombre de chevaux-vapeur de la machine; ρ , le rendement de la machine et des pompes.

Le capital correspondant aux frais d'installation de la machine et de la conduite a pour expression générale :

$$P = pN + p'Dl, \quad (1)$$

car le prix de revient d'une conduite est sensiblement proportionnel à son diamètre.

Le travail moteur à produire par la machine comprend le travail utile d'élévation, et celui qui est nécessaire pour vaincre le frottement de l'eau à la paroi de la conduite; c'est-à-dire que, dans l'expression du travail, la hauteur H doit être majorée de la perte de charge h correspondant à la longueur l . La somme $H + h$ représente la hauteur virtuelle d'élévation, ou hauteur manométrique, que l'on relève sur le manomètre installé à l'origine de la conduite.

On a d'ailleurs d'après la formule de Darcy :

$$h = \frac{64b_1 Q^2 l}{\pi^2 D^5},$$

par suite :

$$N = \frac{1000Q (H + h)}{75\rho} = \frac{1000Q}{75\rho} \left(H + \frac{64b_1 Q^2 l}{\pi^2 D^5} \right);$$

si l'on transporte dans (4), il vient :

$$P = \frac{1000pQ}{75\rho} \left(H + \frac{64b_1 Q^2 l}{\pi^2 D^5} \right) + p'Dl.$$

Le coefficient b_1 étant de la forme :

$$b_1 = \alpha + \frac{\beta}{D},$$

on a enfin :

$$P = \frac{1000pQ}{75\rho} \left[H + \frac{64Q^2 l}{\pi^2} \left(\frac{\alpha}{D^5} + \frac{\beta}{D^6} \right) \right] + p'Dl.$$

Cette expression ne contient plus que D comme variable et, si l'on veut choisir le diamètre de façon que P soit le plus petit possible, il faut égaliser à zéro la dérivée de P prise par rapport à D ; on obtient l'équation du septième degré :

$$\frac{64000Q^3 p}{75\pi^2\rho} \left(-\frac{5\alpha}{D^6} - \frac{6\beta}{D^7} \right) + p' = 0,$$

qui ne peut être résolue que par approximation.

L'équation ne renferme ni H ni l , ce qui prouve que la solution est indépendante de la hauteur d'élévation et de la

longueur de la conduite; cette conclusion apparaît comme évidente *a priori*.

On simplifie la formule en adoptant pour b_1 la valeur constante α , alors $\beta = 0$, et l'équation fournit immédiatement

$$D = \sqrt[6]{\frac{5 \times 4000 \times b_1 p}{75 \pi^2} \sqrt{Q}}.$$

Pour les données moyennes :

$$p = 4.000^{\text{re}} \quad p' = 100^{\text{re}}, \quad \rho = 0,60,$$

et le coefficient de Dupuit $b_1 = 0,0004$, on obtient la formule

$$D = 1,50 \sqrt{Q}, \quad (a)$$

qui suffit pour les cas ordinaires de la pratique:

Dans les installations courantes le rapport $\frac{D}{\sqrt{Q}}$ oscille entre 1,35 et 1,70 suivant la valeur du quotient $\frac{p'}{p}$.

L'équation (2) combinée avec celle du débit donne pour vitesse :

$$U = \sqrt[3]{\frac{15 p p'}{1000 b_1 \pi p}},$$

et avec les données ci-dessus :

$$U = 0,56.$$

On sera dans de bonnes conditions pratiques lorsqu'on fixera le diamètre d'après le débit et par la condition que la vitesse approche de 0,60 par seconde.

Avec le débit et la vitesse, les tables fournissent le diamètre et la perte de charge. Le débit quotidien doit être réparti sur une période de douze heures seulement, car la nuit ordinairement les machines chôment.

EXEMPLE. — *Le service d'une ville exige 2.000 mètres cubes d'eau par jour, eu égard aux besoins présents et futurs; ce volume doit être emprunté à une rivière au moyen d'une pompe actionnée par un moteur à vapeur. Quel diamètre faudra-t-il donner à la conduite de refoulement ?*

Le débit par seconde correspondant à une marche quotidienne de 12 heures est :

$$\frac{2000 \times 3}{12 \times 60 \times 60} = 45 \text{ litres.}$$

La formule (a) donne pour ce débit :

$$D = 1,50 \sqrt{0,045} = 0,31 \sqrt{}$$

prendra une conduite de 0,30 sur laquelle la perte de charge sera, d'après Flamant : $J = 0,00188$, ou de 1,88 par kilomètre ; la vitesse $U = 0,63$.

99. **Puissance du moteur élévatoire.** — Le choix du moteur employé pour actionner un système de pompes élévatoires est une question d'espèce qui dépend d'une foule d'éléments divers : hauteur d'élévation de l'eau, volume à élever, ressources disponibles, circonstances locales, etc... ; aucune règle fixe ne saurait être prescrite à cet égard ; l'ingénieur doit envisager les conditions dans lesquelles se présente le problème et se déterminer, dans chaque cas, après une étude comparative des diverses solutions possibles.

La première question à considérer est celle de la force du moteur. Si Q représente le volume d'eau à élever en une seconde, H la hauteur totale d'élévation, aspiration et refoulement, h la perte de charge sur la conduite de refoulement, le travail de la machine en eau montée aura pour expression :

$$N = \frac{1000Q(H + h)}{75} ;$$

est le nombre de chevaux-vapeurs. La somme $H + h$ représente la hauteur virtuelle d'élévation ou *hauteur manométrique*, que l'on relève sur le manomètre installé à l'origine de la conduite.

Soit m' le rendement des pompes ; la puissance correspondante de la machine calculée sur l'arbre-manivelle est :

$$N' = \frac{1000Q(H + h)}{75m'} ;$$

la force nominale :

$$N' = \frac{1000Q(H + h)}{75mm'} ;$$

m représente le rendement mécanique de la machine. Dans le paragraphe précédent, on a posé $\rho = mm'$.

Dans le cas d'un *moteur hydraulique*, le volume d'eau nécessaire avec une chute z pour élever le volume Q éga

$$Q' = \frac{Q(H + h)}{mm'z}.$$

Exemple. — Supposons que la conduite de refoulement du blème ci-dessus ait 1.800 mètres de long avec une hauteur de variation de 60 mètres. Alors :

$$H = 60,00, \quad h = 1,88 \times 1,8 = 3,38;$$

ce qui donne pour l'élévation manométrique :

$$H + h = 63,38.$$

Le travail de la machine en eau montée a pour valeur :

$$N = \frac{45 \times 63,38}{75} = 38 \text{ chevaux};$$

et sa force réelle doit être de :

$$N' = \frac{45 \times 63,38}{75 \times 0,75} = 50 \text{ chevaux environ};$$

on fait :

$$m' = 0,75.$$

La force nominale devrait atteindre 70 chevaux.

Avec une chute de 2^m,50 et une turbine dont le rendement ρ de 0,55, il faudrait un volume d'eau moteur :

$$Q' = \frac{45 \times 63,38}{0,55 \times 0,75 \times 2,50} = 2.760 \text{ litres par seconde.}$$

91. Conduites de dérivation. — On peut également s'occuper de mettre au calcul le cas d'une conduite de dérivation amenant l'eau d'une rivière dans un réservoir placé à un niveau inférieur. Au point de vue pratique, cette question présente moins d'intérêt que la précédente, parce que les dérivations de cours d'eau par des conduites forcées sont encore assez rares, et qu'en pareille occasion le point de prise est généralement imposé par des circonstances locales, de sorte

connait la longueur, la charge et le débit de la conduite, qui suffit pour calculer son diamètre.

En éloignant la prise d'eau du réservoir, on augmente la longueur et la charge, mais on économise sur le diamètre;

en des circonstances inverses se produisent lorsqu'on rapproche la prise du réservoir.

On détermine la combinaison de pente et de diamètre la plus avantageuse, autrement dit la position du point de prise a , appelons :

h , la hauteur du réservoir au-dessus de la ligne de pente

l , la longueur du cours d'eau supposée prolongée jusqu'à la verticale du réservoir;

p , le prix du mètre linéaire en terrain dans les parties où la conduite emprunte le sous-sol des propriétés privées;

p' , le prix du mètre linéaire de conduite de 1,00 de diamètre, toute posée;

l' , la longueur totale de la conduite;

l , la longueur ne donnant pas lieu à des acquisitions de terrain;

D , la perte de charge par mètre de la conduite;

I , la pente du cours d'eau au voisinage de la prise a .

h, p, p', l', I , sont des données; J et l représentent les inconnues.

La dépense totale d'installation qu'il importe de rendre minima a pour expression :

$$F = p(l - l') + p'Dl = (p'D + p)l - p'l'.$$

On tire d'abord du triangle amn :

$$h = l(I - J), \quad (1)$$

car I représente la pente de la ligne an et J celle de am .

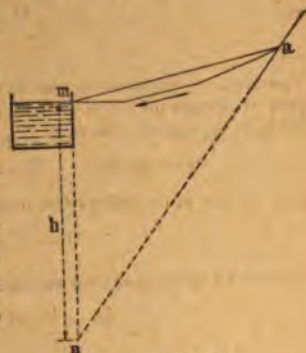


FIG. 357.

D'autre part, si Q est le débit de la conduite, on a l'équation :

$$J = \frac{64b_1 Q^2}{\pi^2 D^5};$$

posons encore :

$$I = \frac{64b_1 Q^2}{\pi^2 \Delta^5} = J \frac{D^5}{\Delta^5} \quad (2)$$

L'élimination de l à l'aide de (1) et (2) donne pour P :

$$P = \frac{(p'D + p) h D^5}{(D^5 - \Delta^5) I} - p';$$

le minimum cherché correspond à l'équation $\frac{dP}{dD} = 0$, c'est-à-dire :

$$\left(\frac{D}{\Delta}\right)^6 - 6\left(\frac{D}{\Delta}\right) - \frac{5p}{p'\Delta} = 0. \quad (3)$$

Cette équation du sixième degré fait connaître la valeur de D , mais sa résolution ne cesse pas d'être très laborieuse.

Lorsqu'il n'y a pas d'acquisition de terrain, ce qui se produit lorsque la conduite emprunte partout le sous-sol de routes et des propriétés publiques, $p = 0$; on obtient alors immédiatement :

$$D = \Delta \sqrt[5]{6} = \sqrt[5]{\frac{6 \times 64b_1 Q^2}{\pi^2 I}},$$

puis, d'après (1) et (2),

$$J = \left(\frac{\Delta}{D}\right)^5 I = \frac{I}{6}, \quad l = \frac{6h}{5I}. \quad (4)$$

Le tableau suivant facilite la résolution de l'équation (3) lorsque p n'est pas nul; on y trouve, placées en regard, quelques valeurs correspondantes des rapports $\frac{p}{p'\Delta}$ et $\frac{D}{\Delta}$. Les variations du second rapport étant relativement faibles en regard de celles du premier, on peut toujours, dans un

nière approximation, adopter la valeur de l fournie par l'équation (4).

$\frac{p}{p' \Delta}$	$\frac{D}{\Delta}$	$\frac{p}{p' \Delta}$	$\frac{D}{\Delta}$
0,053	1,44	0,478	1,50
0,119	1,45	0,532	1,51
0,185	1,46	0,642	1,52
0,254	1,47	0,820	1,54
0,326	1,48	0,919	1,56
0,400	1,49	1,015	1,58

92. **Décharge des réservoirs.** — Le niveau de l'eau ne restant pas constant, il en est de même du débit qui diminue avec la hauteur, et l'on peut se demander quel sera le temps nécessaire à l'évacuation d'un volume d'eau déterminé. Le problème est analogue à celui du numéro 52.

Désignons par :

S , l'aire de la section horizontale du réservoir, opposée constante sur toute la hauteur;

ω , l'aire de la section transversale de la conduite DC;

z , la charge sur l'extrémité C à l'époque t ;

z_0 et z_1 , les charges initiale et finale;

U , la vitesse d'écoulement à l'époque t ;

T , le temps cherché.

Pendant l'intervalle de temps dt qui suit l'époque t , il sort par l'orifice C un volume d'eau $\omega U dt$, en même temps que



$$\frac{1}{S} = 1 - \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \quad \text{FIG. 368.}$$

le niveau dans le réservoir s'abaisse de $-dz$; on a, par suite :

$$\omega U dt = -S dz,$$

et, en remplaçant U par sa valeur en fonction de z (84) :

$$\mu \omega \sqrt{2gz} dt = -S dz.$$

La séparation des variables est immédiate ; il vient :

$$dt = -\frac{S}{\mu \omega} \frac{dz}{\sqrt{2gz}}; \quad (1)$$

puis

$$T = \frac{S}{\mu \omega} \int_{z_1}^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{2gz}};$$

effectuant l'intégration :

$$T = \frac{2S}{\mu \omega \sqrt{2g}} (\sqrt{z_0} - \sqrt{z_1}); \quad (2)$$

ω est connu, ainsi que μ ; S , z_0 , z_1 le sont également par l'échelle des cubes du réservoir; cette formule permet donc de calculer T .

Exemple. — Dans une manœuvre de vidange partielle effectuée au réservoir de Charonne, nous avons :

$$\begin{array}{lll} S = 883^{\text{m}^2}, & D = 0,20, & \omega = 0,031416, \\ s = 4,58, & z_0 = 5,53, & z_1 = 4,55; \end{array}$$

ce qui donnait (84, Remarque) :

$$\frac{s}{D} = \frac{4,58}{0,20} = 23, \quad \mu = 0,58.$$

Le temps de la vidange a été exactement de une heure trente ; le calcul indique :

$$T = \frac{1766 (\sqrt{5,53} - \sqrt{4,55})}{0,53 \times 0,031416 \times 4,43} = 1^{\text{h}} 24'.$$

Le diamètre des décharges varie depuis 0,15 jusqu'à 0,50 suivant la capacité des réservoirs et l'épaisseur de la tranche d'eau. Celle du bassin de la place de la Nation, à Paris, qui contient en

viron 1.500 mètres cubes, est de 0,15. Au réservoir de Charonne, d'une contenance de 3.500 mètres, les deux décharges sont de 0,20. Chaque compartiment du réservoir supérieur de Ménilmontant, 45.000 mètres cubes avec 4^m,50 de hauteur d'eau, est pourvu de deux décharges de 0^m,40.

Cas d'une section horizontale variable. — Il est rare que l'aire mouillée S de la section horizontale des réservoirs de distribution ne reste pas sensiblement constante sur toute l'épaisseur de la tranche d'eau, car le fruit des piliers et des murs de pourtour est généralement très faible. Ce cas ne se rencontre que dans les réservoirs naturels, comme ceux de Bouzey sur le canal de l'Est et du Furens près de Saint-Étienne, que l'on crée en barrant transversalement les vallées étroites, et dans lesquels viennent s'accumuler les eaux superficielles des régions plus élevées.

Si S , supposée variable, peut s'exprimer par une fonction connue de la charge z , $S = \varphi(z)$, l'équation (1) donne :

$$dt = - \frac{1}{\mu\omega} \frac{\varphi(z) dz}{\sqrt{gz}},$$

et l'on est ramené à une quadrature.

Supposons que l'on ait :

$$\varphi(z) = az^2 + bz + c, \quad (\alpha)$$

a, b, c désignant des coefficients constants, alors :

$$T = \frac{1}{\mu\omega \sqrt{2g}} \int_{z_0}^{z_1} \frac{az^2 + bz + c}{\sqrt{z}} dz;$$

l'intégration ne présente aucune difficulté, il vient :

$$T = \frac{2}{\mu\omega \sqrt{2g}} \left[\frac{az^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{bz^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + cz^{\frac{1}{2}} \right]_{z_0}^{z_1}. \quad (\beta)$$

Dans tous les réservoirs de forme polyédrique, sphérique, parabolique, elliptique, l'aire variable S peut s'exprimer en fonction de z par une relation semblable à (α).

Considérons, par exemple, la *cuve sphérique* de centre O et de rayon R. Appelons ρ le rayon variable MH, p la distance de l'extrémité C à l'horizontale du point D. On a sur la figure :

$$\rho^2 = R^2 - (R - z + p)^2 = -z^2 + 2(R + p)z - p(2R + p)$$

par suite :

$$S = -\pi z^2 + 2\pi(R + p)z - p\pi(2R + p).$$

La formule (5) donne dès lors :

$$T = \frac{2\pi}{\mu\omega\sqrt{2g}} \left[\frac{1}{5} (\sqrt{z_0^5} - \sqrt{z_1^5}) - \frac{2(R+p)}{3} (\sqrt{z_0^3} - \sqrt{z_1^3}) + p(2R+p) (\sqrt{z_0} - \sqrt{z_1}) \right]$$

La durée de la vidange complète s'obtient en faisant $z_1 = p$.

Plus généralement, si la section horizontale est un polygone irrégulier variable dont les sommets sont $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$ situés sur les directrices fixes :

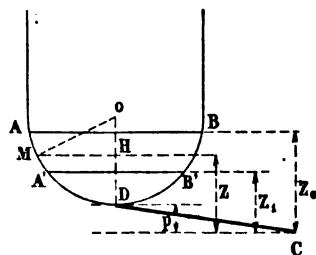


FIG. 369.

$$\begin{cases} x = \lambda z + \mu \\ y = \lambda' z + \mu' \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda_1 z + \mu_1 \\ y = \lambda_1' z + \mu_1' \end{array} \right\} \text{ etc. ;}$$

l'aire de cette section, dont les coordonnées des sommets $A_1 (x_1 y_1 z_1), A_2 (x_2 y_2 z_2), \dots, A_n (x_n y_n z_n)$ s'expriment linéairement en fonction de z d'après

les équations ci-dessus est, comme on sait, représentée par le déterminant :

$$S = -\frac{1}{2} \sum \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix} z_i^n.$$

S est encore une fonction du second degré en z de la forme $(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)$.

Cas où le réservoir reçoit une dérivation. — L'intégration de l'équation de l'écoulement serait plus compliquée si le réservoir, tout en se vidant, recevait par un aqueduc de dérivation un volume d'eau constant de Q mètres cubes à la seconde.

On aurait alors l'équation :

$$\mu\omega \sqrt{2gz} dt = Qdt - Sdz,$$

ou l'on peut écrire :

$$(Q - \mu\omega \sqrt{2gz}) dt = Sdz,$$

d'où l'on déduit comme plus haut :

$$T = \int_{z_1}^{z_0} \frac{Sdz}{\mu\omega \sqrt{2gz} - Q}. \quad (a)$$

Lorsque S reste constant, l'intégration s'effectue en posant :

$$\mu\omega \sqrt{2gz} - Q = \mu\omega \sqrt{2g} u;$$

différentiant, il vient :

$$\frac{dz}{2\sqrt{z}} = du,$$

par suite :

$$dz = 2 \left(u + \frac{Q}{\mu\omega \sqrt{2g}} \right) du;$$

transportant dans (a) :

$$T = 2S \int \frac{u + \frac{Q}{\mu\omega \sqrt{2g}}}{\mu\omega \sqrt{2g} u} du;$$

la quadrature en u est immédiate; on obtient en fin de compte :

$$T = \frac{2S}{\mu\omega \sqrt{2g}} (\sqrt{z_0} - \sqrt{z_1}) + \frac{QS}{\mu^2\omega^2g} L \frac{\mu\omega \sqrt{2gz_0} - Q}{\mu\omega \sqrt{2gz_1} - Q}.$$

Pour $Q = 0$, on retrouve la formule (2).

La même expression est encore valable, sauf le changement de signe de Q, pour le cas d'un réservoir qui alimente une pompe élévatoire absorbant Q mètres cubes par seconde.

Loi de variation du plan d'eau. — L'intégration dell'équation (1) donne la relation qui lie la charge z au temps t , c'est-à-dire la loi de variation du plan d'eau en fonction du temps. On obtient :

$$t = \frac{S}{\mu\omega \sqrt{2g}} (\sqrt{z_0} - \sqrt{z}).$$

Isolons \sqrt{z} dans un membre et élevons au carré, il vient :

$$z = \frac{2g\mu^2\omega^2}{S^2} t^2 - \frac{2\mu\omega \sqrt{2gz_0}}{S} t + z_0.$$

Le plan d'eau s'abaisse d'un mouvement uniformément varié.

Dans le cas de S variable, le réservoir présentant la forme d'une surface de révolution,

$$z = f(\rho),$$

la descente du plan d'eau est évidemment uniforme quand l'on a

$$S = \pi\rho^2 = \sqrt{2gz},$$

c'est-à-dire :

$$m\rho^2 = \sqrt{z}, \quad m = \frac{\pi}{\sqrt{2g}},$$

ou encore :

$$z = m^2\rho^4;$$

la méridienne de la surface est alors une parabole du quatrième degré.

93. Conduite faisant communiquer deux réservoirs. — S

On prend $AB = \frac{U^2}{g}$; BC est la ligne des niveaux piézométriques;

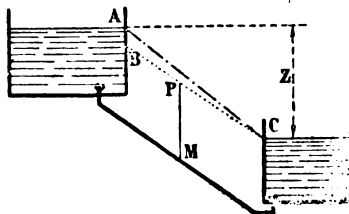


FIG. 370.

on lui substitue souvent la droite AC qui en diffère relativement peu lorsque la conduite a une certaine longueur. Pour une vitesse d'un mètre à la seconde, $AB = 0,10$ seulement.

PROBLÈME. — Deux réservoirs, présentant une différence de niveau de 10 mètres, sont reliés par une conduite de 1 kilomètre de long. Calculer le diamètre de cette conduite pour qu'elle débite 500 litres à la seconde.

Dans une première approximation, on prend :

$$J = \frac{10}{1000} = 0,01;$$

pour cette pente et $Q = 500$ litres, l'abaque Lévy accuse :

$$D = 0,59, \quad U = 1,81;$$

ce qui donne :

$$\frac{U^2}{g} = \frac{3,28}{9,81} = 0,33.$$

Dans une seconde approximation, on fait :

$$J = \frac{9,67}{1000} = 0,0097;$$

l'abaque indique : $D = 0,60$; on voit que la correction est très faible.

Proposons-nous maintenant de calculer le temps nécessaire pour faire passer un volume d'eau déterminé V du premier réservoir dans le second, en supposant que les niveaux ne restent pas constants.

Appelons :

S, S' , les aires des sections horizontales des réservoirs; S pour le supérieur, S' pour l'inférieur;

ω , l'aire de la section transversale de la conduite;

z, z' , les niveaux de l'eau dans les réservoirs à l'époque t , rapportés au radier du bassin inférieur;

z_0, z_1 , les niveaux initial et final dans le réservoir R ;

z'_0, z'_1 , les niveaux initial et final dans le réservoir R' ;

T , le temps cherché.

On a d'abord :

$$V = S(z_0 - z_1),$$

équation qui détermine z_1 lorsque V, S, z_0 sont connus.



FIG. 371.

On a ensuite comme au paragraphe 92 :

$$\mu\omega\sqrt{2g}\sqrt{z-z'}dt = -Sdz; \quad (1)$$

et aussi :

$$Sz + S'z' = Sz_0 + S'z'_0 = H; \quad (2)$$

cette dernière équation, dont nous représentons le second membre constant par H , exprime que le volume d'eau perdu par le réservoir R est égal au volume reçu par R' .

De l'équation (2), on déduit :

$$z' = \frac{H - Sz}{S'};$$

transportant dans (1), il en résulte :

$$\frac{\mu\omega\sqrt{2g}}{\sqrt{S'}} \sqrt{(S + S')z - H} dt = -Sdz;$$

les variables se séparent, ce qui donne :

$$T = \frac{S\sqrt{S'}}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{z_1}^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{(S + S')z - H}};$$

l'intégration est immédiate :

$$T = \frac{2S\sqrt{S'}}{\mu\omega\sqrt{2g}(S + S')} \left[\sqrt{(S + S')z_0 - H} - \sqrt{(S + S')z_1 - H} \right].$$

APPLICATIONS. — Au réservoir de Ménilmontant, à l'occasion d'un déversement de 3.000 mètres cubes d'eau de Dhuis dans l'un des compartiments inférieurs, nous avons :

$$\left. \begin{array}{l} S = 10.000^{\text{m}^2} \\ S' = 4.055^{\text{m}^2} \\ z_0 = 12,50 \\ z'_0 = 3,20 \\ z_1 = 12,20 \end{array} \right\} \text{ d'où } \left. \begin{array}{l} S + S' = 14.055^{\text{m}^2} \\ H = 137.975 \\ (S + S') z_0 = 175.687 \\ (S + S') z_1 = 171.752 \end{array} \right\}$$

La communication ayant 0^m,40 de diamètre et 9^m,80 de longueur, on a :

$$\omega = 0^{\text{m}^2},1257, \quad \frac{9,80}{0,40} = 25 ;$$

et, d'après le tableau du paragraphe 84, $\mu = 0,57$.

La formule précédente devient, avec ces données :

$$T = \frac{20000 \times \sqrt{4055}}{0,57 \times 0,1257 \times 4,43 \times 14055} \left(\sqrt{37712} - \sqrt{33777} \right);$$

effectuant les calculs :

$$T = \frac{20000 \times 63,65 \times 10,30}{0,317 \times 14055} = 45' \text{ environ.}$$

Le déversement a duré effectivement quarante-huit minutes.

Remarque I. — Si les réservoirs sont à des altitudes assez peu différentes pour que le plan d'eau puisse devenir le même dans les deux, autrement dit si les réservoirs peuvent se niveler, l'époque θ de l'équilibre s'obtient en faisant dans la formule : $z_1 = z_1'$, d'où $H = (S + S') z_1$ et $(S + S') z_0 - H = S' (z_0 - z_0')$; on trouve :

$$\theta = \frac{2SS' \sqrt{z_0 - z_0'}}{\mu \omega \sqrt{2g} (S + S')}.$$

Remarque II. — On traiterait de la même façon le cas de S et S' variables, et celui où le réservoir R serait alimenté par une dérivation y apportant Q mètres cubes par seconde.

Le mouvement du plan d'eau dans les deux réservoirs est uniformément varié ; mais, si l'on cherche à exprimer la loi d'élévation de ce plan dans le réservoir R' , lorsque R reçoit une dérivation, on se heurte à une insurmontable difficulté d'intégration.

94. Prise d'eau sur une conduite de refoulement. — Une usine élévatoire A , reliée à un réservoir R par une conduite, refoule dans ce réservoir un volume d'eau Q par seconde. On ouvre une prise d'eau B , qui absorbe q mètres cubes, pour alimenter un second réservoir R' placé à un niveau inférieur au premier. L'ouverture de la prise d'eau produit une chute du niveau piézométrique à l'usine, et l'on demande de cal-

culer la diminution qui en résulte sur le travail des chutes en eau montée.

Désignons par :

D , le diamètre de la conduite;

s , la distance AB ;

s' , la distance BD ;

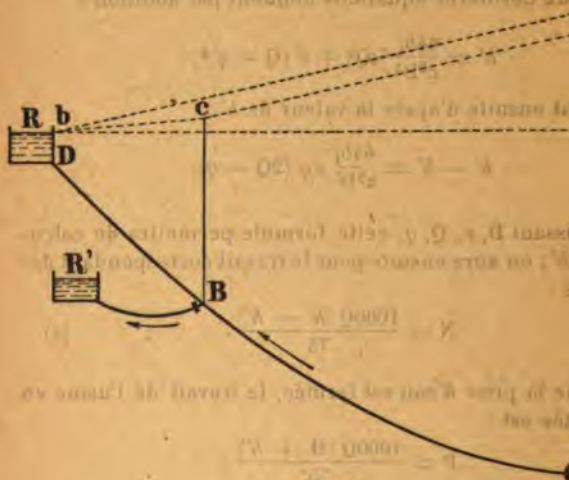


Fig. 372.

$H + h'$, la hauteur manométrique Am lorsque la prise est fermée;

$H + h''$, cette hauteur An quand la prise est ouverte

h , la cote du niveau piézométrique au point B par rapport à l'horizontale ab .

Lorsque le point c est sur ab , la perte de charge h est et la prise d'eau B absorbe la totalité du débit de la conduite AB .

Quand la prise d'eau est fermée, la formule de Darcy entre l'usine et le réservoir R :

$$h' = \frac{64 l_1 (s + s') Q^2}{\pi^2 D^5}.$$

Quand la prise est ouverte, on a sur le tronçon AB :

$$h' - h = \frac{64b_1 s Q^2}{\pi^2 D^5},$$

et sur le tronçon BD :

$$h = \frac{64b_1 s' (Q - q)^2}{\pi^2 D^5}.$$

Les deux dernières équations donnent par addition :

$$h' = \frac{64b_1}{\pi^2 D^5} [sQ^2 + s' (Q - q)^2];$$

on obtient ensuite d'après la valeur de h' :

$$h' - h' = \frac{64b_1}{\pi^2 D^5} s' q (2Q - q).$$

Connaissant D, s', Q, q , cette formule permettra de calculer $h' - h'$; on aura ensuite pour le travail correspondant des machines :

$$N = \frac{1000Q (h' - h')}{75}. \quad (\alpha)$$

Lorsque la prise d'eau est fermée, le travail de l'usine en eau montée est :

$$P = \frac{1000Q (H + h')}{75};$$

quand la prise d'eau est ouverte, le travail devient :

$$P' = \frac{1000Q (H + h')}{75};$$

la diminution du travail est donc :

$$P - P' = \frac{1000Q (h' - h')}{75};$$

c'est précisément la valeur de N .

Si l'on a $q = \frac{Q}{2}$, il en résulte :

$$h' - h' = \frac{3 \times 64b_1 s'}{\pi^2 D^5} q^2. \quad (\beta)$$

Lorsque $q = Q$, le point c est sur ab , le réservoir B d'être alimenté, et la hauteur manométrique à l'usine trouve diminuée de

$$h' - h'' = \frac{64b_1 s' Q^2}{\pi^2 D^5},$$

c'est la perte de charge sur la partie BD du tuyau de l'usine.

EXEMPLE. — A Paris, la conduite de 0,809 de Saint-Mandé relève les eaux de la Marne à Ménilmontant (cote 100,20), pour la prise d'eau de 0,500 établie rue de Bagnolet, à 750 mètres de Ménilmontant, et qui alimente le réservoir de Charonne (cote 100,20). Cette conduite de 0,800 débite normalement 400 litres par seconde. Quand on en dérive la moitié vers le réservoir inférieur de Charonne, il résulte à l'usine un abaissement de la charge manométrique qui se calcule par la formule (β) :

$$h' - h'' = \frac{3 \times 64b_1 \times 750}{\pi^2 \times 0,80^5} \times 0,200^2 = 0,66.$$

La diminution correspondante du travail des machines est d'après (α) :

$$N = \frac{1000 \times 0,400 \times 0,66}{75} = 3^{\text{ch}}, 52.$$

Si l'usine élévatrice était reliée directement au réservoir de Charonne par une conduite de 0,500 dans laquelle refouler une machine spéciale, l'économie sur le travail en eau montée serait de 50 chevaux environ.

95. **Prise d'eau alimentée par deux réservoirs.** — Soit une prise d'eau avec robinet, placée sur la conduite qui fait communiquer les deux réservoirs à niveaux constants R et R' ; posons $DM = s$, $KM = s'$.

Tant que le robinet reste fermé, AC est ligne des hauteurs piézométriques, et le réservoir R envoie à R' un volume Q déterminé par l'équation de Darcy :

$$Q = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{z D^5}{b_1 (s + s')}};$$

on tire, en effet, de la formule du numéro 84, en observant que $J = \frac{z}{s + s'}$:

$$Q = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{J D^5}{b_1}} = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{z D^5}{b_1 (s + s')}}.$$

Si l'on ouvre le robinet M de façon à ce qu'il débite q litres par seconde, le niveau piézométrique s'abaisse jusqu'en m , la ligne des niveaux piézométriques devient AmC; le réservoir R continue à recevoir de l'eau, mais en quantité moindre que tout d'abord.

Lorsqu'on augmente le puisage par l'ouverture graduelle du robinet, la pression sur l'orifice M va en décroissant, et,

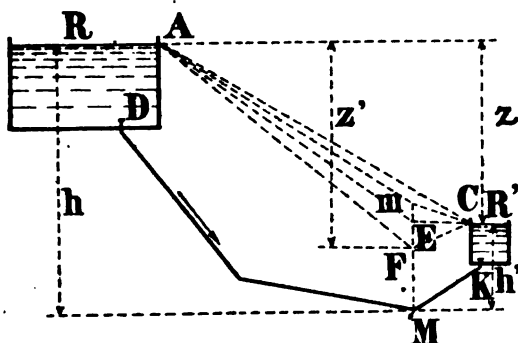


FIG. 373.

Quand le niveau piézométrique parvient en E sur l'horizontale du point C, le débit q correspond à l'équation

$$q = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{z D^5}{b_1 s}};$$

à ce moment l'équilibre s'établit entre la prise d'eau et le réservoir R' qui cesse de recevoir l'eau.

Pour un puisage encore plus considérable faisant descendre le niveau piézométrique en F, la ligne des niveaux piézométriques prend la position AFC, et les deux réservoirs concourent à l'alimentation du robinet M dont le débit est réglé par la formule :

$$q = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{z'D^3}{b_1 s}} + \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{(z' - z) D^3}{b_1 s'}};$$

on pourrait le calculer connaissant D, s, s', z, z' , ou déterminer s' en fonction de q .

Avec la même charge z' , le réservoir R seul ne fournirait en M qu'un volume :

$$q' = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{z' D^5}{b_1 s}};$$

on reconnaît ainsi l'utilité du second réservoir qui apporte un supplément :

$$q' = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{(z' - z) D^5}{b_1 s'}}.$$

Ce supplément sera très appréciable, même avec une faible charge, pourvu que R' soit voisin de M.

Lorsque le robinet est ouvert en plein, que la pression en M tombe à zéro, l'écoulement s'effectue à plein tuyau et le débit atteint son maximum ; on a alors :

$$q = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{h D^5}{b_1 s}} + \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{h' D^5}{b_1 s'}}.$$

Ces formules, fort compliquées à l'aspect, se calculent rapidement avec les tables ou les abaques ; chaque terme s'évalue séparément. On obtiendrait d'ailleurs des relations analogues en partant des formules de Flamant ou de Lévy, etc.

EXEMPLE. — Supposons que la conduite DK ait 2 000 mètres de long, 0^m,20 de diamètre, avec une différence de niveau de 10 mètres. Le robinet est placé à 100 mètres du second réservoir. Les cotes respectives des réservoirs et du robinet sont indiquées sur la figure 374.

Lorsque le robinet est fermé, la perte sur la conduite vaut :

$$\frac{40}{2000} = 0,005;$$

cette perte et le calibre de 0^m,20 correspondent à un débit de 26 litres par seconde ; c'est le volume d'eau reçu par R'.

Si l'on ouvre le robinet de façon que le niveau piézométrique descende en E, le réservoir R' cesse de recevoir de l'eau et le robinet N absorbe la totalité du débit. Dans ce cas, la perte par mètre de long de DM vaut :

$$\frac{40}{1900} = 0,0052;$$

le robinet débite 27 litres par seconde.

Lorsque le robinet est ouvert en plein, que la pression en M tombe à zéro, les deux réservoirs concourent à son alimentation et l'apport de R' est prépondérant.

Sur DM, la perte par mètre égale :

$$\frac{20}{1900} = 0,0105;$$

sur KM, la perte vaut :

$$\frac{10}{100} = 0,10.$$

Ces chiffres et l'abaque Flamant montrent que le grand réservoir envoie à la prise d'eau M 40 litres par seconde, le petit réservoir 140 litres. Le robinet débite donc au total 180 litres; s'il n'était desservi que par le réservoir R, son débit ne dépasserait

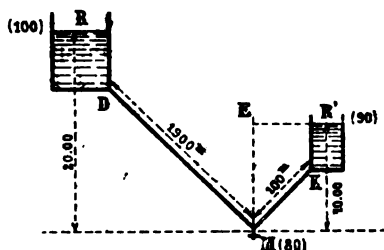


FIG. 374.

pas 40 litres. Ces volumes sont évidemment des maxima; dans la pratique, le service de route intervient et les niveaux des réservoirs ne restent pas constants.

Les réservoirs d'extrémité, tels que R', constituent donc un excellent moyen pour augmenter momentanément le débit des conduites et des robinets de puisage installés dans leur voisinage, question qui est de la plus haute importance pour les grandes distributions, dans les régions éloignées du réservoir, où les pertes de charge sont considérables, et aussi dans certains établissements particuliers : bains, lavoirs, etc..., où la consommation d'eau varie dans des limites extrêmement étendues suivant les heures de la journée.

Supposons, par exemple, que, dans un établissement de bains consommant 150 mètres cubes par jour, le branchement ne puisse fournir que 2 litres à la seconde; comme consommation totale, ce débit sera suffisant, puisque l'on recueillerait plus de 170 mètres cubes par jour; mais il ne le sera plus aux heures où le public affluera et où il faudra remplir simultanément plusieurs baignoires ou plusieurs chaudières. On remédie à cet inconvénient par l'installation d'un réservoir de secours qui s'empli pendant le chômage des robinets et leur permet ensuite de débiter de grandes masses d'eau à la fois.

Un autre avantage de ces réservoirs, c'est de ne pas faire souffrir les établissements qui en sont pourvus d'une courte interruption de service, par suite de réparations sur la conduite publique.

ABAQUES

93. L'extension considérable prise depuis quelques années par les méthodes de calcul graphique, imaginées par Lalanne, devait suggérer l'idée de remplacer les tables numériques par des abaques. Disons d'ailleurs qu'à ce point de vue l'art de l'ingénieur est beaucoup redevable à M. d'Ocagne, qui a généralisé les procédés de Lalanne et créé lui-même de nouvelles méthodes pratiques¹.

L'abaque de M. Collignon, que l'on trouve à la fin de son *Traité d'hydraulique*, est construit dans le système anamorphosé de Lalanne, avec coefficients de Darcy (tuyaux neufs); on le consultera utilement pour les diamètres supérieurs à 0,50.

Les abaques de l'album d'Aubrives sont également construits dans le système de Lalanne, droites et courbes cotées, avec la formule de M. Vallot; mais la forme monôme de cette formule permet de les remplacer avantageusement par un abaque unique à points cotés. On peut en dire autant de l'abaque de M. Sauvage, construit d'après la formule de Flamant.

Les abaques de M. Dariès, établis d'après les formules de M. Flamant et de M. Lévy, et celui de M. Geslain, reposent sur une application de la méthode des points cotés de M. d'Ocagne; ces abaques donnent les valeurs de deux quelconques des variables Q, D, J, U d'une conduite à diamètre constant, en fonction des deux autres.

Nous avons quelque peu pratiqué les abaques, et nous pensons que le principal avantage de leur emploi réside dans leur simplicité; il faut écarter tout ce qui est superflu et de nature à compliquer les lectures. En outre, il est indispensable de les dessiner à une échelle assez grande, sinon l'approximation est insuffisante.

97. **Principes.** — Considérons une fonction de trois quantités arbitraires :

$$F_0(Q, D, J) = 0, \quad (E)$$

¹ M. d'Ocagne, *Nomographie*, Paris, Gauthier-Villars, 1899.

résultant de l'élimination des variables x et y entre les équations :

$$F_1(x, y, Q) = 0, \quad (I_1)$$

$$F_2(x, y, D) = 0, \quad (I_2)$$

$$F_3(x, y, J) = 0. \quad (I_3)$$

Pour chaque valeur de l'une des quantités, Q par exemple, l'équation F_1 représente dans le plan une certaine courbe que l'on peut désigner par cette valeur de Q inscrite en regard de la courbe ; une série de valeurs successives attri-

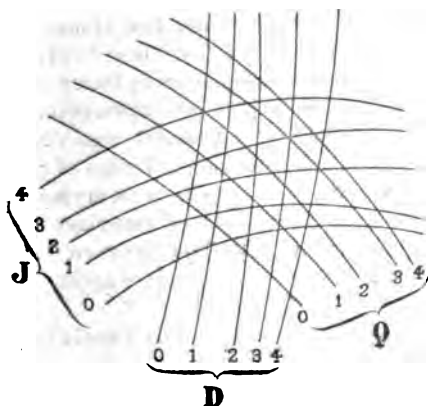


FIG. 375.

buées à la même quantité engendre, par suite, tout un réseau de courbes cotées (I_1). Pareillement des valeurs successives attribuées à D et J dans F_2 et F_3 fournissent deux autres réseaux cotés (I_2) et (I_3).

Chaque système de valeurs simultanées des quantités Q , D , J , devant satisfaire à la relation (E), on peut dire que l'abaque formé par le triple réseau de courbes (I) constitue une représentation de cette relation.

Au point de vue graphique, la dépendance entre les valeurs simultanées de Q , D , J qu'établit la relation (E) se traduit sur l'abaque par le croisement en un même point des courbes

correspondantes. Par exemple, pour $Q = 3$, $D = 3$, $J = 3$; de même, pour $Q = 2$, $D = 0$, on lit $J = 4$.

Ces préliminaires posés, on conçoit qu'étant donnée une relation quelconque telle que (E), il soit généralement

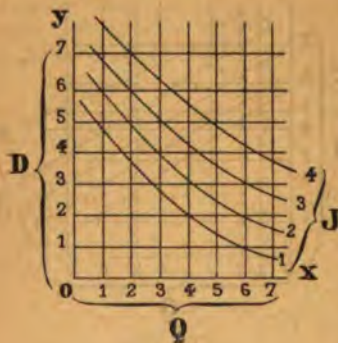


FIG. 376.

possible de trouver un réseau de courbes que (I); deux de ces réseaux, (I_1) et (I_2), par exemple, pourront toujours être pris arbitrairement; mais le troisième résultera ensuite de la détermination de Q et D par (I_1), (I_2) et E.

L'idée qui se présente naturellement à l'esprit consiste à poser:

$$x = Q, \quad y = D$$

alors (I_1) et (I_2) sont des parallèles aux axes de coordonnées, et (I_3) devient:

$$F_0(x, y, J) = 0;$$

les lignes (I_3) sont généralement des courbes, et l'abaque prend l'aspect schématique de la figure 376.

Anamorphose. — Pour la construction des abaques évidemment plus avantageux d'opérer sur des droites que sur des courbes, car le tracé de chacune d'elles n'exige que la détermination de deux points. Mais *a priori* il semble n'y avoir aucun nombre restreint d'équations (E) susceptibles d'une représentation linéaire. Par un artifice très heureux, Laplace a considérablement augmenté le nombre de ces équations.

Supposons, par exemple, que l'on ait:

$$f(Q)\psi_1(J) + \varphi(D)\psi_2(J) + \psi_3(J) = 0,$$

et posons:

$$x = f(Q), \quad y = \varphi(D);$$

les courbes (I_1) et (I_2) sont encore des parallèles aux axes de coordonnées, mais non plus équidistantes comme sur la figure 376; leur écartement dépend des fonctions f et φ ; quant au réseau (I_3), il devient:

$$x\psi_1(J) + y\psi_2(J) + \psi_3(J) = 0, (I_3)$$

les courbes correspondantes sont aussi des lignes droites. L'abaque a dans ce cas l'aspect schématique de la figure 377. C'est la substitution des droites (fig. 377) aux courbes (fig. 376) qui constitue le principe fécond de l'anamorphose imaginé par Lalanne.

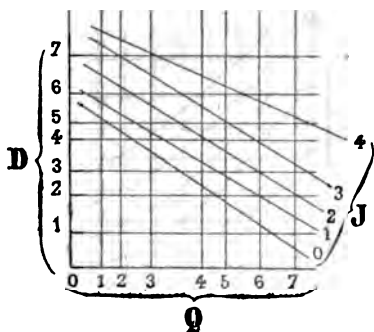


FIG. 377.

98. Abaques d'Aubrives. — Ces abaques sont au nombre de cinq, pour des débits variables de 0 à 20.000 litres par seconde, et des diamètres poussés jusqu'à 3 mètres.

De la formulé de M. Vallot:

$$D = 0,324 \left(\frac{Q}{\sqrt{J}} \right)^8, \quad (E)$$

on déduit, en posant

$$j = \sqrt{J}; \quad (I_2)$$

$$D = 0,324 \left(\frac{Q}{j} \right)^8; \quad (E')$$

on a :

$$\frac{Q}{j} = \left(\frac{D}{0,324} \right)^{\frac{1}{8}}. \quad (I_2)$$

Si l'on fait choix de deux axes rectangulaires OQ et OJ, les

courbes (I_1) du débit pourront être des parallèles à OJ équidis-

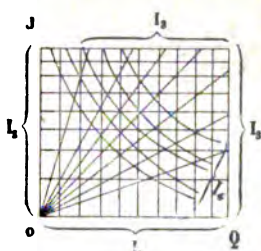


FIG. 378.

tantes; celles de la pente J, des parallèles à OQ anamorphosées suivant la loi (I_2); et, d'après (I_3), les courbes du diamètre seront des lignes droites issues de l'origine O.

Ces trois réseaux de courbes superposées constituent une première échelle fournissant les valeurs du diamètre d'après celles de la pente et du débit. Q et J étant données, on suit les lignes correspondantes des réseaux (I_1) et

(I_2) jusqu'à leur point d'intersection, et la cote de la ligne (I_3) passant par ce point fait connaître la valeur de D.

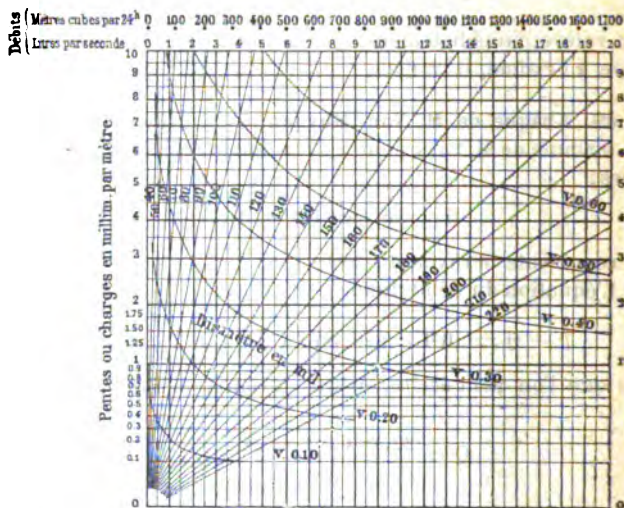


FIG. 379.

Pour déterminer les courbes de la vitesse, observons que :

$$U = \frac{4Q}{\pi D^2}; \quad (\gamma)$$

éliminant D à l'aide de (E'), il vient :

$$U = \frac{4Q}{0,324^2 \pi \left(\frac{Q}{J}\right)^{\frac{3}{4}}} = \frac{4}{0,324^2 \pi} Q^{\frac{1}{4}} J^{\frac{3}{4}},$$

ce que l'on peut écrire :

$$QJ^3 = \frac{0,324^8 \pi^4}{256} U^4. \quad (I_4)$$

Le réseau (I₄) est composé de quartiques qu'il faut construire par points.

La figure 379 représente l'un des abaques en question. Pour :

$$D = 0,150, \quad J = 0^{\text{mm}},90,$$

on relève immédiatement : $Q = 4$ litres ; puis, par interpolation à l'estime, $U = 0,23$.

99. Abaque de M. Van Muyden. — Il est établi d'après la formule de M. Lévy pour les conduites légèrement incrustées :

$$U = 20,5 \sqrt{RJ(1 + 3\sqrt{R})};$$

R représente le rayon du tuyau.

L'équation du débit donne :

$$Q = \pi R^2 U = 20,5 \pi R^2 \sqrt{RJ(1 + 3\sqrt{R})},$$

ce que l'on peut écrire, en introduisant le diamètre $D = 2R$:

$$Q = \frac{20,5\pi}{\sqrt{2^3}} \sqrt{1 + 3\sqrt{R}} \sqrt{D^3 J},$$

encore, en appelant K une fonction du rayon,

$$Q = K \sqrt{D^3 J}. \quad (E)$$

Prenons les logarithmes des deux membres, il vient :

$$\log Q = \log K + 2,5 \log D + 0,5 \log J. \quad (E')$$

Si l'on pose :

$$x = \log K + 2,5 \log D,$$

$$y = 0,5 \log J,$$

il en résulte :

$$x + y = \log Q.$$

Les lignes du diamètre sont des parallèles à oy anamorphosées suivant la loi (I₁); celles de la perte de charge, parallèles à ox également anamorphosées; et, d'après les lignes du débit sont des droites perpendiculaires à la bissectrice du premier quadrant.

L'abaque en question est reproduit planche I. Pour $J = 0^{\text{mm}},26$ et $Q = 28$ litres, on relève $D = 0,40$; pareillement pour $J = 1$ millimètre et $D = 0,80$, on lit $Q = 350$ litres.

100. Abaques à points cotés. — Soient Au et Bv deux axes parallèles séparés par une distance AB ; si deux ordonnées variables $AC = u$, $BD = v$, satisfont constamment à la relation linéaire :

$$z = \lambda u + \mu v, \quad (a)$$

λ , μ , z désignant des constantes, la droite CD pivote autour d'un point fixe M dont il est facile de déterminer la position.

Soient, en effet, C' et D' deux autres points pour lesquels on a :

$$z = \lambda u' + \mu v', \quad (b)$$

$AC' = u'$; $BD' = v'$; menons MH parallèle à AB ; les relations (a) et (b) donnent par différence :

$$\lambda (u - u') = \mu (v' - v),$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{u - u'}{v' - v} = \frac{CC'}{DD'} = \frac{\mu}{\lambda},$$

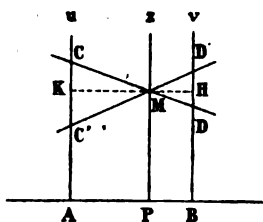
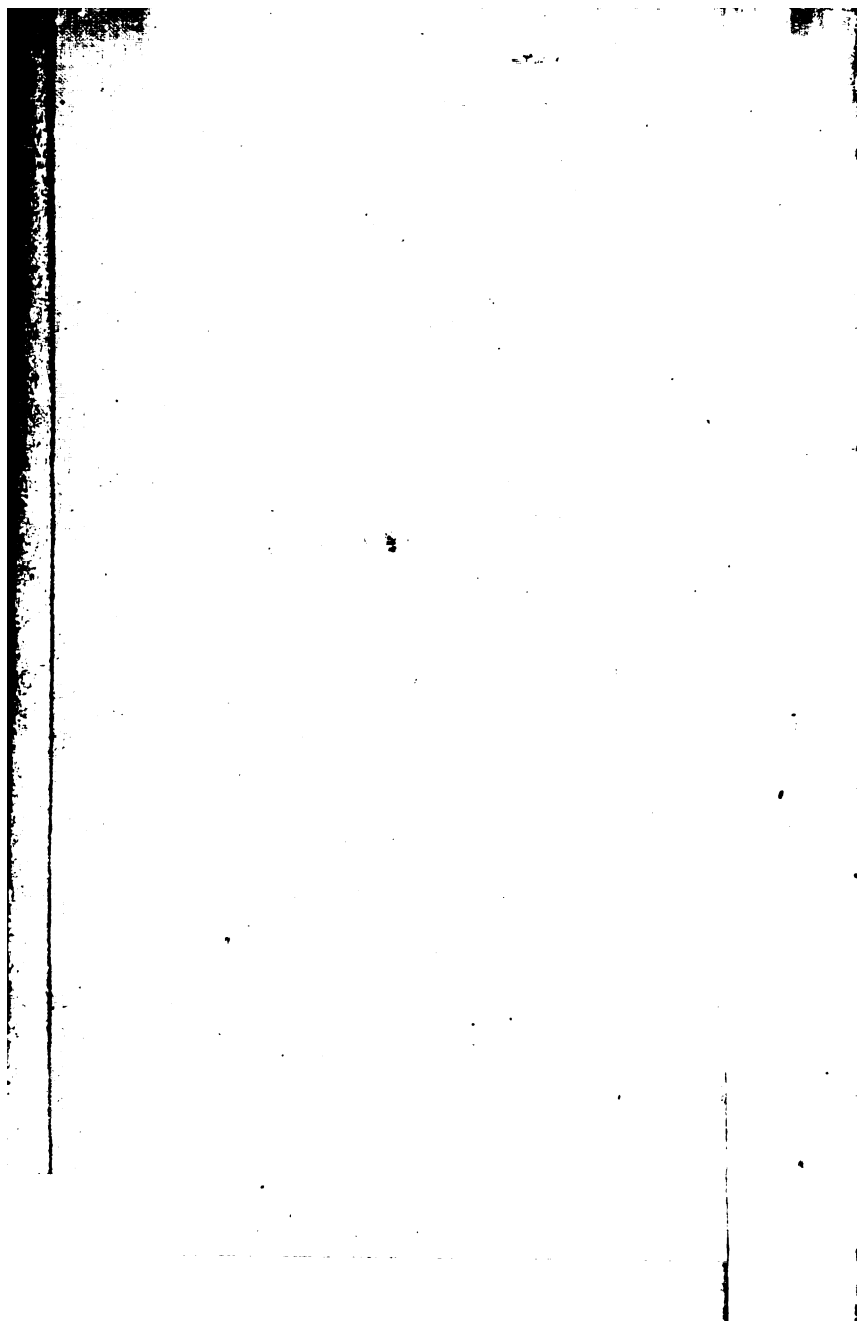


FIG. 380.

U D'APRÈS
DEN

50 53 55 57 60 63 6





et, par suite, d'après la similitude des triangles CMC' et DMD',

$$\frac{MK}{MH} = \frac{PA}{PB} = \frac{\mu}{\lambda}. \quad (c)$$

Les triangles semblables CMK et DHM donnent de leur côté :

$$\frac{CK}{DH} = \frac{MK}{MH} = \frac{\mu}{\lambda},$$

ce que l'on peut écrire :

$$\frac{u - MP}{MP - v} = \frac{\mu}{\lambda},$$

équation qui permet de calculer MP :

$$MP = \frac{\lambda u + \mu v}{\lambda + \mu} = \frac{z}{\lambda + \mu}. \quad (d)$$

La relation (c) montre que le point d'intersection M des droites CD et C'D' se trouve sur un axe fixe Pz, puisque le rapport $\frac{\mu}{\lambda}$ reste constant. La relation (d) prouve, d'autre part, que l'ordonnée MP conserve une longueur invariable, car λ, μ, z sont supposés constants. Ainsi le point M reste fixe.

Cela posé, si l'on porte respectivement sur Au, Bv, Pz des longueurs proportionnelles à $u, v, \frac{z}{\lambda + \mu}$, trois cotes quelconques satisfaisant à la relation (a) seront alignées sur une même transversale. Il suit évidemment de là que deux de ces cotes, u et v par exemple, étant données, il suffira de tirer la droite uv pour lire sur Pz la valeur de z correspondante.

101. Abaques de M. Dariès. — Ces deux abaques sont à points cotés ; leur construction dérive de la propriété géométrique précédemment démontrée ; l'un d'eux est établi d'après la formule de M. Vallot équivalente à celle de M. Lévy, l'autre d'après celle de M. Flamant.

1° L'équation de Vallot peut s'écrire (79) :

$$D = 0,324(Q^3)^{\frac{2}{16}}J^{-\frac{3}{16}};$$

pour la ramener à la forme (a), il suffit de l'anamorphoser. On obtient en prenant les logarithmes :

$$\log D = \log 0,324 + \frac{2}{16} \log Q^3 - \frac{3}{16} \log J;$$

si l'on pose :

$$\log D - \log 0,324 = d,$$

$$3 \log Q = q,$$

$$-\log J = j,$$

il en résulte l'équation linéaire, semblable à (a) :

$$d = \frac{2}{16} q + \frac{3}{16} j, \quad (p)$$

que l'on peut dès lors traduire graphiquement d'après la propriété démontrée plus haut.

Prenant deux axes parallèles Q et J, séparés par une distance arbitraire AB, on porte respectivement sur chacun d'eux, au moyen de la règle à calcul, des graduations logarithmiques cotées à l'aide des valeurs successives de Q et J; puis, par les relations (c) et (d), on détermine la position et la graduation de l'axe des D.

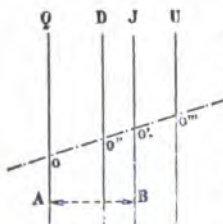


FIG. 381.

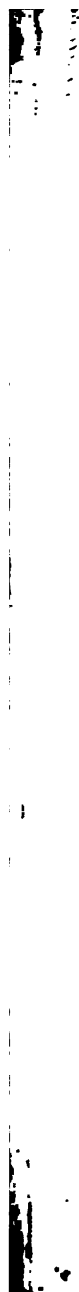
Les graduations partent de trois points correspondants O, O', O'', alignés sur une même droite; on les

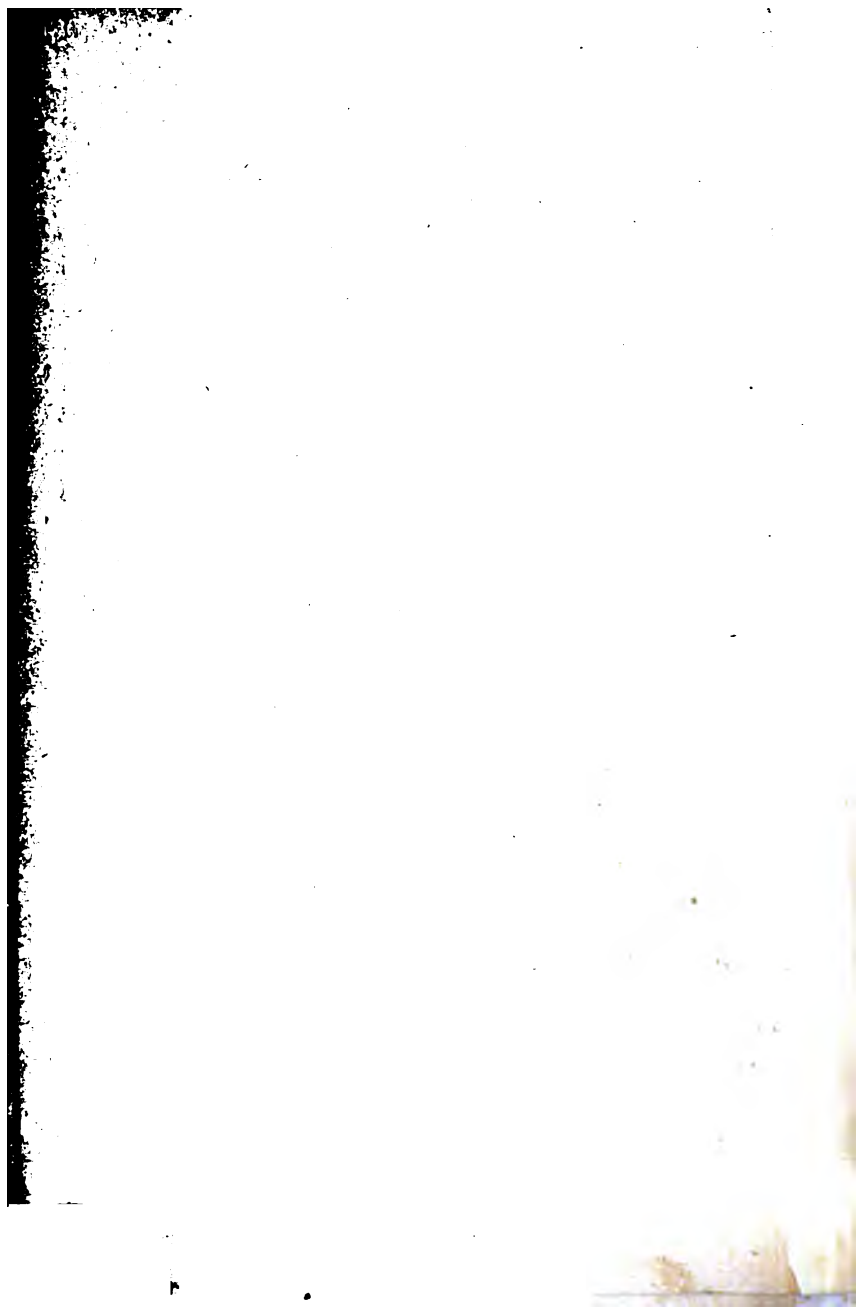
prolonge ensuite dans le sens opposé si cela est utile.

L'axe de la vitesse U se déduit identiquement, comme position et graduation, des axes Q et D, d'après la relation (γ) (98).

Le mode d'emploi de l'abaque, représenté par la planche II, dérive naturellement de ce qui précède :

Les valeurs correspondantes des quatre éléments d'une con-





duite : débit, diamètre, perte de charge, vitesse, sont alignées sur une même transversale, que la connaissance de deux quelconques de ces valeurs suffit à déterminer ; les deux autres valeurs inconnues se lisent à la rencontre de la transversale avec les axes correspondants.

Dans la pratique, on évite le tracé des transversales, qui a l'inconvénient de détériorer rapidement l'épure, en utilisant un transparent sur lequel est tracée préalablement une ligne droite.

APPLICATION. — Pour la conduite de Ferrare (84), on avait $Q = 28$ litres, $J = 0,00026$; la droite pointillée qui joint les points correspondants des échelles du débit et de la pente coupe les axes du diamètre et de la vitesse aux points : $D = 0,40$, $U = 0,23$: ce sont les résultats fournis par les tables.

2° La formule de M. Flamant peut s'écrire, après avoir éliminé la vitesse :

$$D = 0,251 Q^{\frac{7}{19}} J^{-\frac{4}{19}} ;$$

cette relation est analogue à celle de M. Vallot, de sorte qu'on peut la traduire graphiquement d'après les mêmes principes. L'abaque est représenté planche III.

APPLICATIONS. — Les eaux des sources de Vogelsberg sont amenées à Francfort-sur-le-Mein, au réservoir d'Aspenhainer Kopf, par une conduite en fonte de 0^m,36 de diamètre, de 16.750 mètres de long, calculée pour un débit de 115 litres à la seconde, ou 9.936 mètres cubes par jour.

La droite déterminée par les deux éléments $D = 0,36$, $Q = 115$ litres, rencontre l'échelle de la pente au point $J = 0,0042$; ce qui donne pour une longueur de 16.750 mètres :

$$0,0042 \times 16750 = 70^m,35.$$

La charge effective est de 76 mètres.

Pour les données :

$$D = 0,36, \quad J = \frac{76}{16750} = 0,0046 ;$$

l'abaque Vallot indique seulement $Q = 96$ litres, et les tables de Darcy (tuyaux vieux) : $Q = 88$ litres.

Les branchements des bouches de lavage du service des eaux de Paris ont 0^m,027 de diamètre, et leur débit est fixé à 1^l,8 par

seconde, ou 108 litres à la minute. L'abaque accuse po
données :

$$J = 0,68, \quad U = 3,20.$$

Un branchement de 6 mètres de long, ce qui est ord
absorbe donc plus de 4 mètres de charge.

102. **Abaque de M. Geslain.** — La formule de M. G
est de la forme générale :

$$U = \lambda D^a J^b,$$

mais on la met facilement sous la forme équivalente :

$$D = \lambda' Q^a J^b;$$

on peut alors la traduire en abaque d'après la méthod
points cotés (100).

En réalité, l'épure est quadruple planche IV, car elle r
aux quatre natures de parois considérées par l'auteur
Le mode d'emploi est identique à celui des abaqu
M. Dariès.

103. **Extension de la méthode des points cotés.** — Cons
l'expression à quatre variables :

$$z = au + bv + cw,$$

a, b, c désignant des constantes; faisons choix de trois
parallèles Au, Bv, Cw , définis par leurs abscisses $OA = x, O$
 $OC = y$. Si l'on cherche les coordonnées $OD = x, DQ =$
point d'application Q de la résultante des forces parallèles a
appliquées aux trois points M, N, P , dont les cotes var
 $AM = u, BN = v, CP = w$ satisfont à la relation précéden
obtient les équations :

$$(a + b + c)x = ax + b\beta + c\gamma, \quad (a + b + c)y = au + bv$$

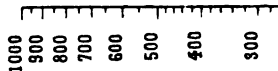
d'où l'on déduit :

$$x = \frac{ax + b\beta + c\gamma}{a + b + c}, \quad y = \frac{au + bv + cw}{a + b + c} = \frac{z}{a + b + c}.$$

Ces expressions indépendantes de u, v, w montrent que, lors
reste constant, le point Q ne change pas; si z varie, le lieu
point est la parallèle DQ aux autres axes.

ABAQUE POUR LE CALCUL DES CONDUITES D'EAU. d'après la formule de M. Flamant.

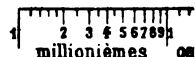
Débit
en
litres
par
seconde



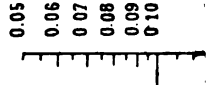
Diamètre

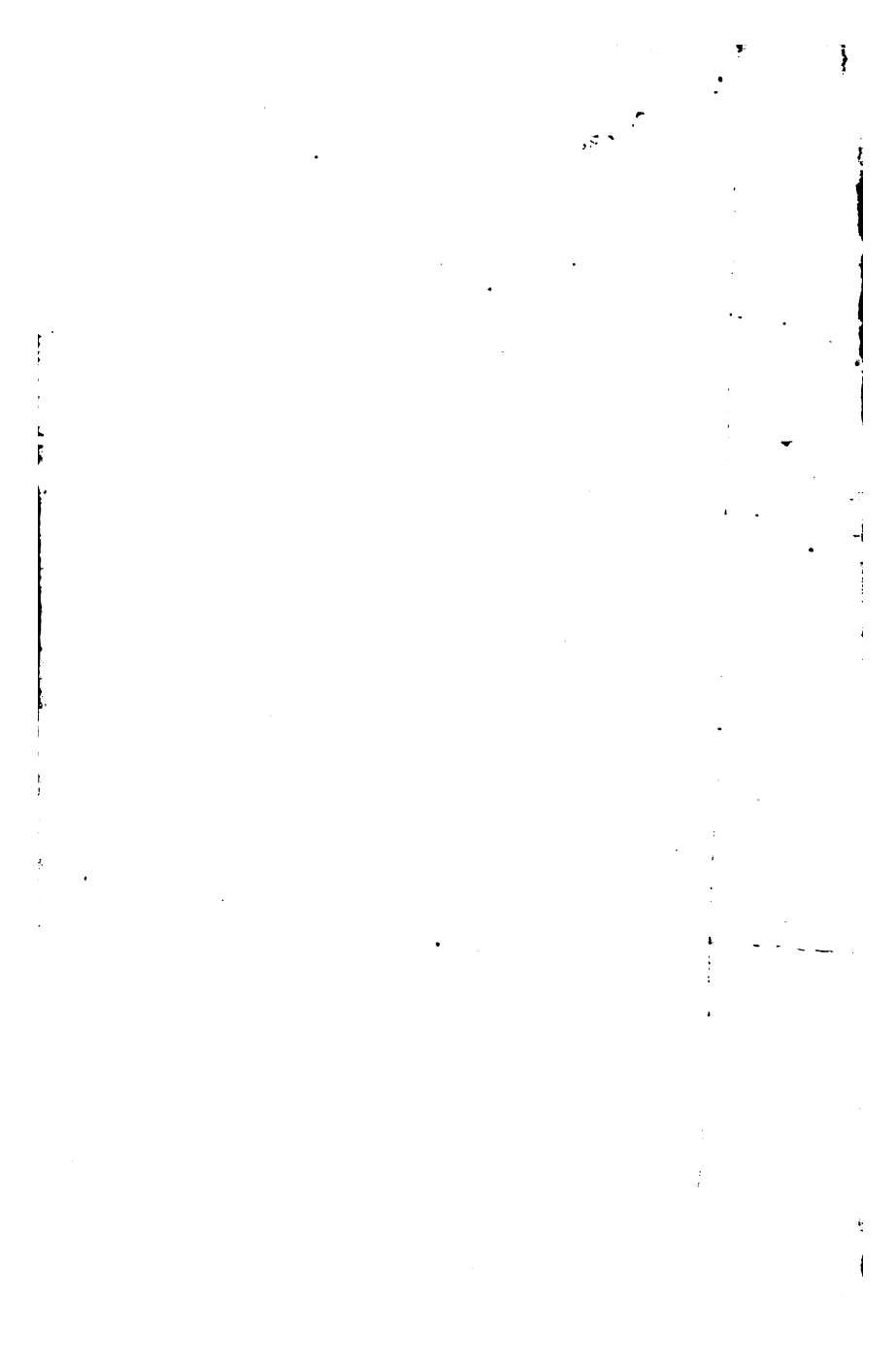


Pente



Vitesse
en
mètres
par
seconde





Dans chacun des intervalles AB, BC, AC, traçons les axes Ez_{uv} , Fz_{vw} , Gz_{uw} , répondant aux relations partielles :

$$\begin{aligned} z_{uv} &= au + bv, \\ z_{vw} &= bv + cw, \\ z_{uw} &= au + cw; \end{aligned}$$

il résulte des règles de la composition des forces parallèles que les droites MS, NT, PR se coupent précisément au point Q.

Après cela, si l'on porte sur Au, Bv, Cw des longueurs proportionnelles à u , v , w , sur Ez_{uv} , Fz_{vw} , Gz_{uw} des longueurs proportionnelles à $\frac{z_{uv}}{a+b}$, $\frac{z_{vw}}{b+c}$, $\frac{z_{uw}}{a+c}$; enfin sur Dz des segments proportionnels à $\frac{z}{a+b+c}$, il résulte de tout ce qui précède qu'étant données trois valeurs simultanées des variables u , v , w ,

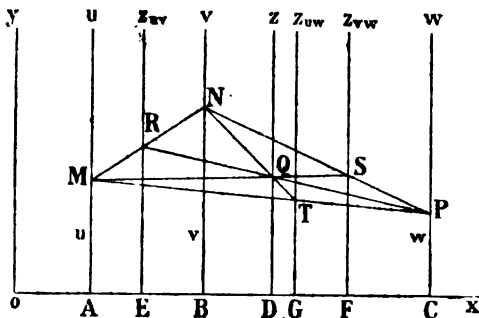


FIG. 382.

auxquelles répondent les points M, N, P, il suffira, pour avoir la valeur correspondante de z , de tirer MN, puis RP; la cote du point Q sera la valeur de z cherchée. On pourra aussi tirer NP, puis MS, ou encore MP et NT; le résultat sera toujours le même.

Telle est l'extension donnée par M. Bertrand à la méthode des points cotés; il est évident d'ailleurs que tout ce que l'on vient de dire pour une fonction de trois variables indépendantes subsiste identiquement pour des fonctions semblables d'un nombre quelconque de variables.

Lorsque la relation donnée est de la forme :

$$z = u^a v^b w^c, \quad (2)$$

l'anamorphose logarithmique :

$$\log z = a \log u + b \log v + c \log w,$$

dans laquelle on pose :

$$\log z = z_1, \quad \log u = u_1, \quad \log v = v_1, \quad \log w = w_1$$

permet de la ramener à la forme (1) :

$$z_1 = au_1 + bv_1 + cw_1.$$

Dans ce cas, les graduations des axes ne sont plus propres aux variables elles-mêmes, mais à leurs logarithmes.

104. Abaque de M. Bertrand. — Il est construit d'après la formule de M. Flamant, en considérant non plus la perte de charge par mètre J , mais la perte h sur une longueur s de conduite

$$h = Js = 0,00092s \frac{U^{\frac{7}{4}}}{D^{\frac{5}{4}}}.$$

Si on élimine la vitesse U en introduisant le débit Q , on a d'abord :

$$U = \frac{4Q}{\pi D^2}; \quad \text{d'où} \quad U^{\frac{7}{4}} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{7}{4}} \frac{Q^{\frac{7}{4}}}{D^{\frac{7}{2}}}.$$

puis :

$$h = 0,00092 \left(\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{7}{4}} s Q^{\frac{7}{4}} D^{-\frac{19}{4}} = 0,0014s Q^{\frac{7}{4}} D^{-\frac{19}{4}};$$

enfin, en explicitant le rapport au diamètre

$$D = (0,0014s)^{\frac{4}{7}} Q^{\frac{7}{19}}.$$

Cette équation et la forme (2) peuvent servir à construire un abaque suivant les principes exposés au chapitre précédent; pour cela, il suffit de prendre des longueurs arbitraires, de porter respectivement sur deux des graduations logarithmiques cotées

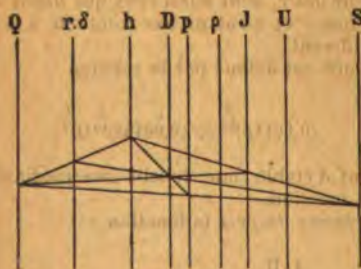
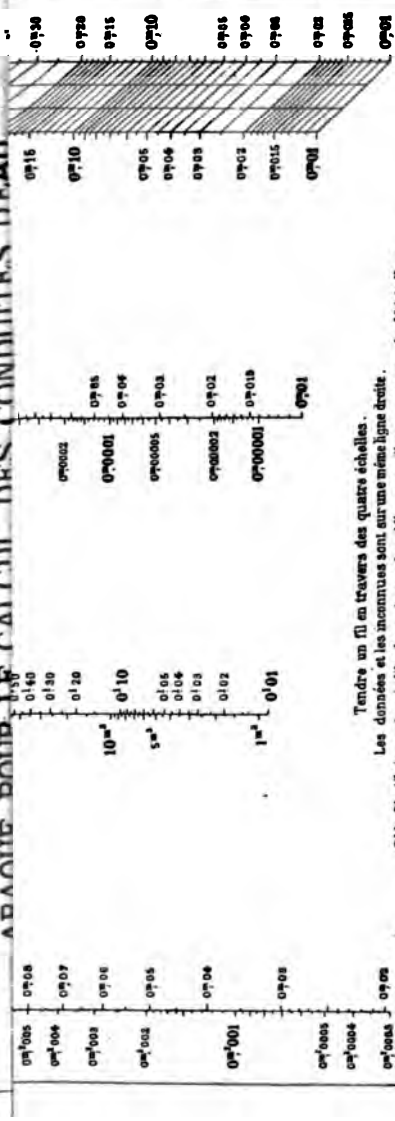


FIG. 333.

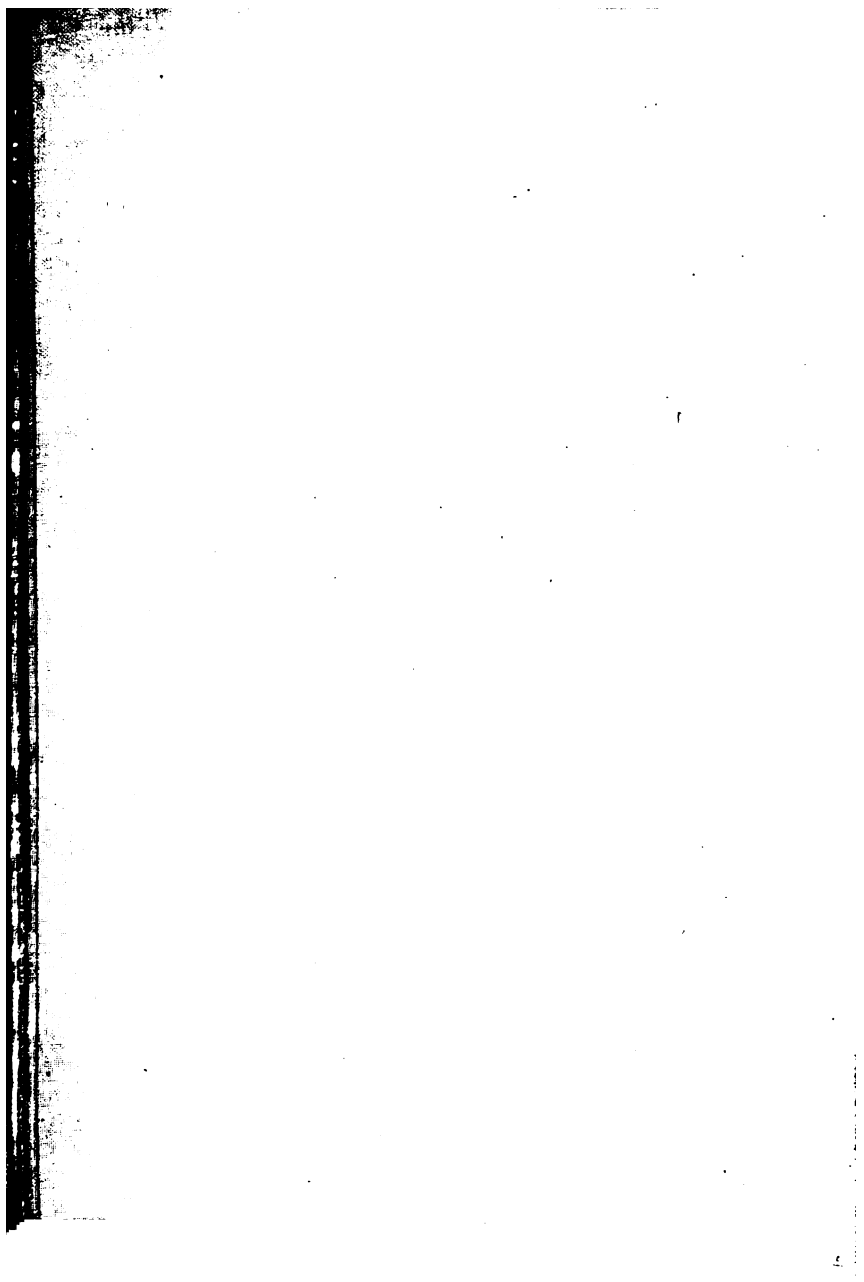
des valeurs successives de Q , h , s ; puis, à l'aide des formules, de déterminer la position et la graduation de l'axe des D . On a la relation $h = Js$, les axes h et s permettent à l'usage

PLANCHE IV

ABACUS POUR LE CALCUL DES CONDUITES D'EAU



Tendre un fil en travers des quatre échelles.
 Les données et les inconnues sont sur une même ligne droite.
 Si le fil s'éloigne plus de l'horizontale que les obliques qu'il rencontre sur la 4^e échelle, -
 ce qui a lieu lorsque $\frac{D}{86.7}$ lire la pente sur la 1^{re} colonne (parois basses) quel que soit le degré de rugosité.



d'obtenir une cinquième échelle donnant la perte de charge par mètre J ; de même, les axes Q et D , joints à la relation $U = \frac{4Q}{\pi D^2}$, permettent de tracer une nouvelle échelle fournissant la vitesse moyenne U .

Outre les variables Q , h , s , D , J , U , l'abaque donne encore les valeurs de certaines fonctions de ces variables qu'il est parfois utile de considérer.

Ainsi, M. Bertrand donne le nom de *résistance* du tuyau de longueur s et de diamètre D à la fonction :

$$r = 0,0014sD^{-\frac{19}{4}} = hQ^{-\frac{7}{4}}, \quad \text{ou} \quad r^{-\frac{4}{19}} = h^{-\frac{4}{19}}Q^{\frac{7}{19}},$$

qui caractérise l'obstacle opposé par ce tuyau à l'écoulement du liquide; c'est la perte de charge correspondant à l'unité de débit; à l'aide des échelles h et Q , rien n'est plus facile que d'établir une échelle intermédiaire donnant les valeurs de cette résistance.

Le *débouché* d'un tuyau est la fonction δ :

$$\delta = Qh^{-\frac{4}{7}}, \quad \text{d'où} \quad \delta^{\frac{7}{19}} = Q^{\frac{7}{19}}h^{-\frac{4}{19}},$$

qui caractérise la facilité avec laquelle une pression donnée h y fait circuler le liquide. L'égalité :

$$r^{-\frac{4}{19}} = \delta^{\frac{7}{19}} = Q^{\frac{7}{19}}h^{-\frac{4}{19}},$$

montre que les coefficients numériques $\frac{7}{19}$ et $-\frac{4}{19}$, qui déterminent la position de l'échelle des r , sont aussi ceux qui fixent la position de l'échelle des δ ; donc r et δ ont un axe commun, il n'y a que les graduations qui diffèrent.

La *puissance* p d'une conduite est définie par la relation :

$$p = sQ^{\frac{7}{4}}, \quad \text{d'où} \quad (0,0014p)^{\frac{4}{19}} = (0,0014s)^{\frac{4}{19}}Q^{\frac{7}{19}};$$

et les axes Q et s permettent d'établir une échelle intermédiaire donnant les valeurs de cette fonction.

Enfin, l'auteur appelle *variation du prix* la fonction p :

$$p = \frac{4}{19} \frac{D}{J},$$

que l'on est amené à considérer lorsque, dans un projet de conduites d'eau, on cherche à réaliser le minimum de dépense. L'échelle des p se déduit de celles des D et des J .

La planche V représente l'abaque complet de M. Bertrand; les neuf axes parallèles, dont trois sont doubles, portent des graduations analogues à celles de la règle à calcul.

Le mode d'emploi de l'abaque résulte de ce qui précède, il donne sur une même transversale :

- 1° Le débit, le diamètre, la perte de charge par mètre, la vitesse et la variation de prix;
- 2° Le diamètre, la longueur, la résistance, le débouché d'un même tuyau;
- 3° Le débit, la résistance (ou le débouché), la perte de charge totale entre les deux extrémités;
- 4° La longueur, le débit, la puissance d'un tuyau;
- 5° Le diamètre, la perte de charge et la puissance;
- 6° La perte de charge (h), cette perte par mètre (J), la longueur.

EXEMPLES NUMÉRIQUES. — 1° Sur une ligne droite, on lit :

$Q = 172$ litres	$\rho = 3.500$ francs
$D = 1^m,05$	$J = 0^m,000062$
$\omega = 0^m,84$	$U = 0^m,21$.

2° Sur une autre transversale, on lit de même :

$r = 2,4$	$\omega = 0^m,84$
$\delta = 0,62$	$s = 1.700$ mètres.
$D = 1^m,50$	

3° Les quatre éléments suivants se correspondent sur une même ligne droite :

$$Q = 172 \text{ litres}, \quad r = 2,4, \quad \delta = 0,62, \quad h = 0^m,106.$$

4° Il en est de même des trois éléments :

$$Q = 172 \text{ litres}, \quad p = 80, \quad s = 1.700 \text{ mètres.}$$

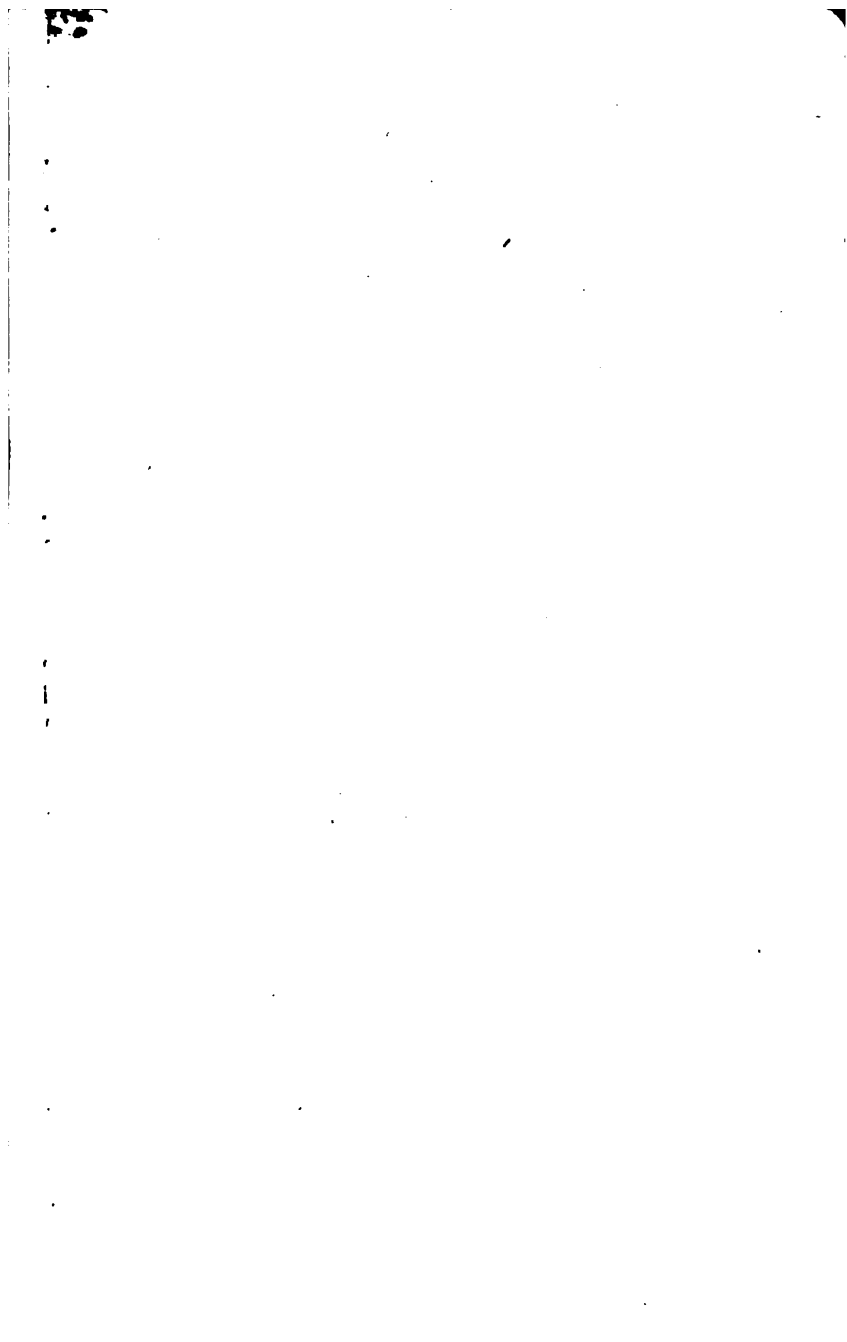
5° Et aussi des suivants :

$$D = 1^m,05, \quad h = 0^m,156, \quad p = 192.$$

6° Et enfin des trois éléments :

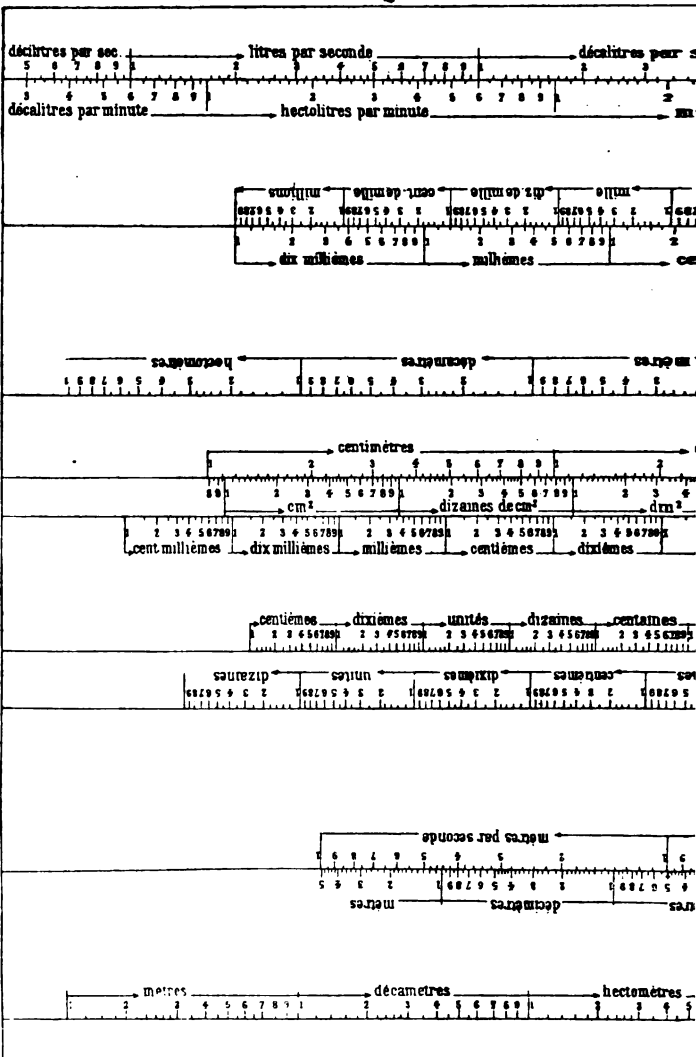
$$h = 0^m,106, \quad J = 0,000062, \quad s = 1.700 \text{ mètres.}$$

105. Applications. — Les abaques se prêtent commodément à la résolution d'un grand nombre de problèmes pratiques concernant les canalisations d'eau. Si l'échelle du dessin est suffisante, on peut, en général, compter sur une approximation de 4 à 5 0/0, ce qui suffit dans l'application.

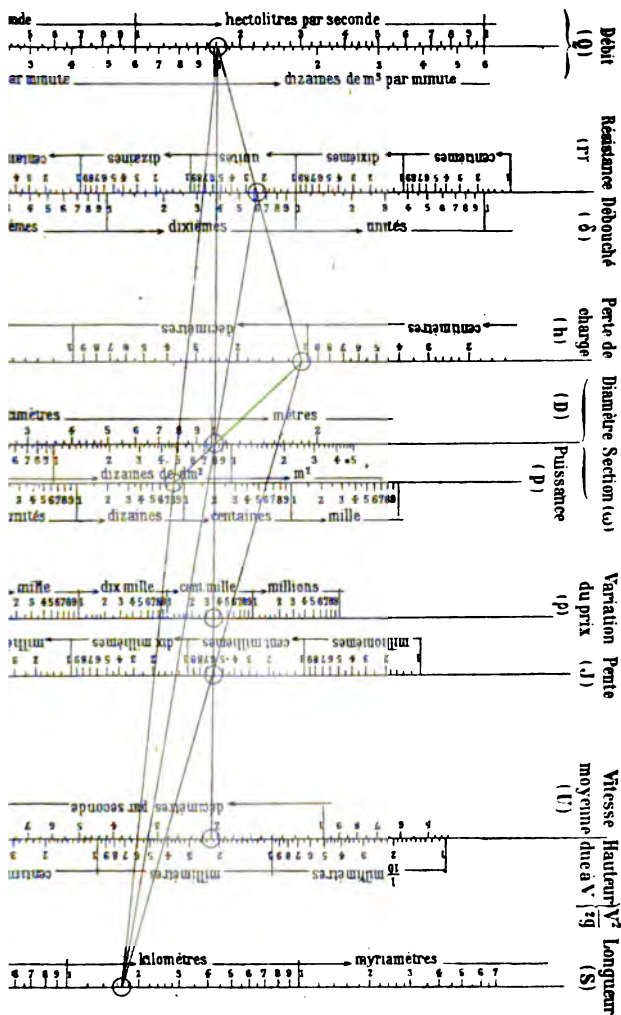


Commandant Bertrand

ABaque POUR LE CALCUL



DES CONDUITES D'EAU





1° On a vu plus haut comment on déterminait deux quelconques des éléments d'une conduite d'eau en fonction des deux autres. Pour une conduite de refoulement, nous avons démontré que le diamètre le plus économique, eu égard à la puissance du moteur et aux frais d'installation de la pompe élévatoire et de la conduite, était celui pour lequel la vitesse moyenne de l'eau approche de 0,56 par seconde (89). Avec cette vitesse et le débit par seconde, on calcule immédiatement le diamètre.

2° *Branchements.* — Les branchements des maisons se calculent comme les conduites, d'après le débit probable, la pression sur la conduite au droit de la maison, et la longueur totale du branchement. Il faut considérer que la traversée du compteur d'eau absorbe environ 2 mètres de charge et qu'un service satisfaisant exige au moins 1 mètre de pression sur l'orifice le plus élevé.

L'évaluation du débit est la question la plus délicate; on doit tabler sur la consommation maximum; on peut admettre qu'un robinet de puisage de 0",010, comme on en pose dans les cuisines, débite 20 centilitres par seconde. et que, sur un groupe de robinets alimentés par la même colonne, il peut y en avoir le tiers d'ouverts simultanément.

Par exemple, si une colonne montante dessert trente robinets de puisage, chiffre qui n'a rien d'exagéré à Paris, on tablera sur un débit de :

$$10 \times 0,20 = 2 \text{ litres par seconde.}$$

Supposons que la pression dans la rue atteigne 24 mètres, que la colonne montante ait 30 mètres de long avec compteur intercalé, et que le dernier robinet de puisage soit placé à 18 mètres du sol.

La perte de charge totale h entre la conduite publique et le robinet aura pour valeur :

$$h = 24,00 - 2,00 - 18,00 - 1,00 = 3,00;$$

ce qui donne pour la perte par mètre :

$$J = \frac{3,00}{30,00} = 0,10.$$

Cette pente et le débit de 2 litres par seconde correspondent à un diamètre $D = 0,041$ et à une vitesse $U = 1,50$.

Dans l'espèce, le diamètre de 0,041 doit être considéré comme un minimum, car le calcul ne tient pas compte des pertes de charge qui se produisent à la prise, dans les coudes et dans les étranglements.

C'est une faute que l'on commet assez fréquemment à Paris, dans les hautes maisons où les locataires sont nombreux, que d'installer un branchement d'eau trop faible. Par économie on réduit

En un point quelconque M de la conduite, la pression disponible est représentée par la hauteur M_p .

Au lieu de partir du point a , on aurait pu se fixer la cote du point e , et calculer successivement les dénivellations et, dq, cn, \dots ; ces hauteurs auraient fait connaître en sens inverse les sommets d, c, b . Les deux problèmes sont analogues.

Soit h la perte de charge totale entre les deux extrémités A et E. Si l'on voulait remplacer la conduite mixte par une conduite simple AE, de longueur l , qui amènerait au point E le même volume d'eau que la conduite mixte, en laissant disponible sur ce point une pression égale E_c , on déterminerait le diamètre de cette conduite d'après son débit et la perte de charge par mètre $\frac{h}{l}$.

Avec les formules, ce problème est résolu par l'équation de Dupuit (108) :

$$\frac{l}{D^5} = \frac{l_1}{D_1^5} + \frac{l_2}{D_2^5} + \frac{l_3}{D_3^5} + \dots,$$

qui donne lieu à des calculs passablement longs.

L'emploi des abaques réduit la solution à quelques relevés et à des multiplications très simples. Il n'est même pas nécessaire de connaître le débit effectif de la conduite mixte pour calculer la conduite équivalente; il suffit d'opérer sur les deux conduites avec le même débit, d'ailleurs quelconque.

Par exemple, une conduite mixte est constituée par 100 mètres

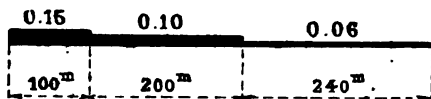


FIG. 385.

de tuyaux de 0^m,15, 200 mètres de tuyaux de 0^m,10, 240 mètres de 0^m,06. Calculer le diamètre de la conduite simple équivalente, de 540 mètres de long.

Pour un débit de 6 litres, par exemple, l'abaque Flamant accuse comme pertes par mètre :

$$\begin{array}{ll} 0,15, & J_1 = 0,0015, \\ 0,10, & J_2 = 0,0100, \\ 0,06, & J_3 = 0,115. \end{array}$$

La perte totale pour les trois conduites est donc :

$$h = 0,0015 \times 100 + 0,0100 \times 200 + 0,115 \times 240 = 29,75;$$

cette perte, répartie uniformément sur toute la longueur, donne par mètre :

$$J = \frac{29,75}{540} = 0,055.$$

Cette pente et le débit de 6 litres fournissent pour le diamètre de la conduite équivalente : $D = 0,07$. L'abaque Lévy indiquerait : $D = 0,075$.

Lorsqu'on connaît les longueurs et diamètres d'une conduite mixte, ainsi que les niveaux piézométriques aux extrémités de chaque tronçon, il est facile d'en déduire les débits successifs et, par suite, l'importance du service de route.

Soit abc la courbe piézométrique pour la conduite ABC (fig. 386).

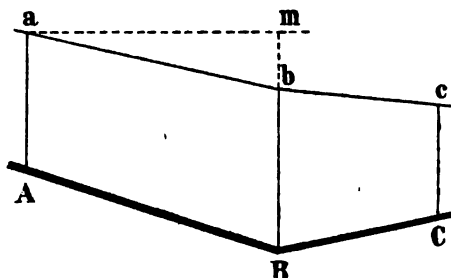


FIG. 386.

D'après les cotes des points a et b , on connaît la dénivellation bm , ce qui donne la pente par mètre le long de AB. Avec la pente et

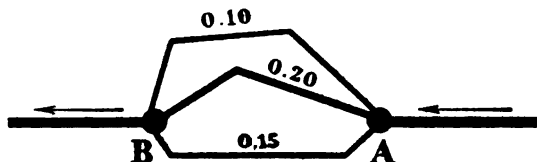


FIG. 387.

le diamètre, on calcule immédiatement le débit Q au moyen des abaques.

Répétant l'opération sur le tronçon BC, on obtient un débit Q' , et la différence $Q - Q'$ représente le service de route sur AB.

4° Répartition du débit entre plusieurs conduites.

Considérons deux tronçons d'une conduite maîtresse qui sont reliés par trois conduites intermédiaires (fig. 387).

La première a 200 mètres de long et 0^m,20 de diamètre.

La seconde a 300 mètres de long et 0^m,15 de diamètre.

La troisième a 350 mètres de long et 0^m,10 de diamètre.

Cherchons dans quel rapport se partage le débit total de la conduite maîtresse.

Avec la formule de M. Flamant, il faudrait partager le débit proportionnellement aux nombres (109) :

$$q_1 = \lambda D_1^{\frac{19}{7}} \left(\frac{h}{l_1} \right)^{\frac{4}{7}},$$

$$q_2 = \lambda D_2^{\frac{19}{7}} \left(\frac{h}{l_2} \right)^{\frac{4}{7}},$$

$$q_3 = \lambda D_3^{\frac{19}{7}} \left(\frac{h}{l_3} \right)^{\frac{4}{7}},$$

h représente la perte de charge totale entre les points A et B.

On voit que le calcul de ces formules serait, sinon difficile, au moins passablement fastidieux.

La perte de charge h étant la même pour les trois conduites, on peut faire $h = 10$ mètres, par exemple; alors pour la première conduite :

$$D_1 = 0,20, \quad J_1 = \frac{10}{200} = 0,05;$$

pour la seconde :

$$D_2 = 0,15, \quad J_2 = \frac{10}{300} = 0,033;$$

pour la troisième :

$$D_3 = 0,10, \quad J_3 = \frac{10}{350} = 0,028.$$

Les débits correspondants indiqués par l'abaque sont :

98 litres, 34 litres, 11 litres;

le débit total de la conduite se partage proportionnellement à ces nombres, c'est-à-dire à 9, 3, 1. Les résultats seraient les mêmes si l'on opérait identiquement avec une charge h différente de 10 mètres.

5^e Composition des conduites. — Dans la question précédente, on peut encore se proposer de calculer la conduite, de longueur l , qui équivaut comme débit aux trois conduites intermédiaires de 0,20, 0,10, 0,15. Faisons $l = 250$ mètres.

Soit Δ le diamètre de la conduite résultante; la formule générale qui donne la solution du problème est, d'après M. Flamant,

$$\left(\frac{\Delta^4}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{D_1^4}{4}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{D_2^4}{4}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{D_3^4}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Avec l'abaque, il suffit d'additionner les débits trouvés plus haut :

$$98 + 34 + 11 = 143 \text{ litres,}$$

et de chercher le diamètre qui fournit ce débit avec une pente :

$$J = \frac{10}{250} = 0,04.$$

On trouve :

$$\Delta = 0,23.$$

106. Répartition des vitesses. — Le problème de la répartition des vitesses dans la section transversale d'une conduite ou d'un canal a fait l'objet d'études et d'observations fort intéressantes de la part de Navier, Darcy, M. Boussinesq et de M. Bazin.

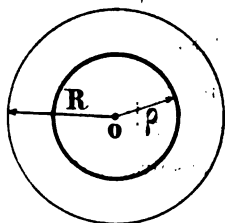


FIG. 338.

Les divers filets liquides parallèles à l'axe du tuyau ne sont pas animés d'une même vitesse; ceux qui touchent la paroi sont retardés par leur frottement contre cette paroi; les filets adjacents sont également retardés par le frottement des molécules

d'eau les unes sur les autres; de sorte que la vitesse effective va en augmentant de la périphérie au centre du tuyau.

L'hypothèse généralement admise est celle de Navier; on suppose que la masse liquide en mouvement est constituée par des couches concentriques, d'épaisseur très faible, pour chacune desquelles la vitesse est constante; au contact de deux couches consécutives, le glissement relatif des filets liquides développe un frottement qui est fonction de la vitesse.

Désignons par :

V , la vitesse du filet central, qui est maximum;

v , la vitesse du filet situé à la distance p du centre;

R , le rayon de la conduite;
 k , un coefficient numérique.

D'après les observations de M. Bazin, qui sont les plus récentes et les plus étendues, les quantités ci-dessus sont liées entre elles par la relation :

$$\frac{V - v}{\sqrt{RJ}} = k \frac{\rho^3}{R^3}. \quad (\alpha)$$

Différentions cette équation par rapport à ρ , il vient :

$$\rho^3 = - \frac{R^3}{3k \sqrt{RJ}} \frac{\partial v}{\partial \rho},$$

ce que l'on peut écrire, en multipliant par πJ :

$$\pi \rho^3 J = - 2\pi \rho J \frac{R^3}{6k \sqrt{RJ}} \frac{\partial v}{\partial \rho} = - 2\pi \rho J \frac{R^3 \sqrt{RJ}}{6k \rho} \frac{\partial v}{\partial \rho},$$

ou bien, en observant que $RJ = 2b, U^2$ (84) :

$$\pi \rho^3 J = - 2\pi \rho \left[\frac{R \sqrt{2b}}{2} \frac{R}{\rho k} U \frac{\partial v}{\partial \rho} \right].$$

Si l'on rapproche cette équation de la suivante (75) :

$$\omega J = \chi \varphi(U),$$

qui exprime l'équilibre dynamique du cylindre d'eau compris entre deux sections transversales du tuyau, distantes de 1 mètre, on voit que le facteur entre parenthèses représente précisément la résistance par unité d'aire qui se développe au contact de la couche liquide cylindrique de rayon ρ avec la couche infiniment voisine. Le frottement des deux couches est donc directement proportionnel à la vitesse relative $\frac{\partial v}{\partial \rho}$, au rayon moyen $\frac{R}{2}$ de la section d'eau, à l'étendue des surfaces en contact, et inversement proportionnel à la distance ρ de la couche considérée au centre du tuyau. La proportionnalité du frottement à la vitesse relative $\frac{\partial v}{\partial \rho}$ avait été admise par Navier et Poisson.

Pour les conduites forcées, le coefficient k reste toujours compris entre 18 et 23, et se rapproche sensiblement de 21. Le long de la paroi, $\rho = R$, de sorte que la vitesse w à la paroi a pour expression d'après (2) :

$$w = V - 21 \sqrt{RJ}.$$

On peut exprimer la vitesse moyenne U en fonction de la vitesse maximum V ou de la vitesse minimum w . En effet, le débit dQ de la couche annulaire cylindrique pour laquelle le rayon est ρ et la vitesse v égale :

$$dQ = 2\pi\rho v d\rho;$$

pour obtenir le débit total Q du tuyau, il suffit d'intégrer de 0 à R , ce qui donne :

$$Q = \pi R^2 U = 2\pi \int_0^R v \rho d\rho,$$

ou, en remplaçant v par son expression en fonction de ρ :

$$U = \frac{2}{R^2} \int_0^R \left[V - 21 \frac{\rho^3}{R^3} \sqrt{RJ} \right] \rho d\rho.$$

L'intégration est facile, on obtient :

$$U = V - 8,4 \sqrt{RJ}.$$

Si l'on pose avec Darcy $RJ = 2b_1 U^2$, il en résulte :

$$\frac{V}{U} = 1 + 11,9 \sqrt{b_1}, \quad \frac{w}{U} = 1 - 17,85 \sqrt{b_1};$$

adoptant pour b_1 la valeur moyenne 0,00036, il vient :

$$V = 1,226U, \quad w = 0,661U.$$

Les résultats de ces formules, déduites des expériences de M. Bazin sur les canaux demi-circulaires, s'accordent bien avec ceux de l'observation.

DIAMÈTRE VARIABLE

107. Équation de l'écoulement. — Le volume intérieur d'un tuyau est engendré par une aire plane, constante ou variable, qui se déplace normalement à une ligne donnée que son centre de gravité est assujéti à décrire; cette ligne est l'axe du tuyau. Nous supposons que l'axe est une courbe plane, et que le tuyau est symétrique par rapport à son plan.

Soient: $OG = s$, une portion de l'axe du tuyau mesurée à partir d'un point déterminé O ; $OG' = s + ds$; ab et $a'b'$, les traces sur le plan de l'axe des sections ω et $\omega + d\omega$ en G et G' ; ces traces déterminent par leur rencontre le centre de courbure C .

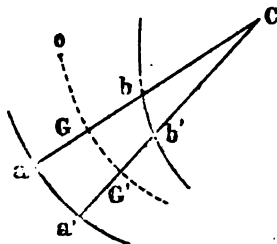


FIG. 339.

On admet que les molécules liquides situées à l'instant t dans la section ω viennent à l'instant $t + dt$ se placer dans la section $\omega + d\omega$.

Nous avons vu qu'il se développait au contact du liquide avec le tuyau une résistance au frottement (75). Si l'on appelle γ le périmètre de la section du tuyau répondant à l'arc s de l'axe, le frottement pour une tranche d'épaisseur ds se représente par le produit $\pi\gamma\varphi(U)ds$, et le travail élémentaire correspondant égale $\pi\gamma\varphi(U)dsUdt$, ou encore $m \int_{\omega}^{\omega+d\omega} \varphi(U)gds$, en appelant m la masse d'eau débitée dans le temps dt et observant que $mg = \pi\omega Udt$.

En introduisant dans l'équation des forces vives le travail total de la résistance sur une longueur l du tuyau, nous aurons (38) :

$$\frac{mU^2 - mU_0^2}{2} = mg(z_0 - z) + \frac{p_0 - p}{\pi} mg - mg \int_0^l \int_{\omega}^{\omega+d\omega} \varphi(U) ds,$$

c'est-à-dire, en divisant par mg et transposant les termes :

$$\left(z_0 + \frac{p_0}{\pi}\right) - \left(z + \frac{p}{\pi}\right) = \frac{U^2 - U_0^2}{2g} + \int_0^s \chi \varphi(U) ds. \quad (1)$$

Telle est l'équation générale de l'écoulement permanent de l'eau dans les tuyaux à diamètre variable ; la vitesse est également variable, puisqu'elle varie en raison inverse de la section ω du tuyau. On aurait pu déduire cette équation de celle de Bernoulli (40), en introduisant la perte de charge produite par le frottement de l'eau à la paroi.

Soient C et D les sommets des colonnes piézométriques en G et G' ; on a $GC = \frac{p_0}{\pi}$ et $G'D = \frac{p}{\pi}$, de sorte que le premier membre de l'équation représente la dénivellation piézométrique DE entre les deux sections ab et $a'b'$.

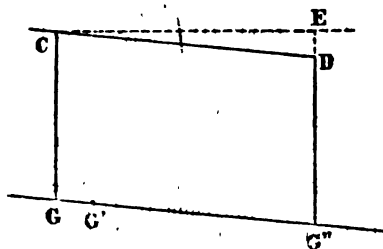


FIG. 390.

L'intégration du dernier terme s'effectuera dans chaque cas en remplaçant $\varphi(U)$ par l'une quelconque des expressions proposées pour la fonction de résistance à la paroi.

Posons avec Darcy $\varphi(U) = b_1 U^2$, le coefficient b_1 varie avec le diamètre des tuyaux ; mais pratiquement on peut le supposer constant et lui donner la valeur $b_1 = 0,00055$ pour les diamètres compris entre 0,10 et 0,50, la valeur $b_1 = 0,00026$ pour les diamètres supérieurs à 0,50, ou plus simplement faire avec Dupuit $b_1 = 0,0004$.

Des relations :

$$\chi = \pi D, \quad \omega = \pi \frac{D^2}{4}, \quad \frac{\pi D^2}{4} U = Q,$$

on déduit :

$$\chi \varphi(U) = \frac{64 b_1 Q^2}{\pi^2 D^3};$$

l'équation ci-dessus devient dès lors, en faisant sortir les constantes π , b_1 , Q , du signe somme :

$$\left(z_0 + \frac{p_0}{\pi}\right) - \left(z + \frac{p}{\pi}\right) = \frac{U^2 - U_0^2}{2g} + \frac{64b_1Q^2}{\pi^3} \int_0^1 \frac{ds}{D^5}. \quad (2)$$

Mais, le plus souvent, les vitesses U et U_0 sont assez peu différentes pour que l'on puisse, sans erreur appréciable, négliger le premier terme du second membre et poser simplement :

$$\left(z_0 + \frac{p_0}{\pi}\right) - \left(z + \frac{p}{\pi}\right) = \frac{64b_1Q^2}{\pi^3} \int_0^1 \frac{ds}{D^5}. \quad (3)$$

Avec la formule de Flamant $\varphi(U) = 0,00023 U^5 D^{-\frac{1}{2}}$, on obtiendrait l'équation analogue :

$$\left(z_0 + \frac{p_0}{\pi}\right) - \left(z + \frac{p}{\pi}\right) = 0,0014Q^2 \int_0^1 \frac{ds}{D^{\frac{1}{2}}}. \quad (3')$$

REMARQUE. — Bien que l'équation (1) soit l'expression du théorème des forces vives rigoureusement vrai pour un système de points matériels, il importe d'observer qu'elle n'a qu'un caractère approché. De ce que l'on a substitué à la vitesse effective de chaque filet liquide une même vitesse moyenne U , le premier terme du second membre de l'équation, qui représente la demi-variation de la force vive, s'est trouvé sensiblement altéré. Pour rétablir l'égalité exacte, on a l'habitude d'affecter le terme en question d'un coefficient α plus grand que l'unité, de sorte que la formule exacte doit s'écrire :

$$\left(z_0 + \frac{p_0}{\pi}\right) - \left(z + \frac{p}{\pi}\right) = \alpha \frac{U^2 - U_0^2}{2g} + \int_0^1 \frac{\alpha}{\omega} \varphi(U) ds, \quad (1')$$

A vrai dire, le coefficient α est toujours assez voisin de l'unité, puisqu'il reste compris entre 1 et 1,10, et la plupart des ingénieurs le négligent en appliquant les formules (2) ou (3).

108. Conduites mixtes. — Les tuyaux à diamètre graduellement variable ne sont pas employés d'une façon courante dans la pratique; on ne les utilise que par bouts de 0^m,40 de longueur, de forme tronconique, pour raccorder deux tuyaux de diamètres différents.

Ordinairement les conduites sont mixtes, c'est-à-dire composées de plusieurs tronçons de divers diamètres placés bout à bout ; sur chaque tronçon, plus ou moins long, le diamètre reste constant.

Soient ABC une pareille conduite ; Q, son débit. Désignons par :

$l_1, D_1,$	la longueur et le diamètre du tronçon AB ;
$l_2, D_2,$	— — — BC ;
$l_3, D_3,$	— — — CD ;
$l_4, D_4,$	— — — DE ;
.....	— — — ...

Chaque changement de diamètre amène une chute du plan de charge, de sorte que la ligne de charge présente la disposition en escalier de la figure 391 ; il en est de même de la ligne des niveaux piézométriques.

Ordinairement, dans les calculs, on néglige les petites pertes de charge telles que bg, cf, \dots , produites par les changements brusques du diamètre ; alors, pour tracer la ligne piézométrique, on détermine la pression à l'extrémité

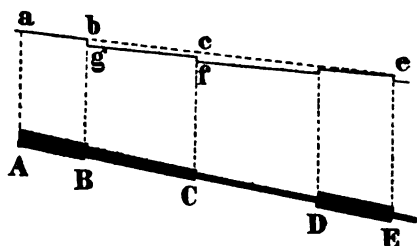


FIG 391

de chaque tronçon et on réunit tous les niveaux obtenus par une ligne polygonale.

De A en B, la perte de charge a pour expression, d'après l'équation (3),

$$\frac{64h_1Q^2}{\pi^2} \int_0^l \frac{ds}{D_1^5} = \frac{64h_1l_1Q^2}{\pi^2 D_1^5}, \quad (\beta)$$

car D_1 étant constant peut sortir du signe d'intégration.

Pareillement, de B en C, la perte de charge égale :

$$\frac{64b_1l_2Q^2}{\pi^2D_2^5},$$

et ainsi de suite; de sorte que la perte de charge totale, somme des pertes de charge partielles, est représentée par :

$$\frac{64b_1Q^2}{\pi^2} \left(\frac{l_1}{D_1^5} + \frac{l_2}{D_2^5} + \frac{l_3}{D_3^5} + \dots \right). \quad (\beta')$$

Soient l et D les dimensions d'une conduite à diamètre constant qui, avec un débit égal, produirait la même perte de charge que la conduite mixte; on doit avoir :

$$\frac{64b_1lQ^2}{\pi^2D^5} = \frac{64b_1Q^2}{\pi^2} \left(\frac{l_1}{D_1^5} + \frac{l_2}{D_2^5} + \frac{l_3}{D_3^5} + \dots \right), \quad (\alpha)$$

ce qui donne en simplifiant :

$$\frac{l}{D^5} = \frac{l_1}{D_1^5} + \frac{l_2}{D_2^5} + \frac{l_3}{D_3^5} + \dots$$

Connaissant D et les éléments du second membre, on peut calculer l , ou inversement déterminer D en fonction de l . La table XII qui donne les puissances cinquièmes du diamètre, avec leurs inverses, facilite l'application de ces formules.

EXEMPLES. — 1° Supposons que l'on veuille remplacer la conduite mixte ainsi composée :

$$\begin{array}{ll} l_1 = 700^m, & D_1 = 0,35, \\ l_2 = 2.000^m, & D_2 = 0,40, \\ l_3 = 1.100^m, & D_3 = 0,50, \end{array}$$

par une autre équivalente de 6 kilomètres de long; on aura d'après la table :

$$\frac{6000}{D^5} = 700 \times 190 + 2000 \times 98 + 1100 \times 32 = 364200;$$

par suite :

$$\frac{1}{D^5} = \frac{364200}{6000} = 60,70, \quad \text{d'où} \quad D = 0,44.$$

2° Cherchons encore à évaluer les accroissements de débit que l'on réalise en doublant le diamètre d'une conduite sur toute sa longueur, ou sur la moitié seulement.

Dans le premier cas, le débit est plus que sextuplé (§ 86).

Dans le second cas : appelons Q' le nouveau débit, D le petit diamètre, $2l$ la longueur de la conduite.

La perte de charge restant la même, on a d'après (α) :

$$\frac{64h_1 \times 2l \times Q^3}{\pi^2 D_1^5} = \frac{64h_1 Q'^3}{\pi^2} \left[\frac{l}{(2D_1)^5} + \frac{l}{D_1^5} \right],$$

ce qui donne, en simplifiant,

$$2Q^3 = Q'^3 \left(\frac{1}{32} + 1 \right) = \frac{33Q^3}{32},$$

ou bien :

$$Q' = \sqrt[3]{\frac{64}{33}} Q = 1,4Q;$$

l'accroissement du débit n'est donc que de 0,4 seulement, c'est-à-dire 15 fois moindre que celui que l'on réalise en doublant le diamètre sur toute la longueur.

Ce simple calcul montre que le débit d'extrémité d'une conduite mixte se règle en quelque sorte d'après le plus petit diamètre, lorsque le tronçon correspondant subsiste sur une certaine longueur; les autres tronçons de plus grand diamètre n'apportent qu'un faible supplément.

109. Conduites multiples. — Lorsque deux tronçons d'une conduite mixte C sont reliés, par un certain nombre de conduites secondaires m ,

n, p, \dots , de diamètres différents, on dit que la conduite C est multiple.

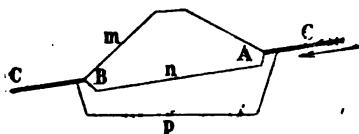


FIG. 392.

Si la longueur et le diamètre de chaque conduite m, n, p , sont connus, on peut calculer le diamètre

de la conduite unique AB, de longueur l , capable de les remplacer comme débit, en produisant la même perte de charge.

Appelons, en effet :

Q, Δ , le débit et le diamètre de la conduite AB;

l , la distance AB, et la perte de charge totale entre les deux points A et B;

l_1, q_1, D_1 , la longueur, le débit et le diamètre de la conduite m ;

l_2, q_2, D_2 , la longueur, le débit et le diamètre de la conduite n ;

l_3, q_3, D_3 , la longueur, le débit et le diamètre de la conduite p .

On a d'abord pour la conduite AB :

$$h = \frac{64 b_1 Q^2 l}{\pi^2 \Delta^5}, \quad \text{d'où} \quad Q = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{h \Delta^5}{b_1 l}}$$

et de même, pour les conduites m, n, p, \dots :

$$q_1 = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{h l_1^5}{b_1 l_1^5}},$$

$$q_2 = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{h D_2^5}{b_1 l_2^5}},$$

$$q_3 = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{h D_3^5}{b_1 l_3^5}}.$$

La somme des débits partiels $q_1 + q_2 + q_3 + \dots$ devant égaier le débit total Q , on obtient la relation :

$$\sqrt{\frac{h \Delta^5}{b_1 l}} = \sqrt{\frac{h D_1^5}{b_1 l_1^5}} + \sqrt{\frac{h D_2^5}{b_1 l_2^5}} + \sqrt{\frac{h D_3^5}{b_1 l_3^5}} + \dots$$

qui donne, après simplifications :

$$\sqrt{\frac{\Delta^5}{l}} = \sqrt{\frac{D_1^5}{l_1^5}} + \sqrt{\frac{D_2^5}{l_2^5}} + \sqrt{\frac{D_3^5}{l_3^5}} + \dots \quad (\gamma)$$

Cette relation permet de calculer Δ lorsque l est connue, ou inversement.

Si toutes les conduites ont même longueur l , l'équation se simplifie et devient :

$$\sqrt{\Delta^5} = \sqrt{D_1^5} + \sqrt{D_2^5} + \sqrt{D_3^5} + \dots \quad (\delta)$$

Ces équations se calculent rapidement avec la table XII ou les abaques.

En procédant identiquement avec la formule de M. Flamant, on obtiendrait l'équation analogue à (γ) :

$$\left(\frac{\Delta^{49}}{l^4}\right)^{\frac{1}{7}} = \left(\frac{D_1^{49}}{l_1^4}\right)^{\frac{1}{7}} + \left(\frac{D_2^{49}}{l_2^4}\right)^{\frac{1}{7}} + \left(\frac{D_3^{49}}{l_3^4}\right)^{\frac{1}{7}} + \dots \quad (\gamma)$$

APPLICATION DES FORMULES. — Il y a quelques années, le service d'eau de rivière du quartier avoisinant l'avenue Gambetta et la rue Pelleport, à Paris, était assuré par une conduite maîtresse *abc* sortant du réservoir de Belleville, qui comprenait

un premier tronçon *ac* de 0^m,25 de diamètre, suivi d'un autre *cd* de 0^m,162, auquel succédait un troisième *de* de 0,20, puis un quatrième *ef* de 0^m,10, un cinquième de 0,15, ..., etc.

Aux heures de forte consommation, de sept heures à dix heures du matin, et de une heure à trois heures de l'après-midi, l'alimentation laissait beaucoup à désirer, ce qui donnait lieu à de nombreuses plaintes très légitimes. Le débit imposé à la conduite était trop considérable pour son diamètre; il en résultait une perte de charge énorme, et l'eau ne montait plus aux étages des maisons.

On a remplacé le tronçon

de 0^m,162 de diamètre par un autre de 0^m,20 et posé une seconde conduite de 0^m,15 à côté de celle de 0^m,10; l'amélioration a été très sensible, maintenant le service fonctionne à la satisfaction de tous les abonnés.

Pour mesurer l'importance de l'amélioration réalisée par les nouvelles conduites, nous évaluerons l'accroissement apporté au débit sous une même perte de charge, puis, à débit égal, la diminution subie par la perte de charge.

Le tronçon *cd* de 0^m,162 de diamètre avait 310 mètres de long.

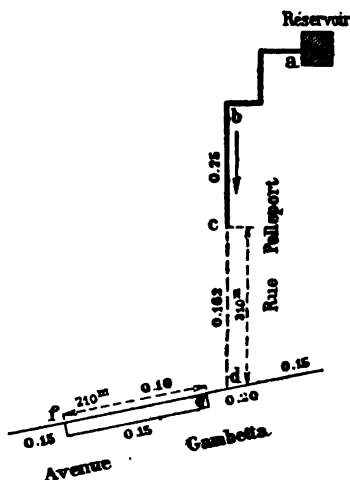


Fig. 393.

Le tronçon *de* de 0^m,20 de diamètre avait 15 mètres de long.

Le tronçon *ef* de 0^m,10 de diamètre avait 210 mètres de long.

Actuellement :

Le tronçon *cde* de 0^m,20 a 325 mètres de long, et le tronçon *ef* de 0^m,15 a 210 mètres de long.

Sur l'ancienne conduite, la perte de charge *h* de *c* en *f* avait pour expression, d'après (β') :

$$h = \frac{64b_1 Q^2}{\pi^2} \left[\frac{310}{0,162^5} + \frac{15}{0,20^5} + \frac{210}{0,10^5} \right],$$

ou encore (table XII) :

$$h = \frac{64b_1 Q^2}{\pi^2} \left[310 \times 8965 + 15 \times 3125 + 210 \times 100000 \right],$$

$$h = \frac{64b_1 Q^2}{\pi^2} \times 4881^2.$$

Sur la nouvelle conduite, les tronçons de 0^m,10 et 0^m,15 de même longueur se composent en une conduite de diamètre Δ :

$$\sqrt{\Delta^5} = \sqrt{0,10^5} + \sqrt{0,15^5},$$

d'où :

$$\Delta = 0,17;$$

ce qui donne pour la perte de charge totale *h* de *c* en *f* :

$$h = \frac{64b_1 Q^2}{\pi^2} \left[\frac{325}{0,20^5} + \frac{210}{0,17^5} \right],$$

où

$$h = \frac{64b_1 Q^2}{\pi^2} \left[325 \times 3125 + 210 \times 7042 \right] = \frac{64b_1 Q'^2}{\pi^2} \times 1579^2.$$

Q' représente le nouveau débit, et Q l'ancien.

Rapprochant les deux expressions de *h* et simplifiant, on en déduit :

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{4881}{1579} = 3,1.$$

A perte de charge égale, la nouvelle conduite maîtresse débite en *f* le triple de l'ancienne.

Pour un débit Q , la perte de charge *h'* sur cette conduite égale :

$$h' = \frac{64b_1 Q^2}{\pi^2} \times 1579^2;$$

et le rapport

$$\frac{h'}{h} = \frac{1579^2}{4881^2} = \frac{1}{10} \text{ environ,}$$

montre que, pour un même débit, la perte de charge n'est que le dixième de ce qu'elle était autrefois; aujourd'hui elle ne dépasse guère 1^m.50 par kilomètre; précédemment elle atteignait 15 mètres.

110. Service en route. — Les conduites considérées jusqu'ici faisaient seulement un service d'extrémité, et ne desservaient sur leur parcours aucun orifice de puisage; c'est le cas ordinaire des conduites de dérivation et de refoulement qui ne servent qu'au transport du liquide depuis la source ou l'usine élévatoire jusqu'au réservoir. Mais la plupart des conduites de distribution doivent à la fois distribuer de l'eau en route pour desservir les propriétés riveraines, et faire un service d'extrémité pour alimenter les conduites situées en aval. Dans les rues en impasse ou lorsque la conduite se termine par une plaque pleine, le débit d'extrémité se trouve naturellement supprimé.

L'étude rationnelle du service en route exigerait, dans chaque cas, la connaissance de la loi suivant laquelle variera le débit avec la distance au réservoir; mais, comme cette loi a un caractère essentiellement variable et indéterminé, on simplifie la question en supposant qu'à partir du point où commence le service en route *chaque mètre de conduite absorbe par seconde un certain volume d'eau q* . Si, entre deux points séparés par une distance l , il existe n prises d'eau dépensant un volume total Q , on fait $q = \frac{Q}{l}$.

Equation de l'écoulement. — Soit CE une conduite de diamètre uniforme issue du réservoir à niveau constant R, et faisant du service en route sur toute sa longueur; si B est le niveau piézométrique à l'extrémité E, la ligne des niveaux piézométriques AB

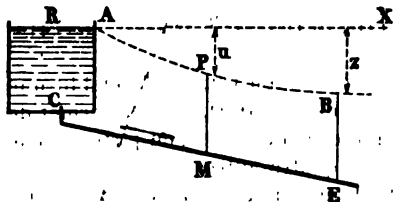


FIG. 394.

présente la forme d'une parabole cubique.

Appelons :

y , la dénivellation piézométrique en un point quelconque M;

s , la dénivellation piézométrique au point E;

s , la longueur CM;

l , la longueur CE;

Q_0 , le débit à l'origine C;

q , le service de route;

Q , le débit en M;

D , le diamètre.

Par le fait du service en route, on a au point M :

$$Q = Q_0 - qs; \quad (\alpha)$$

la formule (3) du paragraphe 107 donne dès lors, puisque D est constant et Q variable,

$$u = \frac{64b_1}{\pi^2 D^5} \int_0^s (Q_0 - qs)^2 ds.$$

Or :

$$\int_0^s (Q_0 - qs)^2 ds = Q_0^2 \int ds - Q_0 q \int 2s ds + q^2 \int s^2 ds;$$

par suite :

$$\int_0^s (Q_0 - qs)^2 ds = Q_0^2 s - Q_0 q s^2 + \frac{q^2}{3} s^3;$$

éliminant Q_0 à l'aide de (α), il vient :

$$\int_0^s (Q_0 - qs)^2 ds = Q^2 s + Qqs + \frac{q^2}{3} s^3;$$

on a donc enfin :

$$z = \frac{64b_1}{\pi^2 D^5} \left(Q^2 s + Qqs + \frac{q^2}{3} s^3 \right) \quad (1)$$

Telle est l'équation du service en route; elle établit une relation entre les cinq variables u , D , Q , s , q , et permet de déterminer l'une quelconque d'entre elles, en particulier le diamètre D , en fonction des quatre autres.

Si, à l'extrémité E , Q est nul, on a $s = l$, $u = z$, $ql = Q$;

par suite :

$$z = \frac{64b_1}{\pi^2 D^5} \frac{q^2}{3} l^3 = \frac{1}{3} \frac{64b_1 l Q_0^2}{\pi^2 D^5}; \quad (2)$$

cette équation, rapprochée de la formule (3) du paragraphe 108, montre que la charge z est exactement le tiers de celle qui serait nécessaire pour transporter le volume Q_0 à l'extrémité de la conduite, si le service en route n'existait pas. Autrement dit, une conduite débitant uniformément sur toute sa longueur un volume total Q_0 consomme trois fois moins de charge que si elle débitait ce même volume à son extrémité.

La relation (1) que l'on peut écrire :

$$u = \lambda s^3 + \mu s^2 + \nu s,$$

λ, μ, ν désignant des constantes numériques fonctions de b_1, D, Q, q , fait voir que la ligne des niveaux piézométriques AB se rapproche sensiblement de la parabole du troisième degré :

$$u = \lambda x^3 + \mu x^2 + \nu x,$$

car, dans la pratique, les longueurs s comptées sur la conduite diffèrent relativement peu, en raison de la petitesse de la pente, de leurs projections x sur l'horizontale AX.

Formule pratique. — Posons :

$$Q'^2 = Q^2 + Qqs + \frac{q^2 s^2}{3},$$

il en résulte :

$$u = \frac{64 b_1 s Q'^2}{\pi^2 D^5}; \quad (3)$$

mais, d'autre part, on a les inégalités évidentes :

$$Q' > Q + \frac{qs}{2},$$

$$Q' < Q + \frac{qs}{\sqrt{3}};$$

et, comme $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0,57$, ces inégalités s'écrivent encore :

$$Q + 0,57qs > Q' > Q + 0,50qs.$$

On peut donc admettre avec une approximation suffisante que :

$$Q' = Q + 0,55qs; \quad (3)$$

la formule (2) montre dès lors que l'on peut calculer le diamètre de la conduite sans se préoccuper du service en route, pourvu qu'on ajoute au débit d'extrémité les 0,55 du service de route qs .

Comme on a $Q' = Q_0 - 0,43qs$, on voit que l'on pourrait aussi tabler sur le débit d'origine Q_0 pourvu qu'on en retranche les 0,43 du service de route.

EXEMPLE. — Calculer le diamètre d'une conduite de 5.900 mètres de long, qui doit faire un service en route de 11 litres à la seconde, et un service d'extrémité de 10 litres, sous une charge totale de 3^m,90.

On a d'abord :

$$J = \frac{3,90}{5900} = 0,00066,$$

puis :

$$Q + 0,55qs = 0,010 + 0,55 \times 0,011 = 0,016.$$

Pour ces données, l'abaque Flamant indique :

$$D = 0,26, \quad U = 0,31.$$

Le transport des 21 litres à l'extrémité exigerait une conduite de 0^m,29 de diamètre.

CAS PARTICULIER. — Généralement le service en route ne commence qu'en un point M placé à une certaine distance du réservoir; la ligne des niveaux piézométriques AKB se compose alors d'un segment AK de ligne droite et d'un arc KB de parabole cubique.

Appelons :

- z_0, z , les dénivellations
 - piézométriques en K et en B ;
 - D, s_0 , le diamètre et la longueur du tronçon CM ;
 - D_1, s_1 , le diamètre et la longueur du tronçon ME .
- Sur le premier tronçon, on a :

$$z_0 = \frac{64h_1s_0Q_0^2}{\pi^2D^5};$$

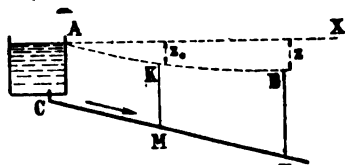


FIG. 395.

sur le second :

$$s - z_0 = \frac{1}{3} \frac{64b_1 s_1 Q_0^2}{\pi^2 D_1^5}.$$

Ces relations déterminent les diamètres D et D_1 en fonction du débit, des longueurs et des pertes de charge.

REMARQUE. — Soient Q le débit en un point m de la conduite, J la perte de charge par mètre au même point ; on a :

$$J = \frac{64b_1 Q^2}{\pi^2 D^5}.$$

Si l'on considère les deux points très voisins m et m' , on a,

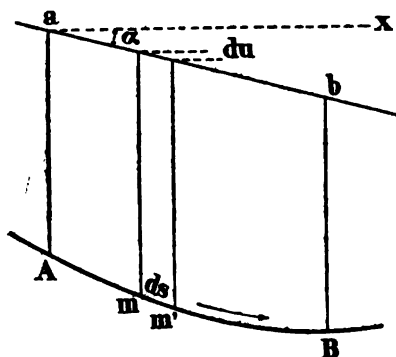


FIG. 396.

d'autre part, en appelant ds la distance mm' et du la dénivellation piézométrique :

$$J = \frac{du}{ds},$$

de sorte que :

$$\frac{du}{ds} = \frac{64b_1 Q^2}{\pi^2 D^5}.$$

Actuellement, cherchons quel doit être le profil en long de la conduite pour que la ligne ab des niveaux piézométriques soit une droite ; alors l'angle α est constant, et l'on a :

$$\frac{du}{dx} = \operatorname{tg} \alpha,$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{dx}{ds} = \frac{64h_1 Q^2}{\pi^2 \operatorname{tg} \alpha D^5}.$$

Si Q reste constant ainsi que D , il en est de même de $\frac{dx}{ds}$, c'est-à-dire que la conduite AB doit être rectiligne.

Lorsque le service en route existe, c'est-à-dire que Q est variable, on a $Q = Q_0 - qs$; alors l'équation devient :

$$\frac{dx}{ds} = \frac{64h_1}{\pi^2 \operatorname{tg} \alpha D^5} (Q_0 - qs)^2,$$

et l'intégration donne :

$$x = - \frac{64h_1}{\pi^2 \operatorname{tg} \alpha} \frac{(Q_0 - qs)^3}{3qD^5};$$

c'est l'équation de la courbe AB , définie par une relation entre l'abscisse x et l'arc s ; il serait facile d'en déduire la relation entre x et y .

Enfin, si le service en route était tel que l'on ait constamment $Q^2 = Q_0^2 - qs$, le profil en long de la conduite serait un arc de cycloïde.

111. Prix de revient des conduites. — Les conduites d'eau se placent généralement en terre au fond d'une tranchée étroite, dont la profondeur doit être suffisante pour laisser subsister au-dessus de la conduite, après sa pose, une couche de terre d'environ 1 mètre ; à Paris, 1^m, 20.

Dans quelques grandes villes, Paris par exemple, où la plupart des rues sont pourvues de galeries souterraines servant d'égouts, on utilise ces galeries pour y placer les conduites.

On trouve dans la plupart des aide-mémoire et dans les bordereaux spéciaux les prix de revient approximatifs d'un mètre linéaire de conduite en fonte posée en terre, robinets non compris. Quoique variables suivant le cours de la fonte et de la main-d'œuvre, ces prix n'oscillent avec le temps qu'entre des limites assez restreintes ; les chiffres de 1850 ne dépassaient guère ceux d'aujourd'hui que de 5 0/0.

La comparaison des dépenses aux diamètres donne un chiffre sensiblement constant, ce qui indique que le prix de revient du mètre linéaire de conduite toute posée est à

peu de chose près proportionnel à son diamètre. La dépense pour la fonte augmente plus rapidement que le diamètre, mais l'accroissement de la dépense fontainerie se trouve notablement plus lent, ce qui établit une sorte de compensation.

Actuellement, à Paris, pour les conduites en terre :

$$P = 90D \text{ en moyenne; } (1)$$

P est exprimé en francs et D en mètres.

Vers 1860, Dupuit indiquait :

$$P = 160D$$

En province, M. Debaube admet :

$$P = 75D.$$

Remplaçant D par sa valeur en fonction de J et Q , on obtient d'après la formule de M. Vallot :

$$P = 90 \times 0,324 Q^{\frac{3}{4}} J^{-\frac{3}{16}} = 29,16 Q^{\frac{3}{4}} J^{-\frac{3}{16}}. \quad (2)$$

THÉORÈME. — *Il est plus économique, en général, d'amener une masse d'eau d'un point à un autre à l'aide d'une seule conduite qu'avec plusieurs autres équivalentes.*

Soient Δ le diamètre de la conduite unique et l sa longueur. La dépense d'installation de cette conduite a pour expression :

$$p = 90\Delta l.$$

Si, au lieu d'une conduite, on en établit n de diamètre d et de longueur l , fournissant ensemble le même débit sous une charge égale, la dépense d'installation p' devient :

$$p' = 90ndl.$$

Mais, d'après la formule (2) du paragraphe 109,

$$\sqrt[n]{\Delta^5} = \sqrt[n]{d^5} + \sqrt[n]{d^5} + \dots = n \sqrt[n]{d^5},$$

relation qui donne :

$$d = \frac{\Delta}{n^{\frac{3}{2}}}$$

par suite :

$$\rho' = 90nl \frac{\Delta}{n^{\frac{3}{2}}} = 90/n^{\frac{3}{2}} \Delta.$$

Le rapprochement des valeurs de ρ et ρ' montre que

$$\rho' = n^{\frac{3}{2}} \rho,$$

et, lorsque n est plus grand que 1, $\rho' > \rho$.

Pour deux conduites débitant ensemble le même volume qu'une seule :

$$n = 2, \quad \rho' = 1,54\rho.$$

$$\text{Pour trois conduites : } n = 3, \quad \rho' = 1,95\rho.$$

$$\text{— quatre — } n = 4, \quad \rho' = 2,30\rho.$$

$$\text{— cinq — } n = 5, \quad \rho' = 2,64\rho.$$

.....

EXEMPLE. — On peut amener 40 litres d'eau par seconde d'un réservoir à une fontaine distante de 1 kilomètre, avec une pente de 0^m,018 par mètre, à l'aide d'une conduite de 0^m,20 ou avec deux de 0^m,15.

Dans le premier cas, les frais d'installation s'élèveraient à :

$$\rho = 15,80 \times 1000 = 15800 \text{ francs,}$$

et, dans le second cas, à :

$$\rho' = 2 \times 12,30 \times 1000 = 24600 \text{ francs ;}$$

on vérifie que

$$\rho' = 1,54\rho \text{ environ.}$$

Mais il arrive quelquefois que des considérations étrangères à l'économie obligent à multiplier le nombre des conduites.

COROLLAIRE I. — *Le prix de transport d'un mètre cube d'eau à une certaine distance, à l'aide de tuyaux, est d'autant plus faible que le volume à transporter est plus considérable.*

Le transport de Q mètres cubes à une distance l , avec une pente J , exige une somme ρ :

$$\rho = 29,16/Q^{\frac{3}{5}} J^{-\frac{3}{16}}; \quad (2)$$

la dépense par mètre cube égale donc :

$$\frac{\rho}{Q} = \frac{29,16/J^{-\frac{3}{16}}}{Q^{\frac{8}{5}}};$$

on voit qu'elle varie en raison inverse de la puissance $\frac{5}{8}$ du volume.

COROLLAIRE II. — *Les frais d'établissement d'une canalisation ne croissent pas proportionnellement au volume d'eau distribué, mais seulement à la puissance $\frac{3}{8}$ de ce volume.*

Cela résulte simplement de la formule (2).

112. Problème des trois conduites. — Une conduite AO doit en alimenter deux autres OB et OC. On connaît les niveaux piézométriques aux extrémités A, B, C, ainsi que les longueurs et débits respectifs des trois conduites. On se propose de calculer les diamètres de façon que la dépense totale d'installation soit minimum.

Désignons par :

l_1, l_2, l_3 , les longueurs des conduites ;

Q_1, Q_2, Q_3 , les débits des conduites ;

h', h'', z , les dénivellations piézométriques aux points B, C, O, par rapport au niveau piézométrique en A ;

D_1, D_2, D_3 , les diamètres des conduites.

Les inconnues du problème sont les diamètres et la perte de charge z sur le point O.

D'après ce qui a été dit au précédent paragraphe, la dépense sera minimum en même temps que l'expression :

$$\Sigma lD = l_1 D_1 + l_2 D_2 + l_3 D_3.$$

D'autre part, la formule de M. Flamant donne pour les

trois conduites, en posant $m = 0,0014$ (104) :

$$\begin{aligned} z &= m l_1 Q_1^{\frac{7}{4}} D_1^{-\frac{19}{4}}, \\ h' - z &= m l_2 Q_2^{\frac{7}{4}} D_2^{-\frac{19}{4}}, \\ h'' - z &= m l_3 Q_3^{\frac{7}{4}} D_3^{-\frac{19}{4}}. \end{aligned} \quad (1)$$

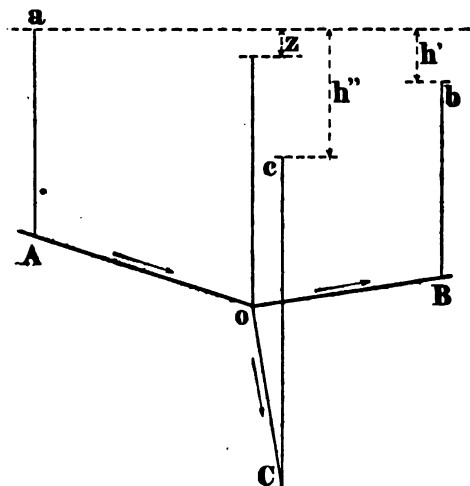


FIG. 397.

On déduit de la première équation :

$$D_1 = m^{\frac{4}{19}} l_1^{\frac{4}{19}} Q_1^{\frac{7}{19}} z^{-\frac{4}{19}};$$

puis

$$l_1 D_1 = m^{\frac{4}{19}} l_1^{\frac{23}{19}} Q_1^{\frac{7}{19}} z^{-\frac{4}{19}};$$

et deux expressions analogues pour $l_2 D_2$ et $l_3 D_3$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \Sigma l D &= m^{\frac{4}{19}} \\ &\times \left[l_1^{\frac{23}{19}} Q_1^{\frac{7}{19}} z^{-\frac{4}{19}} + l_2^{\frac{23}{19}} Q_2^{\frac{7}{19}} (h' - z)^{-\frac{4}{19}} + l_3^{\frac{23}{19}} Q_3^{\frac{7}{19}} (h'' - z)^{-\frac{4}{19}} \right]. \end{aligned}$$

Actuellement z est la seule variable du problème; et, si sa valeur était déterminée, la solution serait immédiate. Or la condition du minimum de dépense se traduit par l'équation dérivée :

$$\frac{d}{dz} H/D = 0,$$

que l'on peut écrire :

$$-\frac{4}{19} m^{\frac{4}{19}} \times \left[l_1^{\frac{23}{19}} Q_1^{\frac{7}{19}} z^{-\frac{23}{19}} - l_2^{\frac{23}{19}} Q_2^{\frac{7}{19}} (h' - z)^{-\frac{23}{19}} - l_3^{\frac{23}{19}} Q_3^{\frac{7}{19}} (h'' - z)^{-\frac{23}{19}} \right] = 0. \quad (2)$$

Cette équation ne contient que z comme inconnue; on pourra la résoudre, et, quand on aura calculé z , on obtiendra les diamètres D_1, D_2, D_3 par les équations (1).

On peut se rendre compte, d'après l'expression de D_1 en fonction de l_1, Q_1, z , que l'équation (2) équivaut à la suivante :

$$\frac{4}{19} \frac{D_1}{J_1} - \frac{4}{19} \frac{D_2}{J_2} - \frac{4}{19} \frac{D_3}{J_3} = 0; \quad (2')$$

J_1, J_2, J_3 représentent les pertes de charge par mètre sur les trois conduites.

Si l'on appelle, avec M. Bertrand (104), *variation du prix* d'une conduite, le quotient $\frac{4}{19} \frac{D}{J}$, on voit que, pour qu'il y ait minimum de dépense, il faut que la somme algébrique des variations de prix des trois conduites soit égale à zéro. La variation est prise avec le signe positif pour les conduites qui amènent l'eau au point O, avec le signe négatif pour les conduites qui l'emportent.

Cas d'un nombre quelconque de conduites. — Si la conduite AO devait en alimenter trois autres OB, OC, OD, dans des conditions analogues, on parviendrait identiquement à la relation :

$$\frac{4}{19} \frac{D_1}{J_1} - \frac{4}{19} \frac{D_2}{J_2} - \frac{4}{19} \frac{D_3}{J_3} - \frac{4}{19} \frac{D_4}{J_4} = 0.$$

Pour une conduite en alimentant n autres, on trouverait de même :

$$\frac{4}{19} \frac{D_1}{J_1} - \frac{4}{19} \sum \frac{D_2}{J_2} = 0.$$

Plus généralement, pour p conduites en desservant q autres, on aurait :

$$\frac{4}{19} \sum \frac{D_1}{J_1} - \frac{4}{19} \sum \frac{D_2}{J_2} = 0; \quad (3)$$

le premier signe Σ s'étend aux p conduites alimentaires et le second aux q conduites alimentées.

Enfin, la conclusion serait identique si l'écoulement de

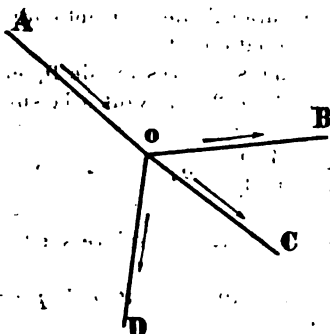


FIG. 398.

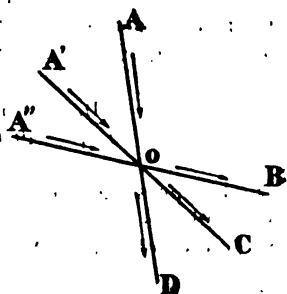


FIG. 399.

l'eau venait à changer de sens, c'est-à-dire si les q conduites devenaient alimentaires et les p autres alimentées ; la condition du minimum de dépense se traduirait toujours par l'équation (3).

L'abaque de M. Bertrand facilite beaucoup la solution de ces problèmes.

EXEMPLE. — Supposons que les deux conduites AO et BO en alimentent une troisième OC, et que les dénivellations piézométriques soient :

$$h' = 2,00, \quad h'' = 12,00;$$

les débits respectifs :

$$Q_1 = 300', \quad Q_2 = 240', \quad Q_3 = 540';$$

et les longueurs :

$$l_1 = 3.500^m, \quad l_2 = 2.800^m, \quad l_3 = 4.200^m.$$

Il s'agit de calculer les diamètres au moyen de l'abaque.

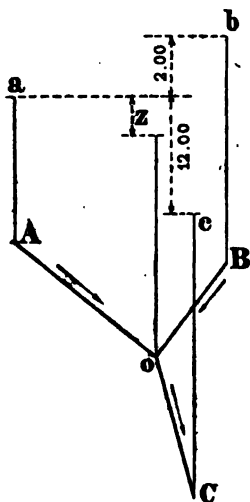


FIG. 400.

On peut évidemment adopter pour la perte de charge z tout nombre inférieur à 12 mètres. Nous allons procéder par tâtonnements, en faisant diverses hypothèses sur la valeur de z , et nous déterminerons pour chacune d'elles la variation de prix totale, c'est-à-dire la différence (3). Une courbe d'erreur nous donnera la perte de charge en O qui rend nulle cette variation et, par suite, minimum le prix total d'établissement. Comme on connaît pour chaque conduite la longueur l et le débit Q , on peut calculer une fois pour toutes sa puis-

sance $p = lQ^{\frac{7}{4}}$, et, de celle-ci, combinée avec la perte de charge, déduire le diamètre; puis, du diamètre et du débit, déduire la variation de prix $\rho = \frac{4}{19} \frac{D}{J}$.

PREMIÈRE HYPOTHÈSE : $z = 6,00$; par suite $h' + z = 8,00$; $h'' - z = 6,00$.

Un premier groupe de lectures donne :

$l_1 = 3.500,$	$Q_1 = 300,$	$p_1 = 450,$
$l_2 = 2.800,$	$Q_2 = 240,$	$p_2 = 250,$
$l_3 = 4.200,$	$Q_3 = 540,$	$p_3 = 1.500.$

On obtient par un autre groupe :

$p_1 = 450,$	$z = 6,00,$	$D_1 = 0,63,$
$p_1 = 250,$	$h' + z = 8,00,$	$D_2 = 0,52,$
$p_3 = 1.500,$	$h'' - z = 6,00,$	$D_3 = 0,80;$

puis par un troisième.:

$D_1 = 0,63,$	$Q_1 = 300$	$\rho_1 = 9.900$	} 14.100
$D_2 = 0,52,$	$Q_2 = 240,$	$\rho_2 = 4.200$	
$D_3 = 0,80,$	$Q_3 = 540,$	$\rho_3 = \dots$	
Différence.....			+ 2.100

La variation de prix diminuant quand la perte de charge augmente, il faut réduire la perte de charge de la conduite OC, par conséquent accroître z . Prenons $z = 7,00$; alors : $h' + z = 9,00$; $h' - z = 5,00$.

De nouvelles lectures donnent :

$p_1 = 450,$	$z = 7,00,$	$D_1 = 0,60,$	$p_1 = 6.800$	} 10.300
$p_2 = 250,$	$h' + z = 9,80,$	$D_2 = 0,50,$	$p_2 = 3.500$	
$p_3 = 1.500,$	$h' - z = 5,00,$	$D_3 = 0,83,$	$p_3 = \dots$	
Différence.....				- 4.700

La différence étant + 2.100 pour $z = 6,00$ et - 4.700 pour $z = 7,00$, sera égale à 0 pour $z = 6,30$; on en déduit par interpolation proportionnelle entre les valeurs déjà obtenues :

$$D_1 = 0,62, \quad D_2 = 0,51, \quad D_3 = 0,81 ;$$

ce sont les diamètres qui conduisent au minimum de dépense. Pratiquement, on adopterait les calibres de 0,60, 0,50, 0,80.

113. Calcul d'un réseau de conduites. — Considérons le réseau de conduites représenté par la figure 401, et destiné, par exemple, à canaliser une ville pour la distribution des eaux potables. Ce réseau commence au réservoir R, que l'on suppose à niveau constant, et s'étend jusqu'aux extrémités de la ville en se ramifiant dans les diverses rues. Le sens de l'écoulement de l'eau est indiqué par les flèches.

La conduite principale ab a le plus fort diamètre, et les calibres vont en décroissant à mesure qu'on s'éloigne du réservoir, parce que le débit diminue évidemment.

On suppose que l'on connaît les longueurs des diverses conduites, ainsi que leurs débits et les niveaux piézométriques aux extrémités a, c, f , etc. On se propose de calculer les diamètres de toutes les conduites.

Si l'on connaissait les niveaux piézométriques aux nœuds b, d, g , le problème serait déterminé, car, pour chaque conduite, on connaîtrait le débit, la longueur, la perte de charge totale d'une extrémité à l'autre, ce qui permettrait de calculer le diamètre par les tables ou les abaques.

En réalité, le problème comporte donc $n + n'$ inconnues, en désignant par n le nombre des conduites du réseau et n' celui des nœuds. Sur la figure, $n = 14$ et $n' = 3$. En effet, il faut calculer les n diamètres, et, pour cela, déterminer

préalablement les n dénivellations piézométriques sur les nœuds.

On commencera par déterminer les diamètres de ab , bc , bd , en opérant comme au précédent paragraphe, pour obtenir le minimum de dépense. Le calcul sera identique pour les conduites cd , de , dh . On procédera de même pour fg , gr ,

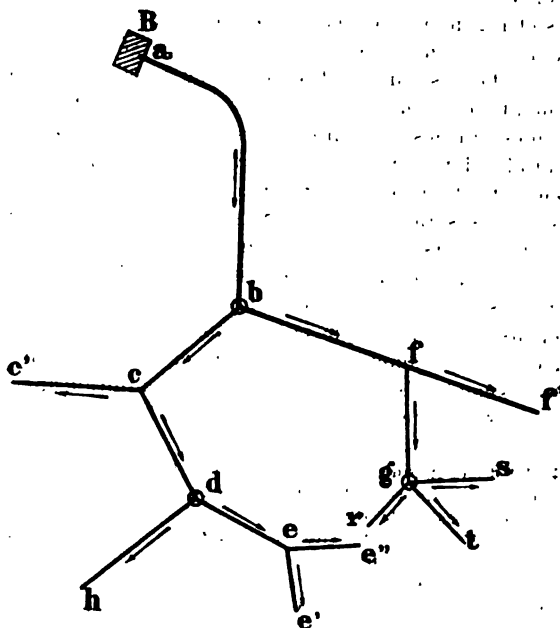


FIG. 401.

gt , gs ; et ainsi de suite dans le cas de n' nœuds. Après cela, il ne restera plus qu'à calculer les diamètres de cc' , ee' , ee'' , ..., ce qui ne présentera aucune difficulté, puisqu'on connaîtra le débit et la perte de charge de chaque conduite.

- Si les cotes de nivellement du réservoir et des divers points d'embranchement sont connues, il sera facile, d'après les niveaux piézométriques calculés et donnés, de connaître

la pression disponible en un point d'embranchement, quel qu'il soit.

Il est évident qu'au point b le débit de la conduite ab doit être égal à la somme des débits de bc et bf , et qu'il doit en être de même à tous les points d'embranchements.

Si l'on voulait tenir compte des pertes de charge produites par les changements de section, on appliquerait la formule du numéro 57; mais ces pertes de charge sont ordinairement très faibles, eu égard à la charge consommée par le frottement de l'eau à la paroi des tuyaux. D'ailleurs, les problèmes sur les conduites ne sont pas par eux-mêmes susceptibles d'une exactitude assez rigoureuse pour qu'il y ait lieu d'effectuer cette correction dans les cas ordinaires.

Les calculs seraient analogues si, au lieu de donner les débits des diverses conduites, on se fixait à l'avance leurs diamètres et que les débits soient inconnus. Mais il ne serait plus nécessaire de faire intervenir la condition du minimum de dépense, car en chaque point d'embranchement le débit de la conduite d'arrivée devrait être égal à la somme des débits des conduites de départ, ce qui introduirait une condition et déterminerait le problème.

114. Jet d'eau incliné. — Ce paragraphe fait en quelque sorte suite à celui du numéro 60. Lorsque l'ajutage est incliné sur l'horizon d'un angle θ , les filets d'eau sont curvilignes et l'étude du mouvement nécessite deux équations.

La résistance R est tangente à la trajectoire de la molécule et sa direction est opposée à celle du mouvement.

La projection des forces sur l'axe horizontal donne, puisque la pesanteur est verticale :

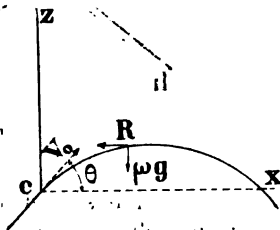


Fig. 402.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{a} \frac{dx}{dt} \quad (a')$$

On a ensuite l'équation (a) qui représente le mouvement projeté sur az :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{g}{a} \frac{dz}{dt} \quad (a)$$

L'intégrale première de (α') s'écrit d'après le calcul du numéro 60 :

$$\log \frac{dx}{dt} = -\frac{g}{a} t + C;$$

pour $t = 0$, on a $\frac{dx}{dt} = V_0 \cos \theta$, et, si l'on introduit cette condition dans la formule précédente, il vient :

$$C = \log V_0 \cos \theta;$$

par suite

$$\log \frac{dx}{dt} = -\frac{g}{a} t + \log V_0 \cos \theta,$$

ce que l'on peut écrire :

$$\frac{dx}{dt} = V_0 \cos \theta e^{-\frac{g}{a} t}. \quad (\beta')$$

L'intégrale première s'obtient sans difficulté, on trouve en fin de compte :

$$x = \frac{a V_0 \cos \theta}{g} \left(1 - e^{-\frac{g}{a} t} \right). \quad (\gamma')$$

Le calcul de z serait analogue; nous donnerons seulement les résultats à cause des développements du numéro 60. On trouverait :

$$\frac{dz}{dt} = -a + (V_0 \sin \theta + a) e^{-\frac{g}{a} t}, \quad (\beta'')$$

$$z = -at + \frac{a}{g} (V_0 \sin \theta + a) \left(1 - e^{-\frac{g}{a} t} \right). \quad (\gamma'')$$

On peut se rendre compte que, si l'on fait $\theta = 90^\circ$ dans ces formules, on retrouve celles du mouvement vertical.

L'équation de la courbe décrite par les filets liquides s'obtiendra en éliminant le temps t entre les relations (γ') et (γ''). On tire de (γ') :

$$1 - e^{-\frac{g}{a} t} = \frac{gx}{a V_0 \cos \theta},$$

puis

$$t = -\frac{a}{g} \log \left[1 - \frac{gx}{a V_0 \cos \theta} \right];$$

portant dans (γ''), il vient :

$$z = \frac{(a + V_0 \sin \theta) x}{V_0 \cos \theta} + \frac{a^2}{g} \log \left[1 - \frac{gx}{a V_0 \cos \theta} \right]. \quad (\lambda)$$

Cette équation représente une courbe cmd ayant une asymptote verticale et dont la forme est indiquée sur la figure 403. Si le mouvement s'effectuait dans le vide, la courbe deviendrait une

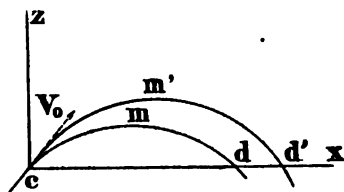


FIG. 403.

parabole $cm'd'$, comme il serait facile de s'en rendre compte en faisant $a = \infty$ dans l'équation (λ).

Hauteur et portée du jet d'eau. — La vitesse de la molécule d'eau diminue depuis sa valeur V_0 à l'ajutage jusqu'à zéro au point culminant du jet, après quoi le mouvement change de sens et le filet d'eau redescend.

La durée t de la période d'ascension est racine de l'équation :

$$-a + (V_0 \sin \theta + a) e^{-\frac{g}{a}t} = 0,$$

d'où l'on tire :

$$e^{-\frac{g}{a}t} = \frac{a}{V_0 \sin \theta + a},$$

puis

$$t = -\frac{a}{g} \log \frac{a}{V_0 \sin \theta + a}.$$

Si l'on porte cette expression de t dans (γ'), la valeur correspondante de z est la hauteur mh du jet d'eau; posant $mh = h'$, on trouve :

$$h' = \frac{aV_0 \sin \theta}{g} - \frac{a^2}{g} \log \frac{V_0 \sin \theta + a}{a}. \quad (4')$$

De même, si l'on porte l'expression de t dans (γ'), la valeur correspondante de x fait connaître l'abscisse ch du sommet m ; posant $ch = l$, il vient :

$$l = \frac{aV_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g (V_0 \sin \theta + a)}.$$

La portée du jet d'eau est la distance cd ; pour l'obtenir, il faut faire $z = 0$ dans l'équation (λ) et déduire la valeur correspondante de x ; mais ce calcul ne peut s'effectuer que par approximations successives.

Application des formules. — Un jet d'eau est alimenté par un branchement de 0^m,06 de diamètre et de 10 mètres de long piqué sur une conduite maîtresse qui donne 50 mètres de pression au-dessus de l'orifice. L'ajutage est conique ; il est incliné de 22° sur l'horizon et sa section a 0,03 de diamètre.

Calculer le débit du jet d'eau, sa hauteur et sa portée.

Le débit est donné par la formule du numéro 60, problème 1, dans laquelle on fera :

$$H = 50, \quad l = 10, \quad D = 0,06 \quad m = 0,92, \\ m' = 0,98, \quad \theta = 22^\circ, \quad \omega = \pi \frac{0,03^2}{4} = 0,00071.$$

La formule de Darcy, tuyaux vieux, accuse :

$$\frac{64bl}{\pi^2 D^5} = 60210;$$

on trouve en effectuant les calculs :

$$\frac{1}{m^2 m' \omega^3 \times 2g} = 125000,$$

en conséquence :

$$Q^2 = \frac{50,00}{185,210} = 0,000270,$$

d'où l'on tire pour le débit :

$$Q = 16,4 \text{ litres par seconde.}$$

D'après ce chiffre, la vitesse à la sortie de l'ajutage a pour valeur

$$V_0 = \frac{Q}{m \omega} = \frac{0,0164}{0,98 \times 0,00071} = 23,42.$$

La pression au-dessus de l'ajutage égale :

$$h = \frac{V_0^2}{2gm^2} = 33 \text{ mètres;}$$

ceci montre que la perte de charge par mètre sur le branchement de 0^m,06 est voisine de 1^m,70 ; c'est précisément le chiffre qu'accuse la formule de Darcy pour un débit de 16,4 litres par seconde.

La hauteur du jet est fournie par la formule (4). On a sin $\theta = 0,375$, cos $\theta = 0,927$. Le calcul donne :

$$h' = \frac{75 \times 23,42 \times 0,375}{0,81} - \frac{75^2}{9,81} \log \frac{23,42 \times 0,375 + 75}{75} = 3,50.$$

L'abscisse qui répond au sommet est :

$$l = \frac{75 \times 3,42^2 \times 0,695}{19,62 \times 83,783} = 17,30.$$

La portée du jet d'eau est racine de l'équation (λ) :

$$\frac{a + V_0 \sin \theta}{V_0 \cos \theta} x + \frac{a^2}{g} \log \left[1 - \frac{gx}{aV_0 \cos \theta} \right] = 0,$$

qui devient ici :

$$3,86x + 573,40 \log (1 - 0,006x) = 0;$$

un tâtonnement assez rapide donne pour la racine :

$$x = 30 \text{ mètres.}$$

Comparaison avec les formules de l'écoulement dans le vide. — Si

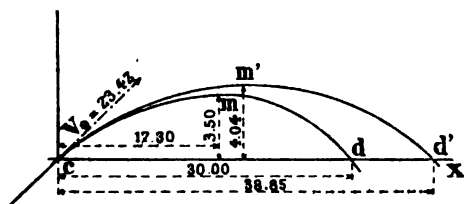


FIG. 404.

l'écoulement se produisait dans le vide, la hauteur du jet serait donnée par la formule :

$$h' = \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{2g} = \frac{23,42^2 \times 0,375^2}{19,62} = 4,04.$$

La portée du jet d'eau aurait pour valeur :

$$x = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{23,42^2 \times 0,695}{9,81} = 38,85;$$

la différence sur la portée atteint presque 9 mètres, ce qui est très appréciable au point de vue pratique. Les deux trajectoires sont reproduites dans la figure 404.

Jet d'eau vertical. — Lorsque le jet est vertical, $\theta = 90^\circ$. Avec

les mêmes données que ci-dessus, on obtient pour la hauteur :

$$h' = \frac{75 \times 23,42}{9,81} - \frac{75^2}{9,81} \log \frac{23,42 + 75}{75},$$

c'est-à-dire

$$h' = 23,65.$$

La formule de d'Aubuisson donnerait un résultat à peu près équivalent.

On trouverait avec la formule de M. Lueger :

$$h' = \frac{33}{1 + 0,0054 \times 33} = 28 \text{ mètres.}$$

Ce chiffre est certainement trop élevé, c'est celui que l'on obtient d'après la formule de l'écoulement dans le vide :

$$h' = \frac{V_n^2}{2g} = \frac{23,42^2}{19,62} = 28 \text{ mètres.}$$

QUESTIONS PRATIQUES

115. Perte de charge au passage des robinets. — 1° Un robinet de puisage étant assimilable à un ajutage cylindrique, la vitesse d'écoulement de l'eau est réglée par l'équation :

$$V = 0,82 \sqrt{2gz},$$

z représente la charge à l'extrémité du branchement, avant le robinet.

On déduit de cette équation :

$$\frac{V^2}{2g} = 0,67z;$$

la charge absorbée est donc égale à 0,33 z , ou au tiers de la charge disponible. Pour que le robinet fasse un service convenable, z ne doit pas être inférieure à 1 mètre, sinon le débit est insuffisant.

2° La perte de charge produite par le passage de l'eau au

travers d'un robinet-vanne partiellement ouvert s'exprime par la formule empirique :

$$k \frac{V^2}{2g};$$

k varie suivant le degré d'ouverture du robinet ; les valeurs ci-dessous sont des données expérimentales :

FRACTION D'OUVERTURE	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$
Valeurs de k ,	110	40	13	5	2	1	0,45	0,2	0,06

EXEMPLE. — Un robinet-vanne de 0,20, dont l'ouverture en plein exige 28 tours, n'est ouvert que de 7 tours. Calculer la perte de charge correspondant à une vitesse d'un mètre.

On a d'abord :

$$\frac{7}{28} = \frac{1}{4} = \frac{2,5}{10};$$

la valeur de k s'obtient par interpolation proportionnelle :

$$k = 13 + 27 \times 0,5 = 26,5;$$

on trouve d'après la table II :

$$x = 26,5 \times 0,051 = 1^m,35.$$

116. Perte de charge produite par les coudes. — La présence d'un coude sur une conduite est également une cause de perte de charge, assez faible d'ailleurs, et que l'on néglige souvent dans les calculs.

On a des notions encore très imparfaites sur les conditions de l'écoulement de l'eau dans les coudes; l'habitude est d'assimiler ce phénomène à un changement brusque de section (§ 55). L'expérience montre que, pour un coude à angle droit, la perte de charge est sensiblement égale

à $\frac{1}{4} \frac{U^2}{2g}$, U désignant la vitesse de l'eau.

Pour un coude arrondi, la perte est moindre, on l'évalue

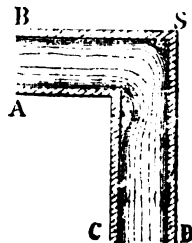


FIG. 405.

à $\frac{U^2}{200}$ environ. Quelques auteurs indiquent la formule :

$$K \frac{\beta U^2}{90 \cdot 2g},$$

β désignant l'angle au centre du coude, K un coefficient variable déterminé par l'équation :

$$K = 0,431 + 1,848 \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}},$$

r représente le rayon de la conduite et ρ celui du coude. La plus grande valeur de K est 1,98, pour $\frac{r}{\rho} = 1$.

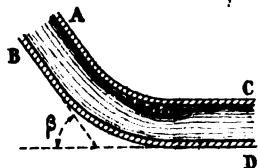


Fig. 406.

Il y a encore perte de charge à l'entrée de l'eau dans un branchement de plus petit diamètre, à cause de la déviation des filets liquides; Bélanger l'estimait à $\frac{U^2}{g}$,

U représentant la vitesse dans le branchement. La perte de charge à l'origine d'un embranchement de bouche de lavage (§ 401) serait, d'après cela, de :

$$\frac{3 \cdot 20^2}{g} = 1^m,04;$$

ce chiffre nous paraît beaucoup trop fort, la dépression ne doit guère dépasser 0^m,60.

Dupuit a fait quelques expériences en vue de déterminer l'influence des coudes et des étranglements sur la charge; en faisant passer de l'eau à diverses vitesses dans une conduite qui présentait quatre coudes à angle droit, le manomètre n'a jamais accusé une perte équivalente à celle d'un parcours de 2 mètres.

En résumé, sur les longues conduites, la résistance deve-

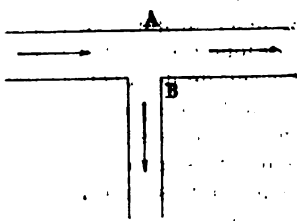


Fig. 407.

loppée par les changements de diamètre, coudes, tubulures, robinets, etc., est négligeable devant celle qui résulte du frottement à la paroi ; elle n'est équivalente qu'à un léger allongement de la longueur de la conduite ; on en tient suffisamment compte dans le calcul en majorant de quelques mètres cette longueur, ou, ce qui revient au même, en augmentant le diamètre de quelques centimètres.

117. Section d'ouverture partielle d'un robinet-vanne. —

Dans les robinets-vannes employés par le service des eaux de Paris, la fermeture est obtenue au moyen d'une lentille que l'on descend progressivement par l'intermédiaire d'une vis fixe à laquelle elle se trouve liée ; la vis se continue par une tige surmontée d'un chapeau sur lequel s'adapte la clef de manœuvre.

La lentille est formée de deux disques en fonte fondus ensemble et garnis de deux cercles en bronze parfaitement dressés qui viennent s'appliquer sur deux autres cercles, identiques fixés au corps du robinet. La présence de ces cercles

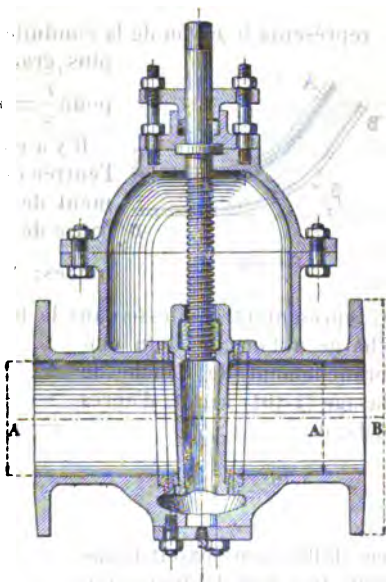


Fig. 408.

que l'on ajuste avec le plus grand soin, assure une fermeture hermétique. Les faces des disques sont légèrement inclinées sur la verticale ; leur diamètre et celui des cercles en bronze sont un peu supérieurs au diamètre de la conduite.

Lorsque la vanne est logée dans la partie supérieure, elle dégage complètement la section d'écoulement ; baissée à

fond, il faut plusieurs tours pour que le passage devienne libre, à cause de la différence entre le diamètre de la lentille et celui de la conduite.

Quand la vanne est levée d'une certaine hauteur, la section libre présente la forme d'un croissant dont il est facile de déterminer la surface.

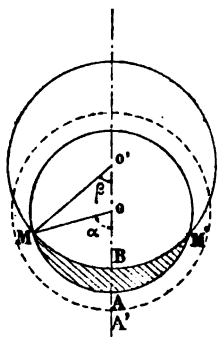


FIG. 409.

Désignons par :

$r = OA$, le rayon de la conduite;

$R = OA'$, le rayon de la lentille;

$h = OO'$, l'élévation;

α , l'angle MOA ;

β , l'angle $MO'A$;

S , l'aire du croissant hachuré.

Les rayons r et R sont connus, h est une donnée, α et β sont des variables auxiliaires; il s'agit de calculer S .

L'aire MBA , moitié de celle du croissant, égale l'aire du secteur MOA augmentée de celle du triangle MOO' et diminuée de celle du secteur $MO'B$; on a par suite :

$$\frac{S}{2} = \frac{r^2}{2} \alpha + \frac{rh}{2} \sin \alpha - \frac{R^2}{2} \beta,$$

ou

$$S = r^2 \alpha + rh \sin \alpha - R^2 \beta. \quad (1)$$

Le triangle MOO' donne d'autre part :

$$\frac{r}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \alpha}, \quad (2)$$

$$R^2 = h^2 + r^2 + 2hr \cos \alpha. \quad (3)$$

L'équation (3) détermine α en fonction de h , β s'obtient ensuite par l'équation (2); transportant ces valeurs dans (1), on en déduit S . Ce calcul ne cesse pas d'être passablement fastidieux, on le remplace avantageusement par une quadrature au planimètre.

Le tableau ci-dessous donne le rapport de l'aire S à l'aire ω de la section de la conduite, pour des fractions d'ouverture

croissant de $\frac{1}{10}$; les calculs ont été effectués sur un robinet-vanne de 0,20 ; mais les chiffres s'appliquent, avec une approximation suffisante, à tous les diamètres.

FRACTION D'OUVERTURE	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$
Valeurs de $\frac{S}{\omega} \dots$	0,100	0,228	0,356	0,477	0,595

FRACTION D'OUVERTURE	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$
Valeurs de $\frac{S}{\omega} \dots$	0,705	0,805	0,894	0,962

APPLICATION. — Un robinet-vanne de 0,40, faisant 42 tours utiles, est ouvert de 8 tours utiles. Calculer l'aire de la section libre.

On a d'abord :

$$\frac{8}{42} = \frac{1,90}{10},$$

d'où, par interpolation proportionnelle,

$$\frac{S}{\omega} = 0,100 + 0,128 \times 0,9 = 0,215 ;$$

par suite :

$$S = 3,1416 \times 0,20^2 \times 0,215 = 0^m,026916.$$

118. Battée des plaques pleines et des coudes. — Les extrémités des conduites sont fermées par des plaques pleines sur lesquelles l'eau exerce une certaine poussée normale, poussée qui varie à chaque instant avec la pression de l'eau dans la conduite, mais qui reste généralement inférieure à la pression statique, excepté lorsque les coups de bélier deviennent très violents.



FIG. 410.

Dans les travaux de pose de conduites, il importe de con-

trebutter les plaques pleines de manière qu'elles résistent à la poussée qui tend à déboîter les tuyaux; le calcul de cette poussée est des plus simples. Si ω désigne l'aire mouillée de la plaque pleine, z la pression sur son centre, ou a :

$$P = 1000\omega z;$$

ω et z s'expriment en mètres, P en kilogrammes.

EXEMPLE I. — A Paris, la conduite de 0,80 d'eau de la Dhuis, qui descend la rue de Ménilmontant et tourne à angle droit sur le boulevard de Belleville, se termine par une plaque pleine supportant normalement 45 mètres de pression; la poussée sur cette plaque égale donc :

$$P = 1000 \times 3,1416 \times 0,40^2 \times 45,00 = 22622 \text{ kilogrammes.}$$

De même qu'aux extrémités, il est encore nécessaire, pour éviter la dislocation des joints, de contrebutter les conduites dans les coudes. A l'état statique, lorsque l'eau est en repos, les sections extrêmes AB et CD du coude reçoivent des pressions normales qu'elles transmettent intégralement à la

paroi externe DB, de sorte que, pour évaluer la poussée qui s'exerce sur cette paroi, il suffit de composer les deux pressions normales :

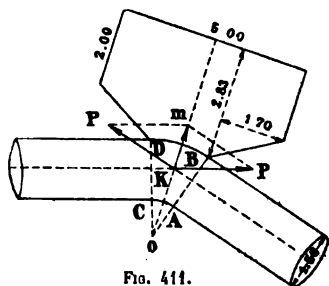


FIG. 411.

A la rigueur, comme l'eau est en mouvement, il faudrait tenir compte de l'action de la force centrifuge qui tend à ramener les molécules liquides sur la paroi BD; mais, comme cette ac-

tion est toujours très petite par rapport aux pressions statiques, il n'y a aucun inconvénient à la négliger.

Habituellement on contrebutte les coudes par des massifs en maçonnerie qui résistent par leur propre poids; le calcul de ces massifs est une application des principes de la composition des forces; nous donnerons un exemple emprunté à la conduite de l'Avre, de 1^m,50 de diamètre, qui va du

réservoir de Saint-Cloud à la porte d'Auteuil; le coude est situé un peu en amont du chemin de Saint-Cloud à Suresnes.

EXEMPLE II. — La conduite change de direction sous un angle de $147^{\circ} 19' 44''$.

La pression statique est exactement de $55^m,40$.

La valeur commune des pressions normales sur AB et CD égale :

$$P = 1000 \times 3,1416 \times \overline{0,75^2} \times 55,40 = 97897 \text{ kilogrammes};$$

on en déduit pour la pression supportée par la paroi extérieure du coude :

$$R = 2P \cos \frac{\pi}{2} = 2 \times 97897 \times \cos 73^{\circ} 39' 52'' = 55020 \text{ kilogrammes}.$$

Cette relation s'aperçoit immédiatement dans le triangle isocèle K ρ m, qui donne :

$$Km = R = 2KP \cos PKm.$$

Pratiquement la force R peut être considérée comme horizontale.

Appelons Q le poids du massif et F la force de frottement opposée à la poussée R; si l'on prend 0,75 pour coefficient de frottement de la maçonnerie sur le sol, on a d'abord :

$$\frac{F}{Q} = 0,75,$$

et, pour que le massif résiste par son poids seul, il suffit de faire $F = R$, c'est-à-dire :

$$0,75Q = 55020,$$

d'où :

$$Q = \frac{55020}{0,75} = 73360 \text{ kilogrammes},$$

ce qui donne pour le volume, en admettant qu'un mètre cube de maçonnerie pèse 1.800 kilogrammes,

$$\frac{73360}{1800} = 40^m 3,755.$$

On a donné au massif une hauteur égale à celle de la galerie dans laquelle se trouve placée la conduite, soit $3^m,20$; le volume ci-dessus exigeait, par suite, une base de :

$$\frac{40,755}{3,20} = 12^m 2,73;$$

celle que représente la figure remplit sensiblement cette condition.

La force centrifuge, qui vient s'ajouter à R, a pour expression $\frac{mU^2}{\rho}$, m désignant la masse du liquide en mouvement, U sa vitesse, ρ le rayon de courbure du coude. U égale 1 mètre par seconde environ, $\rho = 2,50$.

Pour calculer m , observons qu'en appelant p le poids du volume d'eau compris entre les sections AB et CD, on a :

$$m = \frac{p}{g} = \frac{1000 \times 3,1416 \times 0,75^2 \times 1,20}{9,81} = 216;$$

1,20 représente la demi-somme des arcs AC et ED.

La force centrifuge égale donc :

$$\frac{mU^2}{\rho} = \frac{216}{2,50} = 86 \text{ kilogrammes,}$$

valeur tout à fait négligeable devant celle de R.

Le calcul précédent se rapporte à un cas exceptionnel (conduite de 1^m,50 de diamètre supportant plus de 5 atmosphères); dans les cas ordinaires de la pratique, avec des diamètres moyens et des pressions restreintes, il n'est pas toujours nécessaire de donner aux butées de pareilles dimensions, car la paroi de la fouille dans laquelle se trouve la conduite offre généralement par elle-même une certaine résistance.

119. Siphons pour la traversée des vallées. — Les aqueducs de dérivation franchissent ordinairement les vallées, notamment les dépressions longues et profondes, à l'aide de *conduites forcées* ou siphons renversés. Les arcades superposées qui maintiennent le plan d'eau de l'aqueduc au niveau de la ligne de charge sont réservées pour les vallées peu profondes et étroites.

L'aqueduc se termine de chaque côté de la vallée par une chambre spéciale dite *tête de siphon*; celle d'amont A reçoit ordinairement les appareils de vidange de l'aqueduc et de remplissage de la conduite.

Au point de vue théorique, le problème du siphon se présente de la façon suivante; on connaît le débit maximum Q de l'aqueduc et la vitesse U en amont, on se donne *a priori* la perte de charge par mètre J de la conduite forcée; il s'agit de déterminer le diamètre de cette conduite et la dénivella-

tion h que subira la ligne d'eau. Sans doute cette dénivellation dépend de la longueur développée de la conduite, et l'on ne peut l'évaluer d'un seul coup par l'application d'une formule; mais, en tâtonnant quelque peu, on parvient rapidement à la combinaison de tracé et de perte de charge qui convient le mieux au cas spécial que l'on étudie.

Soient L la longueur de la conduite, U la vitesse de l'eau; admettons que, par suite des remous qui se produisent dans

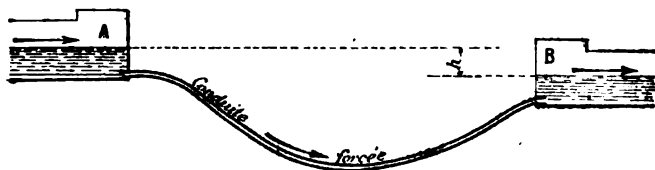


FIG. 412.

les têtes, les vitesses U et U' soient complètement détruites en A et en B; dans cette hypothèse, la valeur de h est donnée par la formule :

$$h = \frac{U^2}{2g} + \frac{U'^2}{2g} + LJ.$$

Les deux premiers termes, qui représentent les charges correspondantes aux vitesses détruites, sont généralement très petits par rapport au troisième.

Exemple. — Le radier de la tête amont du siphon de Chézy, sur la Dbeis, est à la cote 123,302, et la conduite forcée a 719^m,97 de longueur, avec 0,55 de perte de charge par kilomètre; la vitesse égale 0,20 par seconde; la portée maxima ayant été fixée à 500 litres par seconde, on avait les données :

$$\begin{array}{ll} Q = 500^l, & U = 0,20, \\ L = 719,97, & J = 0,00055. \end{array}$$

Le rapport :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}} = \frac{0,500}{\sqrt{0,00055}} = 21,3,$$

donne immédiatement avec la table V :

$$D = 1,03, \quad U' = \sqrt{0,00055} \times 26 = 0,61.$$

On trouve ensuite :

$$h = 0,002 + 0,019 + 719,97 \times 0,00035 = 0,416.$$

On a pris une conduite en fonte de 1 mètre de diamètre. Le radier de la tête aval étant à la cote 122,886, on a bien :

$$0,416 = 123,302 - 122,886.$$

Tous les siphons de la Dhuis ont 1 mètre de diamètre et 0,53 de pente par kilomètre.

120. Plan et profil en long des conduites. — Le tracé en plan est généralement commandé par la situation du réservoir et la direction des voies qu'il s'agit de desservir ; c'est une étude spéciale à faire dans chaque cas particulier ; nous reviendrons plus complètement sur cette question au paragraphe 121.

Mais nous ferons observer dès maintenant que, si la présence de plusieurs coudes sur une conduite est une cause de perte de charge, cette perte est cependant très faible, eu égard à celle qui résulte du frottement de l'eau à la paroi, et il n'y a pas lieu de s'en préoccuper lorsque la longueur de la conduite atteint plusieurs centaines de mètres, comme cela arrive ordinairement. Un coude à angle droit équivaut à un supplément de parcours égal à 5 diamètres ; un coude arrondi, à 2,5 diamètres seulement.

Sans doute les coudes et les sinuosités ne doivent pas être multipliés sans nécessité ; mais, quand ils sont justifiés par la disposition du tracé, il ne faut pas non plus faire de grands sacrifices pour les supprimer.

L'influence du profil en long sur le débit est beaucoup plus appréciable que celle des coudes ; la détermination de ce profil doit faire l'objet d'un examen attentif. En aucun de ses points une conduite ne doit s'élever au-dessus de la ligne des niveaux piézométriques ; c'est là un principe fondamental de l'établissement des conduites d'eau ; nous allons le justifier.

Considérons la conduite *oamc*, issue du réservoir *R*, et qui reste partout inférieure à la ligne des niveaux piézométriques *AB* ; en un point quelconque *m*, la pression totale, représentée par la hauteur $mp + 10,33$, est supérieure à la pression atmosphérique, seulement égale à 10,33, de sorte que, si l'on

établit une prise verticale en ce point, l'eau jaillira au dehors jusqu'au voisinage du niveau p .

De plus, en raison de cet excès de pression qui force l'eau à s'élever, les fuites importantes qui se produisent sur la conduite viennent se manifester à la surface du sol par de forts suintements, toutes les fois que la ligne AB est elle-même plus élevée que le sol.

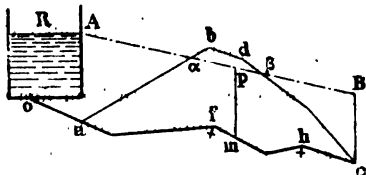


FIG. 413.

L'air qui subsiste dans la conduite au moment

de sa mise en service, et la vapeur qui se dégage de l'eau en plus ou moins grande quantité suivant la température, viennent s'accumuler vers les points hauts tels que h et f où, pour s'en débarrasser, il importe de ménager des ventouses ou des colonnes piézométriques débouchant à l'air libre. Lorsque cette précaution est omise, il peut arriver, notamment en été, que l'air confiné acquière une tension supérieure à la pression de l'eau et qu'il arrête partiellement ou complètement l'écoulement vers l'aval; cette circonstance s'est plus d'une fois présentée dans les anciennes distributions d'eau dépourvues de ventouses.

Lorsque le profil de la conduite présente la disposition $oabdc$, l'écoulement se produit encore comme à l'intérieur d'un siphon amorcé; mais, dans toute la partie $ab\beta$ supérieure à la ligne des niveaux piézométriques, la pression reste inférieure à la pression atmosphérique et l'air tend à pénétrer dans la conduite. Aucune prise, aucune ventouse n'est possible sur cette partie; l'écoulement ne saurait s'y produire à cause de la rentrée de l'air. Il faut éviter à tout prix de pareilles dispositions.

121. Étude d'une canalisation d'eau. — Les eaux destinées au service d'une ville et amenées par dérivation, ou relevées par machines élévatoires, sont généralement reçues dans un réservoir de capacité déterminée, installé sur un point culminant de la ville.

Ce réservoir est indispensable pour régulariser la distribution ; pendant la nuit, alors que la consommation d'eau est presque nulle, il emmagasine le débit des sources, et le jour suivant fournit l'appoint nécessaire aux heures où la consommation est supérieure à l'arrivée.

L'emplacement qu'il convient d'adopter pour le réservoir est une question d'espèce qui se détermine dans chaque cas d'après les circonstances locales : direction de la dérivation, topographie et relief de la ville, terrains et ressources disponibles, etc. ; on ne peut rien dire de général à ce sujet, si ce n'est que le réservoir doit être assez élevé, quand cela est possible, pour que l'eau parvienne facilement aux étages des plus hautes maisons.

La distribution de la ville se fait par un réseau de conduites qui commence au réservoir, et se ramifie par diamètres décroissants dans toutes les rues pour amener l'eau au droit de chaque propriété. L'aménagement dans la maison ne nécessite plus alors qu'un branchement de faible longueur.

Le plus souvent l'eau sort du réservoir par une seule conduite maîtresse, de fort diamètre, qui subsiste sur un certain parcours, et se subdivise ensuite en plusieurs conduites secondaires de diamètre moindre. Les conduites tertiaires et quaternaires sont branchées sur les précédentes.

L'étude d'un réseau de canalisation comporte deux opérations principales :

1° *Le tracé des conduites ;*

2° *Le calcul des diamètres et des pertes de charge.*

Il va sans dire que cette étude exige la connaissance du volume d'eau à distribuer quotidiennement ainsi que de la façon dont ce volume se répartit dans les différentes rues d'après le nombre d'habitants, l'importance des établissements publics et industriels, la surface de voie à arroser, etc. Mais tous ces éléments ont dû être rassemblés dès le début pour fixer la quantité d'eau à dériver ou à emprunter à la rivière.

122. Tracé des conduites. — On commence par se procurer un plan coté de la ville, ou un plan à courbes de niveau,

à l'échelle de $\frac{1}{2000}$ ou $\frac{1}{2500}$, sur lequel on reporte l'emplacement du réservoir.

Le tracé des conduites maitresses présente toujours une certaine indétermination, qui oblige à quelques tâtonnements indispensables pour dégager la solution la plus rationnelle.

Cependant l'indétermination n'est généralement pas aussi grande qu'on pourrait le supposer, et un examen attentif du plan et du terrain réduit souvent à deux ou trois au plus le nombre des tracés à comparer au point de vue de l'économie.

Il apparaît d'ailleurs comme évident que les conduites maitresses doivent suivre les voies les plus centrales et les plus denses comme population, que la largeur des rues et leur nivellement sont des éléments à considérer, et que les choses doivent être prévues de façon à parer le mieux possible aux interruptions de service nécessitées par l'arrêt des conduites en cas d'accident ou de travaux d'extension.

La comparaison économique de plusieurs réseaux fournissant des services également satisfaisants s'effectue à l'aide du tableau des prix de revient des divers diamètres que l'on trouve dans les bordereaux de prix spéciaux. Pour chaque réseau, on calcule la longueur et le diamètre des différents tronçons d'après le débit à fournir et la charge disponible; on applique les prix correspondants, et l'addition de tous les totaux partiels fait connaître la dépense générale.

123. Réseau ramifié et réseau maillé. — Supposons, par exemple, que la ville s'allonge à flanc de coteau à l'intérieur d'un périmètre sensiblement elliptique, et que le réservoir soit placé en R. S'il existe une grande rue *jbg* dirigée à peu de chose près suivant l'axe majeur de l'ellipse, il sera naturel de descendre la conduite maitresse jusqu'en *b*, de lui faire suivre cette rue, et d'installer les conduites secondaires *mn*, *pq*, *hs* dans les voies transversales; les conduites de troisième et de quatrième ordre : 1, 2, 3, ..., viendront se brancher sur ces dernières.

La figure 414 ne doit être envisagée que comme un schéma; il est clair que la position du point *b* et que le tracé des con-

duites sont entièrement subordonnés à la direction des voies existantes.

Chaque tronçon de la conduite

maitresse devra suffire à l'alimentation des branchements qu'il dessert directement et de toutes les conduites placées en aval; il en sera de même pour les tronçons successifs des conduites secondaires, tertiaires, etc.

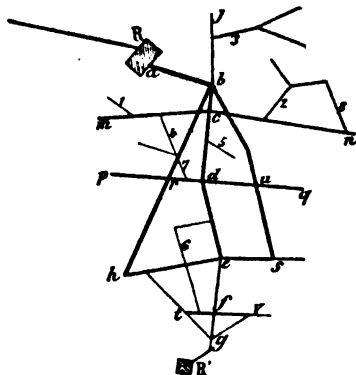


FIG. 414.

Un pareil réseau est dit *ramifié* ou *palmé*; l'écoulement de l'eau s'effectue constamment du réservoir vers les extrémités; mais, lorsqu'un arrêt devient nécessaire sur un point quelconque, toutes les

conduites placées en aval se trouvent privées d'eau, ce qui est un grave inconvénient au point de vue de l'exploitation.

Pour rendre possible l'alimentation en retour des principales conduites, il sera pratique d'en poser deux autres, telles que bh et bs , équivalentes comme débit à be , et raccordées sur mn , pq , hs ; dans ces conditions, le réseau sera *maillé*. L'adjonction de ces deux conduites aura pour autre résultat de créer un secours permanent qui maintiendra la pression aux heures de consommation intense.

On déterminera le diamètre de bh par la condition qu'elle suffise seule au service des rues situées à gauche de bg ; le diamètre de bs se calculera de la même façon d'après le volume à fournir dans la région à droite de bg ; on augmentera le diamètre de ru , hs , et au besoin celui de de .

Quelques petites voies, comme 2 et 3, resteront dépourvues d'alimentation en retour; mais cette situation n'aura que peu d'inconvénient; il est d'ailleurs impossible de l'éviter dans les rues en impasse telles que 1 et 5.

Nous avons indiqué une solution pour transformer le

réseau palmé en réseau maillé; mais il est clair que, dans la plupart des cas, cette transformation pourra s'effectuer de plusieurs façons; par exemple, s'il existe un boulevard de ceinture passant par a, m, p, \dots, n, j , on pourra l'adopter comme tracé des conduites maitresses.

La solution resterait la même dans le cas où le réservoir serait établi au voisinage du point p ; on pourrait descendre la conduite maitresse jusqu'en d et la subdiviser en deux branches dj et dg , puis installer des conduites de ceinture dans les directions pb, bq, qf, fp , ou emprunter les boulevards extérieurs.

Lorsque la charge disponible de a en g se trouve faible, en égard à la longueur abg , il est à craindre que le service de la région extrême tvq ne devienne défectueux aux heures de forte dépense d'eau. On doit alors examiner, quand le relief du terrain le permet, les avantages qui résulteraient de la construction d'un second réservoir en R' , à un niveau un peu inférieur à celui de R (§ 95); il n'est pas nécessaire que ce réservoir ait une grande capacité, mais la conduite adf doit être suffisante pour le remplir pendant la nuit.

Pour une ville assise sur deux côtés opposés et présentant un périmètre sensiblement circulaire, avec réservoir en R , on peut adopter la disposition d'ensemble représentée par la figure 415: ad, ef, bc , conduites maitresses; $bfc d$, conduite de ceinture.

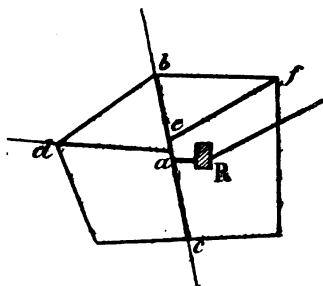


Fig. 415.

Nous ne multiplierons pas ces exemples théoriques; il était utile de les donner pour fixer les idées sur la question du tracé des conduites principales d'un réseau de canalisation d'eau; mais, nous le répétons, c'est seulement par l'examen du plan de ville et l'exploration du terrain que l'ingénieur peut se déterminer judicieusement sur le tracé qu'il convient d'adopter définitivement.

124. Calcul des diamètres et des pertes de charge. — Le diamètre de chaque tronçon, ab , bc , cd , ..., se détermine d'après son débit, sa longueur, et la perte de charge dont on peut disposer d'une extrémité à l'autre. Connaissant la longueur et la charge, une simple division fournit la pente par mètre.

Les abaques de Lévy et de Flamant facilitent considérablement les calculs. En fin de compte, on prend pour chaque tuyau le diamètre de la série commerciale immédiatement supérieur au nombre trouvé, et l'on corrige en conséquence la perte de charge; par exemple, si le calcul donne 0,27 comme diamètre, on prend une conduite de 0,30.

Il serait évidemment plus rigoureux d'appliquer la formule de Dupuit sur le service en route (110); mais bien peu de praticiens utilisent cette formule; l'économie qu'elle apporte dans la détermination des diamètres est la plupart du temps insignifiante.

Le tronçon ab doit porter la totalité de la consommation d'eau de la ville.

Le débit de bc s'obtient en retranchant de celui de ab le service en route de a en b , et le débit de bj auquel il faut ajouter celui des conduites 3.

La dépense du tronçon cd se calcule pareillement en retranchant du débit de bc le service en route de b en c , et celui de la conduite mn et des branchements 1, 2, 4, 8. On opère de même pour de , et ainsi de suite. En général, le débit d'un tronçon quelconque de abg égale le débit du tronçon précédent diminué de son service en route et du volume consommé par les conduites qu'il alimente.

Le débit de dp égale son service de route augmenté de celui de la conduite 7. Pour bh , on cumule les débits de cm , dp , he .

Les conduites tertiaires et quaternaires se déterminent de la même façon, mais il est rare que leur diamètre soit soumis au calcul; car on s'impose toujours un diamètre minimum, 0,06 ordinairement et plus rarement 0,04. Les diamètres inférieurs ne sont utilisés que pour les branchements des maisons et des bouches d'eau.

Lorsque les calculs sont terminés, il est utile de dresser

Niveau moyen de l'eau
 (287.00)
 Niveau
 (285.00)
 Niveau des
 (283.95)
 (283.90)
 (283.85)
 (283.80)
 (283.75)
 (283.70)
 (283.65)
 (283.60)
 (283.55)
 (283.50)
 (283.45)
 (283.40)
 (283.35)
 (283.30)
 (283.25)
 (283.20)
 (283.15)
 (283.10)
 (283.05)
 (283.00)
 (282.95)
 (282.90)
 (282.85)
 (282.80)
 (282.75)
 (282.70)
 (282.65)
 (282.60)
 (282.55)
 (282.50)
 (282.45)
 (282.40)
 (282.35)
 (282.30)
 (282.25)
 (282.20)
 (282.15)
 (282.10)
 (282.05)
 (282.00)
 (281.95)
 (281.90)
 (281.85)
 (281.80)
 (281.75)
 (281.70)
 (281.65)
 (281.60)
 (281.55)
 (281.50)
 (281.45)
 (281.40)
 (281.35)
 (281.30)
 (281.25)
 (281.20)
 (281.15)
 (281.10)
 (281.05)
 (281.00)
 (280.95)
 (280.90)
 (280.85)
 (280.80)
 (280.75)
 (280.70)
 (280.65)
 (280.60)
 (280.55)
 (280.50)
 (280.45)
 (280.40)
 (280.35)
 (280.30)
 (280.25)
 (280.20)
 (280.15)
 (280.10)
 (280.05)
 (280.00)
 (279.95)
 (279.90)
 (279.85)
 (279.80)
 (279.75)
 (279.70)
 (279.65)
 (279.60)
 (279.55)
 (279.50)
 (279.45)
 (279.40)
 (279.35)
 (279.30)
 (279.25)
 (279.20)
 (279.15)
 (279.10)
 (279.05)
 (279.00)
 (278.95)
 (278.90)
 (278.85)
 (278.80)
 (278.75)
 (278.70)
 (278.65)
 (278.60)
 (278.55)
 (278.50)
 (278.45)
 (278.40)
 (278.35)
 (278.30)
 (278.25)
 (278.20)
 (278.15)
 (278.10)
 (278.05)
 (278.00)
 (277.95)
 (277.90)
 (277.85)
 (277.80)
 (277.75)
 (277.70)
 (277.65)
 (277.60)
 (277.55)
 (277.50)
 (277.45)
 (277.40)
 (277.35)
 (277.30)
 (277.25)
 (277.20)
 (277.15)
 (277.10)
 (277.05)
 (277.00)
 (276.95)
 (276.90)
 (276.85)
 (276.80)
 (276.75)
 (276.70)
 (276.65)
 (276.60)
 (276.55)
 (276.50)
 (276.45)
 (276.40)
 (276.35)
 (276.30)
 (276.25)
 (276.20)
 (276.15)
 (276.10)
 (276.05)
 (276.00)
 (275.95)
 (275.90)
 (275.85)
 (275.80)
 (275.75)
 (275.70)
 (275.65)
 (275.60)
 (275.55)
 (275.50)
 (275.45)
 (275.40)
 (275.35)
 (275.30)
 (275.25)
 (275.20)
 (275.15)
 (275.10)
 (275.05)
 (275.00)
 (274.95)
 (274.90)
 (274.85)
 (274.80)
 (274.75)
 (274.70)
 (274.65)
 (274.60)
 (274.55)
 (274.50)
 (274.45)
 (274.40)
 (274.35)
 (274.30)
 (274.25)
 (274.20)
 (274.15)
 (274.10)
 (274.05)
 (274.00)
 (273.95)
 (273.90)
 (273.85)
 (273.80)
 (273.75)
 (273.70)
 (273.65)
 (273.60)
 (273.55)
 (273.50)
 (273.45)
 (273.40)
 (273.35)
 (273.30)
 (273.25)
 (273.20)
 (273.15)
 (273.10)
 (273.05)
 (273.00)
 (272.95)
 (272.90)
 (272.85)
 (272.80)
 (272.75)
 (272.70)
 (272.65)
 (272.60)
 (272.55)
 (272.50)
 (272.45)
 (272.40)
 (272.35)
 (272.30)
 (272.25)
 (272.20)
 (272.15)
 (272.10)
 (272.05)
 (272.00)
 (271.95)
 (271.90)
 (271.85)
 (271.80)
 (271.75)
 (271.70)
 (271.65)
 (271.60)
 (271.55)
 (271.50)
 (271.45)
 (271.40)
 (271.35)
 (271.30)
 (271.25)
 (271.20)
 (271.15)
 (271.10)
 (271.05)
 (271.00)
 (270.95)
 (270.90)
 (270.85)
 (270.80)
 (270.75)
 (270.70)
 (270.65)
 (270.60)
 (270.55)
 (270.50)
 (270.45)
 (270.40)
 (270.35)
 (270.30)
 (270.25)
 (270.20)
 (270.15)
 (270.10)
 (270.05)
 (270.00)
 (269.95)
 (269.90)
 (269.85)
 (269.80)
 (269.75)
 (269.70)
 (269.65)
 (269.60)
 (269.55)
 (269.50)
 (269.45)
 (269.40)
 (269.35)
 (269.30)
 (269.25)
 (269.20)
 (269.15)
 (269.10)
 (269.05)
 (269.00)
 (268.95)
 (268.90)
 (268.85)
 (268.80)
 (268.75)
 (268.70)
 (268.65)
 (268.60)
 (268.55)
 (268.50)
 (268.45)
 (268.40)
 (268.35)
 (268.30)
 (268.25)
 (268.20)
 (268.15)
 (268.10)
 (268.05)
 (268.00)
 (267.95)
 (267.90)
 (267.85)
 (267.80)
 (267.75)
 (267.70)
 (267.65)
 (267.60)
 (267.55)
 (267.50)
 (267.45)
 (267.40)
 (267.35)
 (267.30)
 (267.25)
 (267.20)
 (267.15)
 (267

FIG. 146.

cette représentation graphique fait quelquefois ressortir la nécessité d'augmenter quelques diamètres.

La figure 416 représente le profil en long de la conduite maîtresse de distribution d'eau dans une petite ville française.

Ordinairement on ne se préoccupe pas des pertes de charge produites par les coudes, changements de diamètre, tubulures, robinets, etc. ; il est bon cependant, lorsque la charge est faible, de calculer la perte au droit de chaque tubulure, en *c* par exemple pour la conduite *cm*, afin de voir si elle n'entraîne pas une correction du diamètre.

125. Évaluation du débit. — Le débit de chaque conduite se déduit des éléments consignés dans un tableau spécial qui constitue l'une des pièces du projet, et dont la confection incombe à la municipalité.

Pour une agglomération de dix à vingt mille âmes, on peut admettre une dépense journalière de :

100 litres par habitant ;

100 litres par cheval, âne, bœuf ;

2 litres par mètre carré de surface à arroser.

La consommation industrielle et celle des fontaines monumentales s'ajoutent aux précédentes.

Avec 150 litres par tête, on alimente une ville dans d'assez bonnes conditions ; bien des localités en France se satisfont à moins.

Le total de l'avant-dernière colonne fait connaître le volume d'eau nécessaire pour toute la ville et que doivent fournir les sources ou la rivière.

Mais il arrive quelquefois que les sources disponibles à faible distance n'ont pas toute la puissance de débit désirable, auquel cas il faut se contenter du volume d'eau que l'on peut recueillir, quitte à la distribuer le plus équitablement possible.

Quoi qu'il en soit, il importe d'observer que, si l'apport journalier des sources se répartit uniformément sur les vingt-quatre heures, il n'en est pas de même de la consommation, qui s'effectue presque en totalité de six heures du matin à dix heures du soir, avec deux maxima vers dix heures et cinq heures et un minimum intermédiaire vers midi.

En outre, l'observation apprend que la consommation d'eau est notablement plus forte en été qu'en hiver ; l'amplitude des variations atteint, et dépasse quelquefois, de 50 0/0 la moyenne journalière dans une année.

La plupart des ingénieurs estiment aujourd'hui que, pour qu'un réseau de canalisation d'eau fonctionne constamment dans de bonnes conditions pratiques, malgré les variations horaires et annuelles de la consommation, ses éléments doivent être calculés en vue d'un débit quadruple de la moyenne. A Vierzon, Gibault a tablé sur une consommation totale de 55 litres par seconde, bien que la machine n'élève que 23 litres pendant douze heures, ou 11^{lit},5 durant vingt-quatre heures.

Nombre de distributions anciennes, calculées sur le débit moyen seulement, ne fournissent qu'un médiocre service; aux heures de forte consommation, il se produit une dépression énorme sur tout le réseau, et l'eau ne monte plus aux étages des maisons.

123. Pression qu'il convient de réaliser. — Tout service d'eau bien établi doit desservir, quand le niveau du réservoir le permet, le robinet de puisage le plus élevé d'une maison, ce qui exige de 1 à 2 mètres de pression sur ce robinet.

Dans les villages et les bourgs, où les maisons n'ont guère plus d'un étage, 12 à 15 mètres de pression au sol suffisent en général; un branchement de 0,020 débitant un demi-litre par seconde absorbe, en effet, 0,30 de charge par mètre, soit 3 mètres pour un branchement de 10 mètres, de sorte qu'il reste encore de 6 à 8 mètres au premier étage.

Pour les maisons à trois étages, il faut de 25 à 30 mètres au sol, et 35 mètres pour celles à cinq étages. Mais ces chiffres supposent que le diamètre des branchements est en rapport avec leur débit, sinon la perte augmente très rapidement. Un plomb de 0,020 fournissant 2 litres par seconde absorbe 3 mètres par mètre.

Ces pressions sont des minima qu'il vaut mieux dépasser un peu quand l'on dispose d'une charge suffisante; toutefois, lorsque cette dernière est considérable, on peut en profiter pour réduire les diamètres.

127. Mesure du débit des conduites. — Le débit effectif des conduites et des branchements d'eau se mesure au moyen

de compteurs. Il existe un très grand nombre de systèmes de compteurs, avec calibre variable depuis 0,007 jusqu'à 0,250.

Ces divers systèmes se rattachent à deux types généraux : compteurs de volume et compteurs à turbine.

Les compteurs s'installent ordinairement dans les propriétés sur les branchements d'eau des concessionnaires. Pour les grosses conduites, on a imaginé un type spécial, dépourvu de machinerie, assez répandu aux États-Unis, et dit *Compteur Ventury*; la théorie de ce compteur dérive de l'équation de Bernoulli.

FIG. 417.

L'appareil se compose d'une portion de tuyau d'un diamètre réduit, que l'on intercale sur la conduite dont on veut mesurer le débit, en la raccordant au moyen de deux pièces tronconiques en fonte.

L'eau qui circule dans la conduite avec une vitesse U acquiert dans la section rétrécie une vitesse U' , supérieure à U , et telle que $\omega U = \omega' U'$, en appelant ω la section courante de la conduite et ω' celle du tuyau. La forme tronconique des pièces de raccord n'occasionne qu'une perte de charge

insignifiante, de sorte que, si l'on appelle h et h' les pressions en mètres dans la section normale et dans celle du tuyau, le théorème de Bernoulli donne :

$$h + \frac{U^2}{2g} = h' + \frac{U'^2}{2g}.$$

Actuellement, on a $Q = \omega U = \omega' U'$; par suite

$$U = \frac{Q}{\omega}, \quad U' = \frac{Q}{\omega'};$$

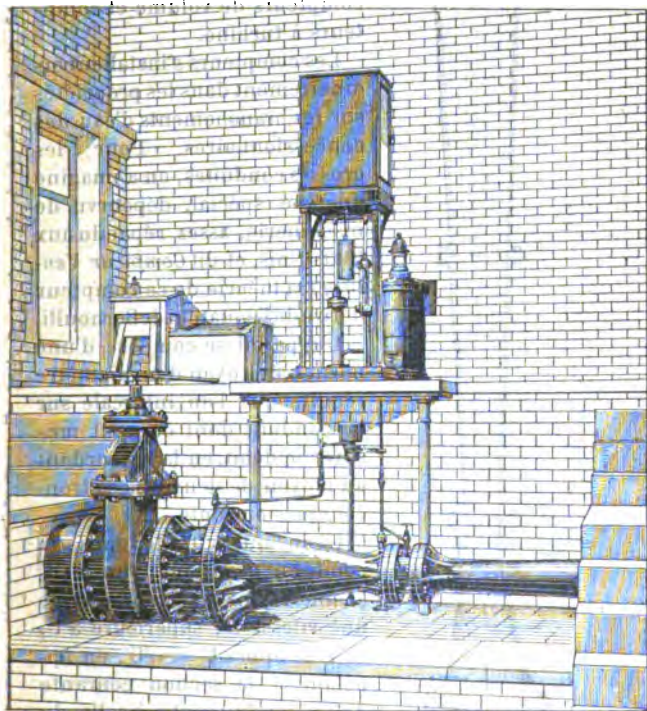


FIG. 418.

si l'on remplace dans la formule ci-dessus, il vient :

$$h + \frac{Q^2}{2g\omega^2} = h' + \frac{Q^2}{2g\omega'^2},$$

d'où l'on tire :

$$h - h' = \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{\omega'^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = \frac{Q^2}{2g} \frac{\omega^2 - \omega'^2}{\omega^2 \omega'^2},$$

puis

$$Q = \frac{\omega \omega \sqrt{2g}}{\sqrt{\omega^2 - \omega'^2}} \sqrt{h - h'} = \lambda \sqrt{h - h'}.$$

On voit qu'il suffira de mesurer les colonnes piézométriques h et h' dans la section courante de la conduite et dans la section réduite pour en déduire le débit Q d'après la formule ci-dessus. La valeur de λ relative à chaque compteur se détermine par l'expérience, c'est affaire du constructeur. Les deux piézomètres qui marquent la pression du liquide dans la section normale et dans la section rétrécie communiquent avec un tube en U contenant du mercure, de sorte que la perte de charge $h - h'$ est représentée dans ce tube par une hauteur z de mercure telle que $h - h' = 13,60z$.

Les variations de z sont reproduites sur un diagramme parabolique ou enregistreur, par l'intermédiaire d'un flotteur à crémaillère avec pignon, lequel pignon en commande un second de rayon différent, qui actionne à son tour une crémaillère à l'extrémité de laquelle est fixé le style du diagramme. Ce dernier fait connaître immédiatement le débit ou la vitesse d'écoulement d'après la charge de Ventury z .

La figure 418 montre l'installation d'un compteur Ventury dans le bureau du service des eaux d'Oldham; les deux quadrants enregistreurs font connaître, l'un la vitesse des filets liquides et l'autre le débit de la conduite.

CHAPITRE V

CANAUX ET RIVIÈRES

128. Le problème de l'écoulement de l'eau dans les cours d'eau naturels ou artificiels est analogue à celui de l'écoulement dans les tuyaux de conduite ; les deux théories pourraient se déduire facilement l'une de l'autre. Cependant la théorie des canaux est plus compliquée que celle des conduites forcées, à cause de la variabilité de la section d'écoulement comme forme et comme nature des parois.

Pour les cours d'eau ayant une section transversale et une pente longitudinale uniformes, ce qui est le cas ordinaire des canaux, le problème de l'écoulement se trouve résolu d'une façon suffisamment exacte pour les besoins de la pratique ; mais, dès que l'on envisage les cours d'eau naturels dont la section du lit et la pente sont essentiellement variables ainsi que la nature des parois, les lois du mouvement deviennent tellement compliquées que la théorie est impuissante à préciser les faits ; il faut recourir aux formules empiriques plus ou moins approximatives.

129. Résistance des parois. — Lorsqu'une masse d'eau s'écoule par un canal, le frottement des molécules les unes sur les autres et contre la paroi du canal développe une résistance considérable qui influe d'une façon sensible sur le débit.

Les divers filets liquides ne sont pas animés des mêmes vitesses ; ceux qui touchent la paroi se trouvent retardés par sa résistance qui tend à les ralentir ; ces derniers, à leur tour, retardent ceux qui les suivent, et ainsi de suite en s'éloignant des rives ; de sorte que le maximum de vitesse se produit vers le milieu du courant, à une certaine distance de la surface libre.

Dans le calcul des dimensions d'un canal, on ne tient pas compte de ces différences de vitesse; le régime permanent établi, on ne considère que la *vitesse moyenne*, celle qui, multipliée par l'aire de la section transversale du canal, donne son débit effectif, c'est-à-dire le volume d'eau qui passe en une seconde au droit d'une section normale.

La résistance qu'oppose la paroi à l'écoulement, celle que développe la cohésion du liquide, se traduisent par un ralentissement général du mouvement, et les expériences de Darcy et de M. Bazin, venant confirmer celle de Baumgarten, ont montré que *cette résistance était proportionnelle à l'étendue de la surface mouillée, à une certaine fonction de la vitesse moyenne, qu'elle dépendait de la structure de la paroi, mais qu'elle était indépendante de la pression du liquide.*

RÉGIME UNIFORME

130. Formule fondamentale. — Le régime d'un cours d'eau est uniforme lorsque la section transversale du lit et la pente sont constantes; alors la vitesse reste également constante tout le long d'un même filet. Ces conditions sont à peu près réalisées dans les canaux, quelquefois dans les rivières entre des points déterminés.

Proposons-nous d'établir l'équation du mouvement uniforme. Pour cela, considérons la masse d'eau comprise entre deux sections normales du canal AB et CD séparées par une distance s ; AC et BD sont les traces respectives de la surface libre de l'eau et du fond du canal sur un plan vertical passant par son axe.

Puisque le mouvement de la masse d'eau est uniforme, il faut nécessairement qu'il y ait équilibre entre les forces accélératrices et les forces retardatrices; les premières se composent de la pression normale qui agit sur la section AB et de l'action de la pesanteur; les forces retardatrices proviennent de la pression qui s'exerce sur la section CD, égale d'ailleurs et directement opposée à celle qui agit sur AB

puisque ces sections sont identiques, et du frottement du liquide contre les parois.

Désignons par :

α , l'angle formé par la ligne d'eau AC avec l'horizontale AH;

ω , l'aire de la section transversale AB;

γ , le périmètre mouillé de cette section;

U , la vitesse moyenne de l'eau;

s , la distance AC;

π , le poids du mètre cube d'eau ($\pi = 1.000$ kilogrammes).

Soit gg' l'axe du rectangle ABCD parallèle à AC et BD;

ω représente l'aire du trapèze $abcd$, γ la longueur $ab + bc + cd$.

Le poids de la masse liquide est égal à $\pi\omega s$, et la composante de cette force suivant gg' a pour expression :

$$\pi\omega s \sin \alpha.$$

Mais la résistance, qui est proportionnelle à la surface mouillée $s\gamma$ et à une certaine fonction $f(U)$ de la

vitesse moyenne, qui agit dans le sens $g'g$, peut se représenter par le produit :

$$\pi s \gamma f(U).$$

L'égalité des forces accélératrice et retardatrice, qui assure l'uniformité du mouvement, donne donc l'équation :

$$\pi\omega s \sin \alpha = \pi s \gamma f(U);$$

d'où l'on déduit, en simplifiant et transposant :

$$\frac{\omega}{\gamma} \sin \alpha = f(U).$$

Ordinairement l'angle α est assez faible pour que l'on

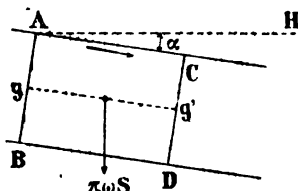


FIG. 419.

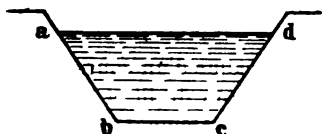


FIG. 420.

puisse, sans erreur appréciable, remplacer $\sin \alpha$ par $\tan \alpha$, c'est-à-dire par la pente I de la ligne d'eau AC; alors :

$$\frac{\omega}{\chi} I = f(U).$$

Le rapport $\frac{\omega}{\chi}$ de la section d'écoulement au périmètre mouillé se désigne habituellement par R et s'appelle *rayon moyen*; on a donc enfin :

$$RI = f(U).$$

Telle est l'équation fondamentale de l'écoulement uniforme de l'eau dans les canaux découverts; la fonction $f(U)$ étant connue, elle établit une relation entre les trois quantités R , I , U , et permet de déterminer l'une quelconque d'entre elles en fonction des deux autres. Toute la question revient donc à connaître $f(U)$.

131. Formules anciennes. — La forme la plus ancienne de la fonction $f(U)$ a été proposée par Prony, en 1804, dans son mémoire sur le mouvement des eaux courantes.

De l'examen des vingt-trois expériences effectuées par Dubuat sur des canaux en bois de petite section, et de celle exécutée par Chézy sur la rigole de Courparlet (canal d'Orléans), Prony crut pouvoir déduire comme pour les tuyaux :

$$f(U) = aU + bU^2,$$

avec :

$$a = 0,000044, \quad b = 0,000309.$$

Bien que d'origine expérimentale, cette formule ne fournit que de médiocres résultats; les tables calculées par Prony à l'aide des coefficients ci-dessus ne sont plus employées depuis longtemps.

Vers 1815, Eytelwein, prenant comme point de départ soixante expériences nouvelles exécutées par Woltmann, Funk et Brünings sur le Rhin et le Weser, proposa pour a et b les valeurs un peu différentes :

$$a = 0,000024, \quad b = 0,000365.$$

La formule d'Eytelwein a longtemps été utilisée par les ingénieurs, qui lui accordaient plus de confiance qu'à celle de Prony; elle est abandonnée depuis les travaux de M. Bazin.

Pour un canal large et profond, lorsque la pente est faible, on obtient des résultats assez exacts avec la formule de Tadini :

$$f(U) = 0,0004U^2,$$

qui a l'avantage d'être monôme et de se prêter facilement aux calculs numériques,

De l'équation :

$$RI = 0,0004U^2,$$

on déduit facilement :

$$U = 50 \sqrt{RI}.$$

L'expression d'Eytelwein revient sensiblement à :

$$U = 32 \sqrt{RI}.$$

Barré de Saint-Venant a présenté la formule :

$$f(U) = 0,0004U^{\frac{21}{11}},$$

qui équivaut à celle de Prony, avec cet avantage qu'elle est calculable par logarithmes et qu'il est facile de la traduire en abaque.

Les formules anciennes, sauf celle de Tadini que l'on utilise quelquefois pour les avant-projets, sont complètement délaissées aujourd'hui; elles ont le grave défaut de supposer constante la résistance due à la rugosité des parois, alors qu'il est nettement établi par les expériences de M. Bazin que cette rugosité varie dans des limites très étendues, suivant les matériaux ou le terrain qui constituent le lit du canal. Ces formules ne fournissent des chiffres acceptables que pour les cours d'eau importants ayant un mouvement lent et régulier.

132. Formule de M. Bazin. — Les premières expériences de Darcy et de M. Bazin ont été exécutées sur une rigole détachée du canal de Bourgogne, de 1855 à 1859; elles ont porté sur des canaux à parois en bois, ciment, pierre de

taille, briques, maçonnerie de moellons, terre, avec des sections variables de forme et de grandeur, et des pentes comprises entre 0,001 et 0,10.

Après le départ de Darcy, les expériences ont été méthodiquement poursuivies par M. Bazin sur les canaux et aqueducs existant en France. D'autres observations ont également été faites en Angleterre, en Allemagne, en Italie, aux États-Unis, sur des ouvrages récents de grandes dimensions, à sections rectangle, trapèze, circulaire, demi-circulaire, etc...

De l'étude comparative des résultats fournis par plus de 700 expériences, M. Bazin a déduit la formule :

$$U = \frac{87 \sqrt{Ri}}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$$

γ est un coefficient qui dépend de la nature des parois.

Pour appliquer sa formule, M. Bazin classe les parois en six catégories auxquelles correspondent des valeurs différentes de γ .

CATÉGORIES	γ	NATURE DES PAROIS
N° 1.....	0,06	<i>Parois très unies. Ciment lissé, bois raboté.</i>
N° 2.....	0,16	<i>Parois unies. Planches, briques, pierres de taille, etc.</i>
N° 3.....	0,46	<i>Parois en maçonnerie de moellons.</i>
N° 3 bis....	0,85	<i>Parois de nature mixte. Sections en terre très régulières, rigoles revêtues de perrés, etc.</i>
N° 4.....	1,30	<i>Canaux en terre. Dans des conditions ordinaires.</i>
N° 5.....	1,75	<i>Canaux en terre. Présentant une résistance exceptionnelle: fonds de galets, parois herbées, etc.</i>

La formule peut s'écrire :

$$Ri = \left[\frac{1}{87} \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}} \right) \right]^2 U^2;$$

elle revient donc à poser :

$$f(U) = \left[\frac{1}{87} \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}} \right) \right]^2 U^2.$$

On voit que la résistance développée par les parois du canal dépend de γ et de R , c'est-à-dire de la structure de ces parois et de la forme de la section d'écoulement.

La table XIII donne les valeurs du rapport $\frac{U}{\sqrt{RI}}$ et celles de son inverse, d'après les coefficients γ de M. Bazin.

133. Autres formules. — La formule de M. Bazin est la seule usitée en France depuis trente ans; tous les canaux de construction récente, la plupart des aqueducs de captage, ont été établis d'après cette formule, et aucun mécompte n'a été signalé jusqu'à ce jour.

Il existe beaucoup d'autres formules préconisées par divers ingénieurs français et étrangers; quelques-unes fournissent des résultats satisfaisants:

M. Gauckler a proposé pour les canaux dont la pente est inférieure à 0^m,70 par kilomètre la relation :

$$U = CR^{\frac{1}{3}} I,$$

et pour ceux dont la pente est supérieure à 0^m,70 :

$$U = CR^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{2}};$$

C et C' sont des constantes. Ces formules ne sont pas entrées dans la pratique.

Hagen avait indiqué l'expression :

$$U = 2.43 R^{\frac{1}{3}} I^{\frac{1}{6}},$$

qui n'est guère plus exacte que celle de Tadini (131).

En Allemagne, en Angleterre et aux États-Unis, on applique de préférence la formule de Ganguillet et Kutter, qui n'est autre chose que l'équation $U = C \sqrt{RI}$, avec :

$$C = \frac{23 + \frac{0.00155}{I} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0.00155}{I} \right) \frac{n}{\sqrt{R}}};$$

on voit que le coefficient C est rendu dépendant du rayon moyen R , de la pente I , et du degré de rugosité des parois, d'après la valeur de n .

NATURE DES PAROIS	n	$\frac{1}{n}$
<i>Parois très unies. Ciment lissé, bois raboté.....</i>	0,010	100
<i>Parois unies. Pierres taillées, briques</i>	0,013	77
<i>Parois peu unies. Maçonnerie de moellons</i>	0,017	58
<i>Parois rugueuses. Moellons bruts.....</i>	0,020	50
<i>Parois en terre</i>	0,025	40
<i>Parois en gravier. Plantes aquatiques</i>	0,030	33
<i>Parois en gravier. Irrégulières et mal entretenues.</i>	0,035	29
<i>Parois très irrégulières.</i>	0,040	25

La formule de Kutter fournit de bons résultats pratiques, aussi bons en général que ceux que donne l'équation de M. Bazin. On peut en dire autant de la formule de l'ingénieur anglais Manning, analogue à celle de Gauckler :

$$U = C_1 R^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{2}},$$

dans laquelle le facteur variable C_1 a la valeur $\frac{1}{n}$ qui entre dans l'expression de Kutter ; par exemple, pour des parois en briques, $C_1 = 77$. Cette formule se met sous la forme $U = C \sqrt{RI}$, en faisant :

$$C = C_1 \sqrt[3]{R}.$$

Voir les tables XIV et XV de Kutter et de Manning, qui facilitent les calculs numériques.

134. Répartition des vitesses. — La connaissance de la loi de répartition des vitesses dans la section d'un canal a une certaine importance pratique, principalement pour les grands cours d'eau dont on détermine le débit par la mesure des vitesses.

Cette question a fait l'objet d'expériences nombreuses exécutées principalement par M. Bazin sur les rigoles du canal de Bourgogne, sur la Seine et sur la Saône, par M. Cunningham sur le canal du Gange, et MM. Humphreys et Abbot sur le Mississipi.

De toutes ces expériences il semble clairement résulter que les lois réelles sont extrêmement compliquées, variables

suisant les cas, et qu'il ne faut guère songer à les traduire en formules générales.

Sur une horizontale perpendiculaire à l'axe du canal, la vitesse est maximum près du milieu et diminue constamment lorsqu'on se rapproche du bord ; la diminution, d'abord assez lente, devient plus rapide près des rives, et très rapide contre les rives.

Toute augmentation dans la profondeur accroît la vitesse et inversement.

Sur une verticale la vitesse maximum des filets ne se

trouve que très rarement à la surface libre ; l'écart dépend du rapport de la profondeur du canal à sa largeur ; cette vitesse se rencontre ordinairement à une certaine distance au-dessous pouvant atteindre le tiers de la profondeur.

Les figures ci-contre montrent, d'après M. Bazin, la position des courbes d'égalité vitesse dans deux canaux rectangulaires

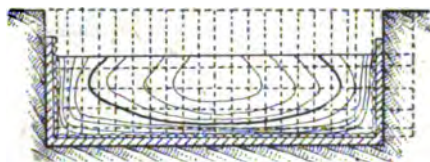


FIG. 421.

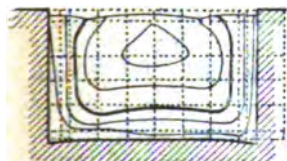


FIG. 422.

de profondeurs différentes ; les cotes des courbes vont en augmentant du centre à la périphérie. On voit que les lignes rencontrent obliquement la surface libre, et que l'angle d'incidence diminue lorsqu'on se rapproche du centre ; quelques courbes tendent à se refermer.

La vitesse maxima subsiste à une plus grande profondeur sur la seconde figure.

Dubuat croyait que la diminution de vitesse des filets superficiels provenait uniquement de la résistance de l'air ; il est établi aujourd'hui par des observations précises que cette cause, supposée réelle, n'est pas la seule, car le ralentissement a été constaté sur plusieurs canaux, alors que soufflait un fort vent d'amont à l'aval qui aurait dû produire à la surface un excès de vitesse.

Suivant M. Bazin, la diminution serait due à la production au voisinage de la surface de mouvements irréguliers, de toute espèce, de perturbations, qui se traduiraient par une déperdition notable de force vive et de vitesse. Ces perturbations seraient d'autant plus accusées que les vitesses seraient moindres.

Soit v la vitesse en un point situé à la profondeur z au-dessous de la surface libre, V la vitesse maximum pour la verticale du même point; cette vitesse maximum se produit en un point pour lequel la profondeur est z' , et les observations de M. Bazin ont montré que l'on pouvait poser en général :

$$v = V - \theta (z - z')^2;$$

θ est un coefficient numérique variable avec la verticale considérée et avec le profil du cours d'eau.

On voit que la loi de variation des vitesses sur une même verticale est représentée par une parabole du second degré à axe horizontal.

Defontaine, dans ses observations sur un bras du Rhin, à Kehl, avait trouvé une loi analogue.

Lorsque la largeur du canal est très grande par rapport à sa profondeur h , l'influence des parois diminue, et les courbes d'égale vitesse deviennent presque horizontales. Pour ce cas particulier, qui ne s'applique qu'aux larges fleuves, θ se détermine par la relation empirique :

$$\theta = \frac{k}{h^2} \sqrt{hI},$$

le coefficient k étant voisin de 24; on a alors :

$$v = V - \frac{k}{h^2} \sqrt{hI} (z - z')^2. \quad (1)$$

Cette formule présente une certaine analogie avec celle indiquée pour les tuyaux (106), et l'on pourra démontrer par

une analyse identique que le frottement des couches liquides concentriques est proportionnel à la vitesse relative $\frac{dv}{dz}$.

Pour un canal rectangulaire de dimensions restreintes, cas ordinaire de la pratique, M. Bazin substitue à la formule (1) la relation :

$$U = V - 14\sqrt{RI}; \quad (2)$$

U est la vitesse moyenne pour toute la section transversale, V la vitesse maximum sur la verticale du milieu du courant, I la pente du canal, R le rayon moyen de la section.

Cette relation donne, en posant $RI = bU^2$, c'est-à-dire

$$b = \left[\frac{1}{87} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{R}} \right) \right]^2 \quad (132)$$

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{1 + 14\sqrt{b}}$$

Le tableau ci-après fait connaître les valeurs du rapport $\frac{U}{V}$ en fonction de R, pour les diverses natures de parois.

R en MÈTRES	VALEURS DU RAPPORT $\frac{U}{V}$				
	CIMENT LISSÉ BOIS RABOTÉ	PIERRES TAILLÉES BRIQUES BOIS NON RABOTÉ	MAÇONNERIE DE MOELLONS	PAROIS EN TERRE	CAILLOUX BOULÉS
0,10	0,84	0,80	0,71	0,54	0,45
0,20	0,85	0,82	0,76	0,61	0,53
0,30	0,85	0,82	0,77	0,65	0,58
0,40	0,85	0,83	0,78	0,68	0,64
0,50	0,85	0,83	0,79	0,70	0,63
0,70	0,85	0,83	0,80	0,72	0,66
1,00	0,85	0,83	0,81	0,74	0,68
1,50	0,85	0,84	0,81	0,76	0,71
2,00	0,85	0,84	0,81	0,77	0,72
3,00	0,85	0,84	0,82	0,78	0,73
4,00	0,85	0,84	0,82	0,79	0,75
5,00	0,85	0,84	0,82	0,79	0,76
6,00	0,85	0,84	0,82	0,80	0,76

135. Formules de Prony. — Dans les applications pratiques, on ne considère ordinairement pour un canal que trois vitesses qui s'appliquent à la section totale : la vitesse

moyenne U , la vitesse V que l'on observe vers le milieu du courant, la vitesse de fond W qui ne doit pas dépasser une certaine limite pour que le terrain ne soit pas entraîné.

Entre ces trois vitesses, Prony avait indiqué les relations empiriques :

$$U = 0,80V, \quad W = 0,60V.$$

Ces formules sont assez approchées pour des canaux dans des conditions ordinaires; on les utilise encore quelquefois, mais la première offre moins de sécurité que la formule (2) de M. Bazin.

136. Limites de la vitesse moyenne. — Une vitesse trop faible favorise la végétation des plantes aquatiques et la production de dépôts, qui finissent avec le temps par obstruer le lit et entraînent à de grandes dépenses d'entretien.

Si la vitesse est trop considérable, les berges du canal risquent d'être corrodées par l'eau, ce qui amènerait des éboulements et des fuites. Sur le canal de Carpentras, la vitesse moyenne approche de 2 mètres, chiffre exagéré, attendu que les parties du canal qui ne sont pas revêtues s'éboulent fréquemment.

D'après Belgrand, lorsque l'eau charrie du fin limon, la vitesse moyenne ne doit pas être inférieure à 0,25 par seconde; pour empêcher le gros limon et le sable de se déposer, il faut une vitesse minima de 0,50.

Avec des eaux claires, on peut admettre, pour les rigoles en terre, des vitesses de 0,40 à 0,70, suffisantes pour éviter les dépôts, et assez fortes pour s'opposer à la pousse des joncs qui encombrant le lit et gênent l'écoulement.

D'après M. Debaube, la vitesse peut varier de 0,30 à 0,70 avec des parois non revêtues, de 0,70 à 1,20 lorsqu'il y a un revêtement.

Dans les aqueducs, où l'on a souvent intérêt à ménager la pente pour recevoir l'eau à un niveau aussi élevé que possible, et où le développement des herbes n'est pas à redouter, on peut descendre jusqu'à 0,30; mais il ne faut guère dépasser 1,20.

Dans les égouts, les grandes vitesses sont avantageuses pour l'entraînement des vases fluentes et du sable; on doit

éviter les variations brusques qui provoquent des remous et des dépôts.

Pour que les vases ne séjournent pas sur les radiers en maçonnerie, il faut que la pente soit au moins de 0,005 par mètre. Les matières plus lourdes, telles que les sables, s'arrêtent lorsque la pente n'est pas supérieure à 0,01, et l'on n'en trouve plus quand elle atteint 0,015.

Le tableau ci-dessous indique les vitesses maxima au delà desquelles les différents terrains commencent à s'affouiller :

NATURE DU LIT	VITESSES		
	MOYENNE	A LA SURFACE	DE FOND
Terres détrempées et terres glaises.	0,11	0,15	0,08
Argiles grasses.....	0,23	0,30	0,16
Sables.....	0,46	0,60	0,31
Graviers.....	0,91	1,22	0,70
Pierres cassées.....	1,23	1,52	0,94
Schistes tendres, poudingues.....	1,86	2,22	1,49
Roches en couches.....	2,27	2,75	1,82
Roches dures.....	3,09	4,27	3,14

PENTES ET VITESSES DE QUELQUES CANAUX ET AQUEDUCS

DÉSIGNATION DES OUVRAGES	PENTE par KILOMÈTRE	VITESSE MOYENNE	NATURE DU TERRAIN OU DES PAROIS
Canal de Craponne.....	mètre 1,00	mètre »	Plaine d'alluvions.
— Marseille.....	0,30 à 0,70	1,00	Terre et rocher.
— Carpentras.....	0,20 à 0,40	0,77 à 2,00	Terre végétale, calcaire fissuré.
— Saint-M. rtoiy.....	0,54	0,50	Argile.
— Verdon.....	0,15 à 0,20	0,76	Roches calcaires.
— Nèste.....	0,20	0,50	Argile, poudingue, rocher.
— Beaucaire.....	0,20 à 0,10	0,37	Plaine d'alluvions.
— Laroche.....	0,20	0,51	Roches calcaires.
— l'Oureq.....	0,12	0,40	Terre.
Aqueduc de la Dhuis.....	0,10	0,36	Maçonnerie de meulière avec enduit de 0,02.
— l'Avre.....	0,30	1,60	Maçonnerie de meulière avec enduit de 0,02.
— Naples.....	0,50	0,90	Maçonnerie de moellons avec enduit de 0,015.
— Montpellier.....	0,25	0,80	Maçonnerie de moellons avec enduit de 0,015.
— Croton (New-York).....	0,21	0,72	

137. Inclinaison des berges. —

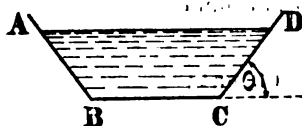


FIG. 424.

Ordinairement, la section transversale des canaux présente la forme d'un trapèze isocèle ABCD, quelquefois d'un rectangle, dont les côtés non parallèles AB et CD sont plus ou moins inclinés sur l'horizon.

Cette inclinaison variable se détermine dans chaque cas d'après la nature du terrain dans lequel doit être établi le canal.

Voir le tableau ci-dessous pour les valeurs limites de θ .

NATURE DES PAROIS	θ	cotg θ
Murs de soutènement.....	63° 26'	0,500
Terrains fermes à parois avec revêtement.....	45°	1,000
Terrains fermes à parois sans revêtement.....	33° 41'	1,500
Terres meubles ou légères, sables.....	26° 34'	2,000

La section des aqueducs est généralement rectangulaire, ou circulaire, quelquefois ovoïde.

Pour familiariser le lecteur avec les formules précédentes et l'emploi des tables, nous développerons la solution des problèmes qui se présentent le plus fréquemment dans la pratique.

138. PROBLÈME I. — Connaissant les dimensions de la section d'eau d'un canal, et sa pente, calculer le débit et la vitesse moyenne.

Désignons par :

l , la largeur BC au plafond;

h , la profondeur d'eau CE;

θ , l'angle d'inclinaison de CD;

I , la pente par mètre;

Q , le débit en mètres cubes par seconde;

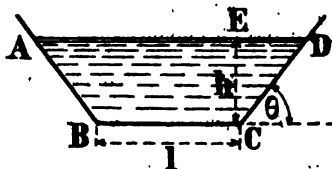


FIG. 425.

ω , la section d'eau ABCD;

χ , le périmètre mouillé $AB + BC + CD$;

l, h, θ, i sont les données, Q et U les inconnues.

La figure donne immédiatement :

$$ED = h \cotg \theta, \quad h = CD \sin \theta;$$

on en déduit pour l'aire ω :

$$\omega = \frac{h}{2} (l + l + 2h \cotg \theta),$$

ou encore :

$$\omega = h(l + h \cotg \theta), \quad (m)$$

et pour le périmètre mouillé χ :

$$\chi = l + \frac{2h}{\sin \theta}. \quad (n)$$

Ces deux relations permettent de calculer le rayon moyen

$R = \frac{\omega}{\chi}$; la table de M. Bazin fournit ensuite la valeur corres-

pondante de $\frac{U}{\sqrt{RI}}$, de laquelle on déduit U .

On a enfin l'équation du débit :

$$Q = \omega U,$$

qui fait connaître Q .

EXEMPLES. — 1° Calculer le débit d'un canal à section trapèze dont les parois sont en terre et font un angle de 45° avec l'horizon.

La largeur au plafond égale 2,00; le tirant d'eau est de 1,00 et la pente de 0,50 par kilomètre.

On a d'après les données :

$$\begin{aligned} \theta &= 45^\circ, & \cotg \theta &= 1, & \sin \theta &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ l &= 2,00, & h &= 1,00, & i &= 0,0005. \end{aligned}$$

On trouve avec (m) et (n) :

$$\omega = 1,00 \times 3,00 = 3,00.$$

$$\chi = 2,00 + 2,828 = 4,828;$$

puis :

$$R = \frac{3,00}{4,828} = 0,62.$$

Pour ce rayon moyen et des parois en terre, quatrième caté-

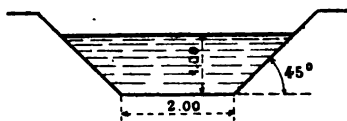


FIG. 426.

gorie, la table de M. Bazin accuse :

$$\frac{U}{\sqrt{RI}} = 32,7,$$

d'où l'on tire :

$$U = 32,7 \times \sqrt{0,62 \times 0,0005};$$

effectuant les calculs :

$$U = 0,58.$$

Cette vitesse moyenne fournit un débit :

$$Q = 3,00 \times 0,58 = 1,740 \text{ litres par seconde.}$$

D'après le tableau de M. Bazin, la *vitesse maximum* vaut :

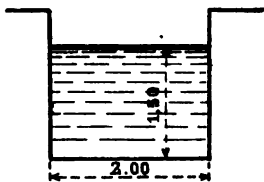


FIG. 427.

$$V = \frac{0,58}{0,71} = 0,82.$$

On trouverait avec les formules de Prony :

$$V = \frac{0,58}{0,80} = 0,73,$$

$$W = 0,60 \times 0,73 = 0,44.$$

2° Si la section du canal était un rectangle de 2 mètres de base et de 1,50 de hauteur, on aurait :

$$\omega = 2,00 \times 1,50 = 3,00,$$

$$\chi = 2,00 + 3,00 = 5,00,$$

$$R = \frac{3,00}{5,00} = 0,60.$$

La table de M. Bazin indiquerait :

$$\frac{U}{\sqrt{RI}} = 32,5,$$

puis :

$$U = 32,5 \times \sqrt{0,60 \times 0,0003} = 0,56.$$

Enfin :

$$Q = 3,00 \times 0,56 = 1.680 \text{ litres.}$$

139. Trapèze de débit maximum. — Ayant fixé l'angle θ , on peut évidemment, pour un trapèze d'aire ω , faire varier la largeur inférieure l et la profondeur h ; autrement dit, il existe une infinité de valeurs simultanées des dimensions l et h qui assurent à la section ABCD une même aire ω .

D'après cela, on conçoit qu'il y ait généralement intérêt à choisir la section qui donne le plus grand rayon moyen, c'est-à-dire la plus grande vitesse, et, par suite, le débit maximum.

Présentée sous cette forme, la question n'est qu'un cas particulier du problème des isopérimètres étudié par Lagrange; en effet, si l'on pose $\frac{U}{\sqrt{RI}} = C$, on a $U = C \sqrt{RI}$, d'où l'on déduit :

$$Q = C\omega \sqrt{RI}.$$

On voit que Q est proportionnel à la racine carrée de R , et, par suite, inversement proportionnel à γ , puisque $R = \frac{\omega}{\gamma}$; de sorte que le maximum de Q correspond au minimum de γ .

Des relations (m) et (n), on déduit :

$$l = \frac{\omega}{h} - h \cot \theta, \quad (p)$$

$$\chi = \frac{\omega}{h} - h \cot \theta + \frac{2h}{\sin \theta};$$

les valeurs de h qui rendent χ minimum satisfont à l'équation dérivée :

$$\frac{d\chi}{dh} = -\frac{\omega}{h^2} + \frac{2 - \cos \theta}{\sin \theta} = 0,$$

d'où l'on tire immédiatement :

$$h = \sqrt{\frac{w \sin \theta}{2 - \cos \theta}} \quad (9)$$

Connaissant h , l'équation (p) permet de calculer l .

En cherchant à interpréter cette solution, on reconnaît que le trapèze ABCD doit être circonscrit à un demi-cercle ayant son centre O au milieu de AD. En effet, l'équation ci-dessus peut s'écrire :

$$w = h^2 \left(\frac{2}{\sin \theta} - \cotg \theta \right),$$

ou encore, d'après (m) :

$$l + 2h \cotg \theta = \frac{2h}{\sin \theta};$$

relation qui exprime que :

$$AD = 2DC, \quad \text{ou} \quad OD = DC.$$

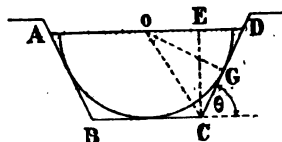


FIG. 428.

Le triangle ODC est donc isocèle, les deux hauteurs OG et CE sont égales, ce qui revient à dire que la circonférence décrite de O comme centre, avec OG pour rayon, touche les trois côtés AB, BC, CD.

On a d'ailleurs, dans ce cas :

$$R = \frac{h(l + h \cotg \theta)}{l + \frac{2h}{\sin \theta}},$$

ou, en transposant les termes et réduisant,

$$R = \frac{h}{2} \quad (t)$$

Dans la pratique, le profil rationnel ci-dessus n'est pas toujours rigoureusement appliqué; les difficultés spéciales provenant de la nature du terrain, celles qui peuvent surgir lors de la construction du canal pour l'exécution des déblais

et ensuite pour son entretien, imposent souvent l'obligation de restreindre la profondeur au-dessous d'une certaine limite, 2 ou 3 mètres par exemple. Une autre raison milite encore en faveur des faibles tirants d'eau, ce sont les pertes par infiltration qui augmentent avec la pression, et peuvent devenir considérables.

ANGLE θ	l	h	$h \cotg \theta$	LARGEUR supérieure $l + 2h \cotg \theta$	PÉRIMÈTRE mouillé z
90°.....	1,414	0,707	»	1,414	2,828
60°.....	0,877	0,760	0,439	1,755	2,732
45°.....	0,613	0,740	0,740	2,092	2,704
40°.....	0,525	0,722	0,860	2,246	2,771
36° 52'.....	0,471	0,707	0,948	2,357	2,828
35°.....	0,439	0,697	0,995	2,430	2,870
30°.....	0,436	0,664	1,150	2,636	3,012
26° 34'.....	0,300	0,636	1,272	2,844	3,144
1/2 cercle ...	»	0,798	»	1,596	2,507

Le tableau ci-dessus donne, pour différents angles θ , les valeurs les plus avantageuses de l , h , etc., par unité d'aire de la section d'eau du canal. Les dimensions pour une aire ω s'obtiennent en multipliant celles du tableau par $\sqrt{\omega}$.

Cas où la largeur au plafond reste constante. — On peut traiter le même problème en considérant comme constante non plus l'inclinaison θ , mais la largeur l ou la profondeur d'eau h ; ces deux cas offrent moins d'intérêt pratique que celui qui précède.

Pour une largeur constante, la différentiation des expressions (m) et (n) donne, en observant que $d\omega$, dl , dx sont nulles :

$$ldh + 2h \cotg \theta dh - \frac{h^2 d\theta}{\sin^2 \theta} = 0,$$

$$\frac{dh}{h} - \frac{\cotg \theta d\theta}{\sin^2 \theta} = 0;$$

de la seconde équation on tire :

$$dh = h \cotg \theta d\theta,$$

transportant dans la première et simplifiant, il vient :

$$l \cotg \theta + 2h \cotg^2 \theta - h (1 + \cotg^2 \theta) = 0,$$

d'où l'on déduit facilement :

$$\cotg 2\theta = -\frac{l}{2h}.$$

C'est la relation qui doit exister entre l , θ , h , pour que le débit maximum se produise; on voit que l'angle θ augmente en même temps que la largeur au plafond.

Si cette largeur était nulle, le même résultat serait obtenu pour $\cotg 2\theta = 0$, ou $\theta = 45^\circ$; c'est-à-dire que la section triangle de périmètre minima est un demi-carré.

Cas d'une hauteur constante. — Le calcul est analogue; on trouve comme plus haut :

$$\begin{aligned} dl - \frac{hd\theta}{\sin^2 \theta} &= 0, \\ dl - \frac{2h \cos \theta d\theta}{\sin^2 \theta} &= 0; \end{aligned}$$

éliminant dl et $d\theta$, on obtient l'équation :

$$2 \cos \theta - 1 = 0,$$

qui donne :

$$\cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \theta = 60^\circ.$$

Dans une section trapèze de hauteur et de surface données, le périmètre minimum est obtenu lorsque les côtés non parallèles sont inclinés de 60° sur l'horizon.

140. PROBLÈME II. — *Connaissant les dimensions de la section d'écoulement d'un canal qui doit débiter un volume d'eau déterminé, calculer la pente de ce canal et la vitesse de l'eau.*

Les dimensions connues permettent de calculer l'aire ω de la section, le périmètre mouillé χ et le rayon moyen R .

On a d'autre part :

$$Q = \omega U,$$

équation qui donne :

$$U = \frac{Q}{\omega}.$$

Avec R , U et la table, on obtient facilement I .

EXEMPLE. — *Un canal à parois maçonnées en moellons a 4 mètres de largeur au plafond, 1^m,80 de tirant d'eau, et porte*

13 mètres cubes par seconde; les berges sont inclinées à $\frac{1}{2}$. Calculer la pente du canal et la vitesse de l'eau.

On a :

$$l = 4,00, \quad h = 1,80, \quad Q = 13,00, \\ \cotg \theta = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = 0,89, \quad \theta = 63^{\circ} 26'.$$

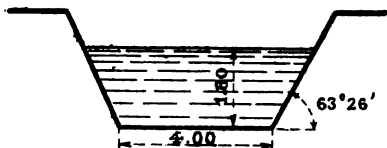


FIG. 429.

Le sinus se calcule avec une table de fonctions circulaires ou par la formule :

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 \theta}}.$$

Les formules (m) et (n) donnent :

$$\omega = 1,80 (4,00 + 0,90) = 8,82, \\ \chi = 4,00 + \frac{3,60}{0,89} = 8,04,$$

puis :

$$R = \frac{8,82}{8,04} = 1,10.$$

D'autre part :

$$U = \frac{13,00}{8,82} = 1,47.$$

Pour $R = 1,10$, la table de M. Bazin, troisième catégorie indique :

$$\frac{\sqrt{RI}}{U} = 0,0165,$$

d'où :

$$\sqrt{RI} = 0,0165 \times 1,47;$$

enfin :

$$I = \frac{0,0165 \times 1,47^2}{1,10} = 0,00053.$$

La pente du canal est de 0^m,53 par kilomètre.

141. Pente d'un canal de dérivation. — On peut soumettre au calcul la pente d'un canal de dérivation, au numéro 91, nous avons résolu ce problème pour une conduite forcée.

Au point de vue théorique, la question se présente de la façon suivante : En un point A d'un cours d'eau dont on connaît la pente, on veut ouvrir un canal pour dériver un volume d'eau déterminé vers un point M d'une altitude connue. Il s'agit de fixer l'emplacement exact de la prise A et la pente du canal projeté.

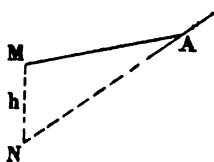


FIG. 430.

Lorsqu'on éloigne la prise d'eau du point M en remontant le cours d'eau, on augmente la longueur du canal et sa pente, mais sa section transversale se trouve diminuée. Les circonstances

inverses se produisent lorsqu'on descend la prise A vers l'aval ; on accroit la section, puisque la pente devient plus faible, mais on gagne sur la longueur.

Comme la dépense de construction d'un canal est sensiblement proportionnelle à sa longueur, on est conduit à penser qu'il existe une combinaison de pente et de section plus avantageuse que toutes les autres.

Pour déterminer cette combinaison, appelons :

h , la hauteur du point M au-dessus de la ligne de pente AN du cours d'eau, supposée prolongée jusqu'à la verticale de ce point ;

p , le prix du mètre linéaire de canal par unité d'aire de la section transversale, pour acquisitions de terrains et construction ;

ω , l'aire de cette section ;

I , la pente ;

l , la longueur totale du canal ;

I' , la pente du cours d'eau au voisinage de la prise A.

h , p , I' sont des données, I et l représentent les inconnues.

La dépense d'établissement qu'il importe de rendre minima a pour expression :

$$P = pol.$$

On tire d'abord du triangle AMN :

$$h = l(I' - I),$$

si ω représente la pente de la ligne AN , et l celle de AM .
D'autre part, si la section du canal est un trapèze de débit maximum, des formules (9) et (1) donnent :

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \sin \theta}{2 - \cos \theta}}.$$

Posons pour abréger :

$$m = \frac{1}{4} \frac{\sin \theta}{2 - \cos \theta};$$

il vient :

$$R^2 = m\omega. \quad (\alpha)$$

L'équation :

$$RI' = bU^2 = \frac{bQ^2}{\omega^2},$$

donne avec (α) :

$$I = \frac{m^2 b Q^2}{R^3};$$

posons encore :

$$m^2 b Q^2 = \rho^2 I', \quad (\beta)$$

alors :

$$I = \frac{\rho^2}{R^3} I'. \quad (\gamma)$$

L'équation (β) permet de calculer ρ . On suppose b constant, ce qui donne une approximation; le calcul avec b variable serait très compliqué et ne modifierait guère les conclusions.

L'expression de P devient, en remplaçant l et ω par leurs valeurs tirées des relations précédentes :

$$P = p\omega \frac{h}{I' - I},$$

ou bien :

$$P = \frac{pR^2}{m} \frac{h}{I' - L};$$

enfin :

$$P = \frac{ph\rho^5}{m^2 b Q^2} \frac{R^7}{R^5 - \rho^5}.$$

Le second membre de cette formule ne contient plus que R

comme variable; pour que P soit minima, il faut que R satisfasse à l'équation dérivée $\frac{dP}{dR} = 0$, c'est-à-dire :

$$7(R^3 - r^3) - 5R^3 = 0,$$

ou encore :

$$R^3 = \frac{7}{2} r^3;$$

d'après (7), cette condition équivaut à :

$$I = \frac{2}{7} I'.$$

La pente la plus économique pour un canal de dérivation égale les deux septièmes de celle du cours d'eau au voisinage de la prise.

Connaissant I , on obtient la longueur l :

$$l = \frac{h}{I' - I} = \frac{7h}{5I'}.$$

Pour un canal rectangulaire de largeur L et de profondeur H , on aurait :

$$\omega = HL,$$

puis, comme précédemment :

$$I = \frac{bQ^2}{RH^2L^2}.$$

Admettons, pour simplifier, que le rayon moyen reste sensiblement constant, ainsi que la profondeur. Posons :

$$\frac{bQ^2}{RH^2} = \lambda^2 I',$$

alors :

$$I = \frac{\lambda^2}{L^2} I'; \quad (7)$$

on trouve enfin :

$$P = \frac{\rho H^3 \lambda^2 R h}{b Q^2} \frac{L^2}{L^2 - \lambda^2}.$$

L'élément variable est ici la largeur L ; l'équation dérivée $\frac{dP}{dL} = 0$ donne :

$$L^2 - 3\lambda^2 = 0,$$

et d'après (φ) :

$$I = \frac{I'}{3}.$$

Dans la seconde hypothèse, la pente la plus économique pour le canal égale le tiers de celle du cours d'eau alimentaire.

On voit que, pratiquement, les pentes I et I' doivent être liées entre elles par la relation approchée $I = 0,30I'$.

142. PROBLÈME III. — *Connaissant la figure de la section transversale d'un canal et sa pente, calculer la profondeur d'eau qui correspond à un débit donné.*

On donne l , θ , I , Q , il faut calculer h . Ce problème peut se résoudre directement en partant des relations (m) et (n); mais l'équation finale en h est du sixième degré, et sa résolution est fort compliquée. Il vaut mieux procéder par tâtonnements, comme nous allons l'indiquer par un exemple.

EXEMPLE. — Considérons un canal à parois en terre sans revêtement, dont les éléments sont :

$$\begin{aligned} l &= 2,00, & \cotg \theta &= 2, & Q &= 0,900, \\ I &= 0,0002; \end{aligned}$$

cherchons la profondeur d'eau.

Pour opérer par tâtonnements, supposons d'abord que la profondeur soit de 1 mètre, et calculons le débit du canal; si cette profondeur fournit un volume d'eau supérieur à 0,900, on recommencera le calcul avec un chiffre moindre.

Il vient pour $h = 1,00$:

$$\begin{aligned} \omega &= 1,00 (2,00 + 2,00) = 4,00, \\ \chi &= 2,00 + 2 \times \sqrt{5} = 6,48, \\ R &= \frac{4,00}{6,48} = 0,62; \end{aligned}$$

La table donne pour ce rayon moyen et des parois en terre :

$$\frac{U}{\sqrt{RI}} = 32,7,$$

par suite :

$$Q = 32,7 \omega \sqrt{RI} = 32,7 \times 4,00 \times \sqrt{0,62 \times 0,0002} = 1,451.$$

Ce débit étant trop élevé, faisons $h = 0,90$; on a cette fois :

$$\begin{aligned}\omega &= 0,90 (2,00 + 1,80) = 3,42, \\ \chi &= 2,00 + 1,80 \times \sqrt{5} = 6,03, \\ R &= \frac{3,42}{6,03} = 0,57, \quad \frac{U}{\sqrt{RI}} = 32;\end{aligned}$$

puis :

$$Q = 32 \times 3,42 \times \sqrt{0,57 \times 0,0002} = 1,170.$$

Comme ce débit est encore supérieur à 0,900, faisons $h = 0,80$; on trouve :

$$\begin{aligned}\omega &= 0,80 (2,00 + 1,60) = 2,88, \\ \chi &= 2,00 + 1,60 \times \sqrt{5} = 5,58, \\ R &= \frac{2,88}{5,58} = 0,52, \quad \frac{U}{\sqrt{RI}} = 31;\end{aligned}$$

enfin :

$$Q = 31 \times 2,88 \times \sqrt{0,52 \times 0,0002} = 0,902.$$

Ce résultat indique que la profondeur est égale à 0^m,80. Ordinairement, trois ou quatre essais suffisent pour obtenir la hauteur avec une approximation acceptable.

143. Abaques pour le calcul des canaux. — Ces abaques fournissent immédiatement les valeurs correspondantes de R , U , I , mais ne dispensent pas des opérations nécessaires pour calculer la section, le périmètre mouillé et le débit.

En outre, il faut que les dessins soient à une échelle assez grande, et que les graduations ne soient pas trop espacées, sinon l'approximation est insuffisante.

Il a été proposé divers abaques, par Collignon, Kutter, etc., dont les modes d'emploi sont plus ou moins compliqués. Le plus récent a été construit par M. d'Ocagne avec la formule de M. Bazin :

$$U = \frac{87 \sqrt{RI}}{1 + \frac{\chi}{\sqrt{R}}}$$

La figure 431 représente cet abaque.

MODE D'EMPLOI. — Ayant fait passer une droite par les points de l'échelle (γ) et de l'échelle (R), qui ont pour cotes les valeurs données de γ et de R, on fait pivoter cette droite autour du point où elle rencontre l'axe non gradué jusqu'à ce qu'elle passe par le point de l'échelle (I) ayant pour cote la valeur donnée à I. Elle rencontre alors l'échelle (U), en un point dont la cote est la valeur de U cherchée.

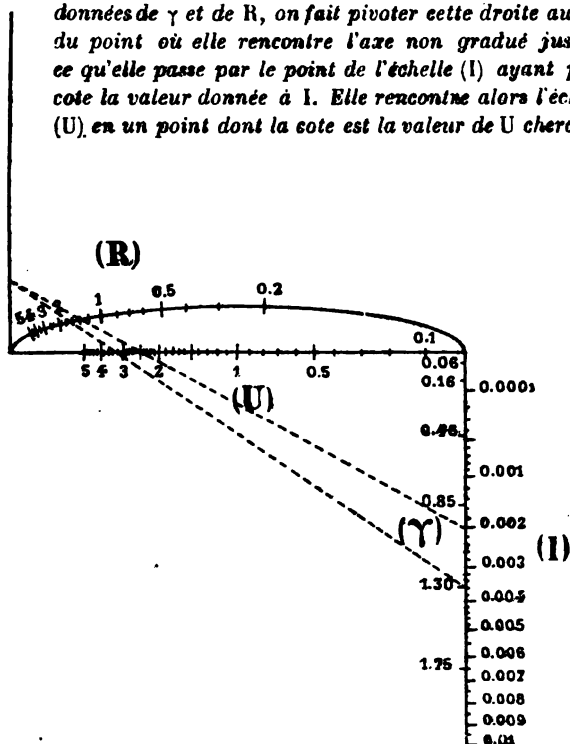


FIG. 431.

Nomenclature des γ

- $\gamma = 0,06$. — Parois très unies (ciment, bois raboté, etc.).
- $\gamma = 0,16$. — Parois unies (planches, briques, pierre de taille).
- $\gamma = 0,46$. — Parois en maçonnerie de moellons.
- $\gamma = 0,85$. — Parois de nature mixte (sections en terre très régulières, rigoles revêtues de perrés).
- $\gamma = 1,30$. — Canaux en terre dans les conditions ordinaires.
- $\gamma = 1,75$. — Canaux en terre présentant une résistance exceptionnelle (fonds de galets, parois herbées, etc.).

Les lignes pointillées de la figure correspondent aux données: $\gamma = 1,30$, $R = 1,60$, $I = 0,002$, desquelles on déduit $U = 2,40$. La même opération ferait connaître I si l'on se donnait U et R , ou R en fonction de U et I .

L'abaque (fig. 432) traduit graphiquement la formule de Ganguillet et Kutter très employée en Allemagne; v représente la vitesse moyenne et I la pente par mètre du canal; ce sont les quantités U et I . Le mode d'emploi est indiqué sur la figure.

144. Influence des herbes. — Lorsqu'on étudie le profil d'un canal projeté, qui doit porter un volume d'eau connu, il faut envisager l'altération plus ou moins grande que subira ce profil après la mise en eau du canal, par suite du dépôt des vases et du développement des plantes aquatiques.

Au canal de la Neste on a constaté, au bout de quelques mois de service, un débit effectif inférieur de près d'un quart au débit théorique qui avait servi pour le calcul de la section. Des réductions analogues variant du quart au cinquième ont été observées sur d'autres canaux.

L'influence des grandes herbes qui s'élèvent jusqu'à la surface de l'eau est surtout très sensible; leur présence occasionne une diminution de section et un accroissement de périmètre mouillé qui peut être considérable. La réduction du débit est d'autant plus forte que la vitesse d'écoulement est moindre.

C'est une sage précaution, quand on calcule la section transversale d'un canal, que de majorer d'un quart environ l'aire de cette section.

145. PROBLÈME IV. — On connaît le débit d'un canal et la vitesse moyenne de l'eau, calculer la section et la pente.

Des quantités connues Q et U , on déduit d'abord :

$$\omega = \frac{Q}{U}.$$

Plusieurs cas sont ensuite à considérer :

Si l'on peut choisir le trapèze de débit maximum, alors,

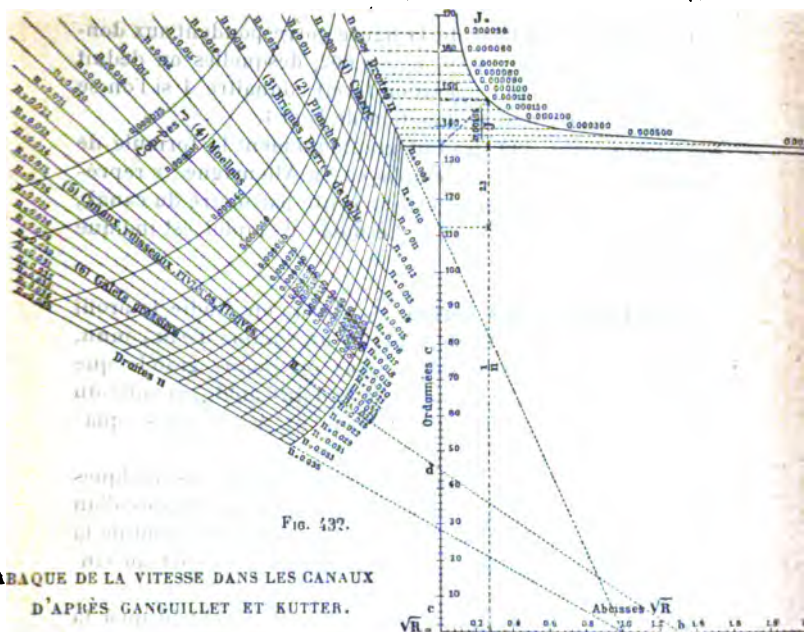


FIG. 432.

ABAQUE DE LA VITESSE DANS LES CANAUX
D'APRÈS GANGUILLET ET KUTTER.

Les droites n donnent le coefficient c en fonction de la nature de la paroi. Elles émanent toutes du point ayant pour abscisse $\sqrt{R} = 1$. Plus le lit est rugueux, plus les droites n se rapprochent de l'horizontale. Les courbes J montrent la variation du coefficient c d'après celle de la pente.

Étant donnés R, J, n , trouver c : le point \sqrt{R} pris comme abscisse et le point d'intersection de la courbe J avec la droite n déterminent une transversale qui détache sur l'axe des ordonnées un segment égal à c .

Ex. : Si $R = 1,7$ (c'est-à-dire $\sqrt{R} = 1,3$), $J = 0,0002$, $n = 0,025$, on obtient le point d en joignant a à b , et on lit $c = 45,3$.

Hyperbole d'ordonnées $\frac{0,00155}{J}$.

$$v = c \sqrt{RJ} = \left[\frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0,00155}{J}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{J} \right) \frac{n}{\sqrt{R}}} \right] \sqrt{RJ}.$$

c, J, n sont donnés, trouver R : le point d'intersection de la courbe J avec la droite n et le point c sur l'axe des ordonnées déterminent une droite qui rencontre l'axe des abscisses en un point qui n'est autre que \sqrt{R} .

c, R, n sont donnés, trouver J : le point \sqrt{R} sur l'axe des abscisses et le point c sur l'axe des ordonnées déterminent une droite qui coupe la droite donnée n en un point correspondant à la valeur cherchée J .

c, R, J sont donnés, trouver n : la droite joignant le point \sqrt{R} sur l'axe des abscisses et c sur l'axe des ordonnées coupe la courbe J donnée en un point correspondant à n cherché.

d'après les valeurs de ω et de l'angle θ , on calcule les longueurs l et h , et l'on se trouve ramené au problème II. L'angle θ doit être considéré comme une donnée qui dépend de la nature du terrain dans lequel doit être creusé le canal.

Lorsque des circonstances particulières obligent à limiter le tirant d'eau à une hauteur déterminée h , la connaissance de ω , θ , h permet de calculer l , et l'on rentre encore dans le problème II.

En général, le problème n'est déterminé qu'autant que l'on précise la forme de la section transversale.

EXEMPLE. — Supposons que les parois du canal soient en terre avec les données numériques :

$$\theta = 45^\circ, \quad Q = 1,200, \quad U = 0,50.$$

On trouve d'abord :

$$\omega = \frac{1,200}{0,50} = 2,40;$$

si l'on peut choisir le trapèze de débit maximum, alors :

$$l = 0,613 \times \sqrt{2,40} = 0,94.$$

$$h = 0,740 \times \sqrt{2,40} = 1,14,$$

$$\chi = 2,704 \times \sqrt{2,40} = 4,16.$$

Le rayon moyen a pour valeur :

$$R = \frac{2,40}{4,16} = 0,57;$$

pour ce rayon et des parois en terre, on relève dans la table :

$$\frac{U}{\sqrt{Rl}} = 32,$$

par suite

$$I = \frac{0,50^2}{32^2 \times 0,57} = 0,0004.$$

146. Les quatre problèmes que nous venons de développer sont ceux qui se présentent le plus ordinairement dans la pratique. On pourrait en trouver d'autres et multiplier les exemples numériques ; mais ces développements seraient peu utiles. Toutes les questions relatives au mouvement uni-

forme de l'eau dans les canaux se traitent de la même façon en combinant les équations (m) et (n) avec la table de M. Bazin. Dans chaque cas, le lecteur reconnaîtra immédiatement la meilleure façon de diriger ses calculs.

CALCUL DES AQUEDUCS

147. Les aqueducs de dérivation pour l'amenée des eaux potables dans les villes se calculent avec la formule des canaux. Le débit et la pente sont généralement connus, il faut déterminer la section d'écoulement et la vitesse; on opère comme au problème III. Lorsque la vitesse est donnée, c'est la pente qu'il faut calculer; mais le problème reste indéterminé tant que l'on ne précise pas la forme géométrique de la section de l'aqueduc.

Comme la paroi interne des aqueducs est ordinairement recouverte d'un enduit en ciment de 1 ou 2 centimètres d'épaisseur, on prend les coefficients des parois très unies, catégorie n° 1. Pour les aqueducs en béton et en briques, on prend les coefficients des parois unies.

La plupart des anciens aqueducs étaient à section rectangulaire, avec des dimensions souvent exagérées eu égard au volume d'eau qu'ils écoulaient. Les aqueducs de Rome, de Belleville, d'Arcueil et de Montpellier étaient de cette forme; ceux de Besançon (fig. 433) et de Vienne, construits il y a quelques années, le sont également.

Aujourd'hui, les sections circulaires et ovoïdes, ou leurs variantes, trapèze et segment de cercle combinés, semblent préférées pour les grands aqueducs et pour les égouts. Le

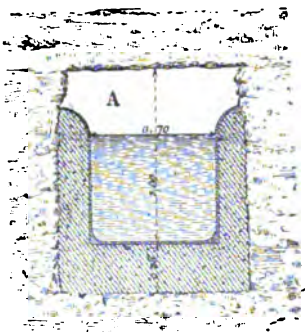


FIG. 433.

cube de la maçonnerie est proportionnel au périmètre, et, parmi toutes les figures de même périmètre, le cercle est celle dont la surface est maxima ; en outre, ces formes annulent les poussées horizontales aux naissances, circonstance favorable à la stabilité des ouvrages.

Le profil ovoïde est choisi de préférence pour les aqueducs qui portent un volume d'eau moyen, et que l'on veut faire assez hauts pour qu'un homme puisse s'y tenir debout.

148. Section rectangulaire. — Lorsque le profil est rectangulaire, les formules se simplifient et les calculs deviennent aussi plus simples.

On a :

$$\omega = lh,$$

$$\chi = l + 2h,$$

ce qui fournit le rayon moyen :

$$R = \frac{lh}{l + 2h}.$$

L'équation de M. Bazin donne ensuite, en posant $f(U) = bU^2$:

$$\frac{lhI}{l + 2h} = bU^2, \quad (\alpha)$$

avec

$$Q = l h U.$$

Le débit maximum se produit pour $l = 2h$ (139).

Lorsque le lit du canal est très large, et sa profondeur faible, on peut négliger h dans l'expression de χ . On pose alors :

$$\chi = l, \quad R = h,$$

et l'équation devient :

$$hI = bU^2.$$

Aqueduc d'Avallon. — L'aqueduc d'Avallon fut construit par Belgrand pour porter 12 litres par seconde avec une pente de 0^m,33 par kilomètre.

La section d'eau est un rectangle de 0^m,30 de base et de 0^m,15 de hauteur.

L'équation (α) donne pour $l = 2h$:

$$\frac{l}{4} l = \frac{4bQ^2}{l^4},$$

d'où l'on tire :

$$l^5 = \frac{16bQ^2}{1} \quad (\beta)$$

Faisant $Q = 0,012$, $l = 0,00033$, $b = 0,0004$, il vient :

$$l^5 = \frac{0,0064 \times 0,144}{0,33} = 0,0028,$$

équation dont la racine est $l = 0,31$; le calcul s'effectue rapidement avec la table XII.

L'emploi des tables de M. Bazin comporte une série de tâtonnements analogues à ceux du problème IV.

On évite les calculs fastidieux en cherchant par la formule (α) une première valeur de l , que l'on corrige ensuite au moyen des tables si cela est nécessaire. Pour $l = 0,31$, on trouve :

$$\omega = \frac{0,31^2}{2} = \frac{Q}{U} = 0,048 ;$$

D'où :

$$U = \frac{0,012}{0,048} = 0,25,$$

$$R = \frac{0,048}{0,62} = 0,077,$$

$$b = 0,000373 ;$$

enfin :

$$l = \frac{0,000373 \times 0,25^2}{0,077} = 0,00030.$$

Cette pente étant très voisine de 0,00033, on pourrait adopter la valeur $l = 0,31$; Belgrand a fait $l = 0,30$, ce qui donne une vitesse de 0,27.

Plus généralement, si l'on faisait $l = mh$, l'équation (α) deviendrait :

$$l^5 = \frac{8m^2(m+1)bQ^2}{1}.$$

Dans d'autres circonstances, le débit seul est connu, et le problème est indéterminé ; souvent alors on joute d'une certaine latitude quant à l'emplacement du réservoir d'aval, c'est-à-dire à la charge disponible. En pareil cas, c'est par une série de tâtonnements que l'on parvient à la combinai-



Fig. 434.

son de pente, de vitesse et de section qui convient le mieux au projet que l'on étudie. Mais, d'une manière générale, il est inutile de chercher les pentes considérables, car la vitesse d'écoulement n'est proportionnelle qu'à la racine carrée de cette quantité.

149. Section circulaire. — Dans les sections circulaires, l'angle au centre qui sous-tend le périmètre mouillé est ordinairement de 240° . Cet angle est recommandé par Dupuit pour ménager à la voûte un certain vide où l'air peut circuler; mais il ne correspond pas à la portée maxima de l'aqueduc, qui est obtenue lorsque l'angle est égal à 308° (153).

Connaissant la pente, le débit et l'angle qui sous-tend le périmètre mouillé, on peut calculer le rayon ρ d'un aqueduc circulaire, en procédant par approximations successives comme pour la section rectangulaire.

Supposons que l'arc mouillé ABC soit de 240° ; on relève pour cet arc dans une table de cercles:

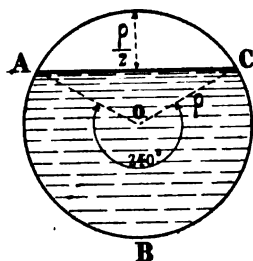


FIG. 425.

$$\chi = 4,19\rho, \quad \omega = 2,53\rho^2;$$

d'où :

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{2,53}{4,19} \rho = 0,60\rho.$$

Partant d'une première valeur de ρ , on déduit au moyen de ces formules les valeurs correspondantes de ω , χ , R , puis de U à l'aide de la table; avec U et ω , on obtient Q . Si le débit calculé est supérieur à celui de l'aqueduc, on recommence le calcul avec un rayon moindre. Quatre ou cinq essais suffisent pour obtenir ρ avec une approximation convenable.

Pour éviter des calculs fastidieux, on procède comme au précédent paragraphe. On a :

$$U = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q}{2,53\rho^2};$$

portant les valeurs de U et R dans l'équation $RI = bU^2$, on obtient :

$$0,607I = \frac{bQ^2}{2,53\rho^4},$$

d'où l'on tire :

$$\rho^3 = \frac{0,261bQ^2}{I}; \quad (\beta)$$

cette relation fournit un rayon approché que l'on corrige avec les tables si cela est nécessaire.

Pour des petits aqueducs en ciment, on fait $b = 0,0004$; pour des ouvrages moyens à parois unies: $b = 0,0003$; pour des grandes sections: $b = 0,0002$.

Au lieu de donner Q et I , on peut calculer Q en fonction de ρ et I , ou I en fonction de ρ et Q . La même équation fournit la solution de ces divers cas.

Aqueduc de l'Avre. — L'aqueduc de l'Avre fut construit en 1890 pour débiter 2.050 litres par seconde; le premier tronçon ayant une pente de 0^m,40 par kilomètre, son rayon est donné par l'équation :

$$\rho^3 = \frac{0,261 \times 0,0002 \times 2.050^2}{0,0004} = 0,538;$$

la racine est $\rho = 0,88$, pour $b = 0,0002$.

L'aqueduc a 0^m,85 de rayon, plus un enduit en ciment de 0^m,02. Le calcul a été fait avec le coefficient $b = 0,00016$ des parois très unies, qui donne $\rho^3 = 0,440$.

On trouve pour les différents éléments :

$$\begin{array}{lll} \chi = 3,561, & \omega = 1,825, & R = 0,51, \\ U = 1,12, & f = 0,445, & c = 1,47. \end{array}$$

Aqueduc de la Vanne. — Cet aqueduc, de 2 mètres de diamètre, porte actuellement 1.400 litres par seconde, avec une pente de 0,10 par kilomètre. L'angle au centre correspondant au périmètre mouillé est racine de l'équation :

$$(\theta - \sin \theta)^3 - 31\theta = 0,$$

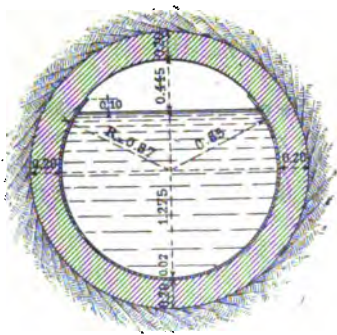


FIG. 436.

qui est vérifiée pour $\theta = 240^\circ 30'$. La flèche de l'arc non mouillé égale 0,50; la vitesse approche de 0,56.

150. Cercle et rectangle équivalents. — Connaissant le rayon d'un aqueduc circulaire et la hauteur de la ligne d'eau au-dessus du radier à l'aplomb du centre, c'est-à-dire le périmètre mouillé, l'aire et le rayon moyen de la section d'écoulement, on peut se proposer de calculer la largeur de la section rectangle de débit équivalent, le plan d'eau étant au même niveau dans les deux sections.

Ce problème a dû être résolu sur la Vanne et sur l'Avre pour le passage du type circulaire en tranchée au type rectangulaire sur arcades découvertes.

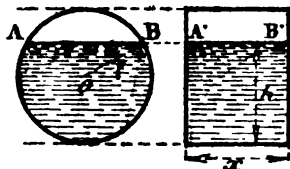


FIG. 437.

Appelons comme d'habitude :

Q , le débit de l'aqueduc ;

I , la pente ;

ω , γ , l'aire de la section d'eau

et le périmètre mouillé dans le cercle ;

R , le rayon moyen dans le cercle ;

b , le coefficient de résistance à la paroi ;

ω' , γ' , R' , les quantités analogues dans le rectangle ;

h , z , la profondeur d'eau et la largeur dans le rectangle.

ω , R , b , h sont des données ; z est l'inconnue de laquelle dépendent ω' , R' , γ' .

On a l'équation :

$$RI = \frac{bQ^2}{\omega^2}, \quad (a)$$

et de même, en supposant b constant :

$$RI = \frac{bQ^2}{\omega'^2}. \quad (c)$$

D'autre part :

$$\gamma' = 2h + z, \quad \omega = hz, \quad R' = \frac{hz}{2h + z};$$

portant ces valeurs dans (c), il vient :

$$\frac{hzI}{2h + z} = \frac{bQ^2}{h^2z^2}; \quad (d)$$

enfin le quotient des équations (d) et (a) donne :

$$b^2 z^3 = R \omega^2 (2h + z), \quad (c)$$

équation du troisième degré dans laquelle tout est connu, sauf z .

EXEMPLE. — Sur le second tronçon de l'aqueduc de l'Avre, de

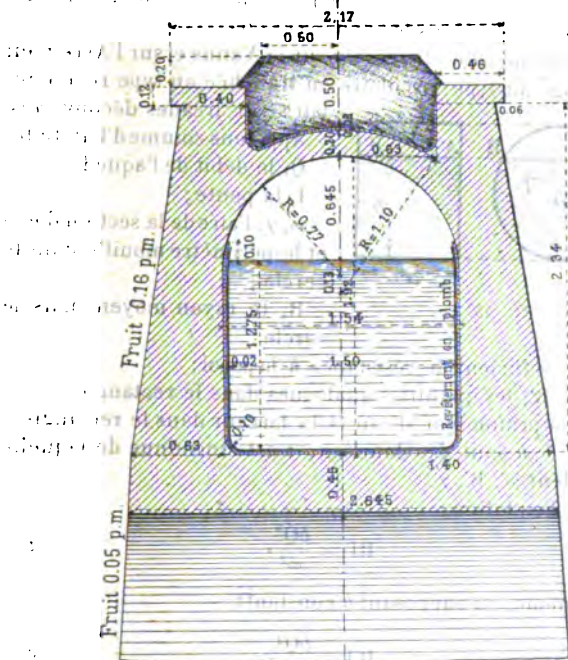


Fig. 438.

1^{er},80 de diamètre, la pente est de 0^m,30 par kilomètre. On avait les données :

$$\begin{array}{ll} Q = 2,050, & h = 1,275, \\ I = 0,0003, & R = 0,54, \\ \omega = 2,528 \times 0,81 = 2,05, & U = 1,00, \\ \gamma = 4,189 \times 0,90 = 3,77, & \end{array}$$

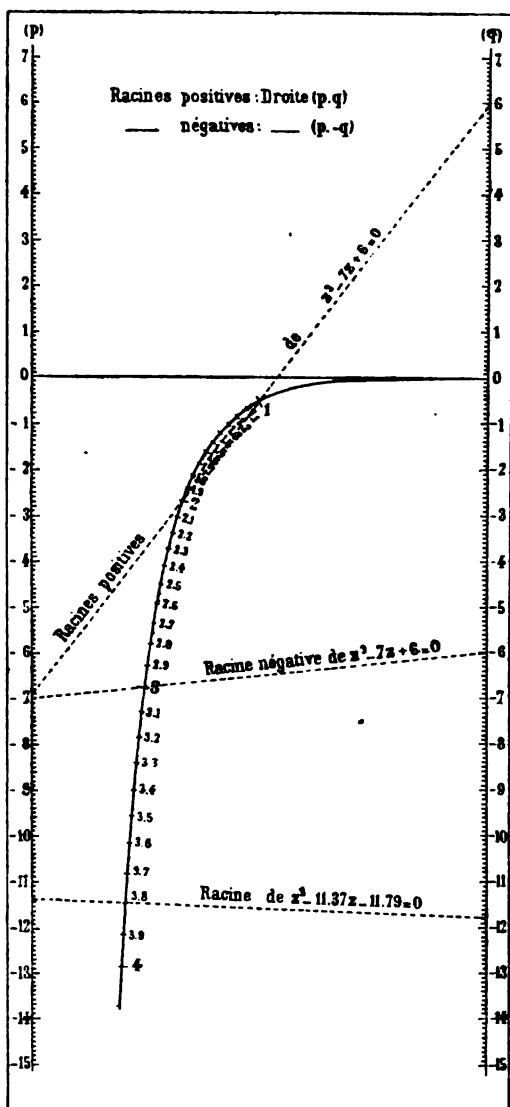


FIG. 439.

L'équation (e) devient avec ces données et après simplifications :

$$z^3 - 0,876z - 2,40 = 0;$$

opérant au moyen de l'abaque (fig. 439), on obtient la racine $z=1,57$. On a fait $z=1,50$ (fig. 438); pour cette valeur dans le rectangle :

$$\begin{aligned}\omega' &= 1,275 \times 1,50 = 2,19, \\ \chi' &= 2 \times 1,275 + 1,50 = 4,33, \\ R' &= \frac{2,19}{4,33} = 0,50;\end{aligned}$$

on trouve enfin, avec la table de Bazin,

$$U^2 = 79^2 \times 0,50 \times 0,0003,$$

d'où :

$$U = 0,97.$$

La même équation permettrait de calculer le rayon ρ de l'aqueduc circulaire, en fonction des dimensions z et h du rectangle. On choisirait un arc mouillé de 240° . On pourrait aussi calculer cet arc en fonction de z , h , ρ .

151. Abaque de l'équation du troisième degré. — L'abaque ci-contre est très commode pour résoudre les équations du troisième degré, qui se rencontrent assez fréquemment dans les calculs relatifs aux canaux et aqueducs.

Si l'on a l'équation $z^3 + pz + q = 0$, dont on cherche les racines positives, il suffira de mener la transversale qui passe par les points des axes (p) et (q), cotés respectivement p et q , et on lira la valeur des racines sur l'échelle centrale.

Par exemple, pour l'équation $z^3 - 0,876z - 2,40 = 0$, on mène la transversale $p = -0,876$, $q = -2,40$; elle coupe la ligne centrale au point coté 1,57, qui est la racine cherchée; il n'y a qu'une racine positive.

152. Section ovoïde. — Les aqueducs de forme ovoïde ont généralement leur grand diamètre placé à la partie inférieure; dans les égouts, au contraire, ce diamètre se trouve presque toujours à la partie supérieure.

Le profil ovoïde est limité par un demi-cercle inférieur de centre O et de rayon ρ , par deux arcs de cercle égaux Cn et Dm de rayon ρ' , ayant leur centre au point O' , et par un

troisième arc de cercle $mABn$ de centre O' et de rayon ρ'' . Ces divers arcs de cercle se raccordent tangentielllement.

L'angle α qui limite la direction $O'n$ est une donnée pour chaque profil, ainsi que les trois rayons ρ , ρ' , ρ'' . La position de la ligne d'eau AB se trouve déterminée par l'angle β .

L'aire de la demi-section H/BC égale la somme des aires

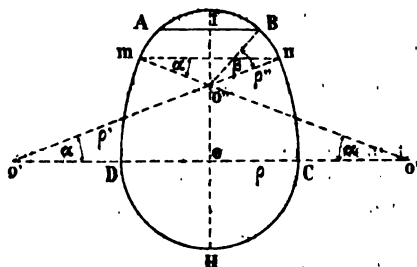


FIG. 440.

du quart de cercle OCH , du quadrilatère courviligne $OCnO'$, du secteur $O'nB$, et du triangle $O'Bf$. En exprimant chacune de ces aires et faisant la somme des résultats, on obtient pour la section totale ω et le périmètre mouillé χ :

$$(1) \begin{cases} \omega = \frac{\pi \rho^2}{2} + \rho'^2 \alpha - (\rho' - \rho)(\rho' - \rho'') \sin \alpha + \rho''^2 \beta \\ \quad + \rho'^2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta), \\ \chi = \pi \rho + 2\rho' \alpha + 2\rho'' \beta; \end{cases}$$

α et β sont exprimés par leurs arcs dans la circonférence de rayon ρ .

Lorsque la ligne d'eau coïncide avec la corde mn qui sous-tend l'arc de rayon ρ'' , alors $\beta = 0$; dans ce cas :

$$(2) \begin{cases} \omega = \frac{\pi \rho^2}{2} + \rho'^2 \alpha - (\rho' - \rho)(\rho' - \rho'') \sin \alpha + \rho'^2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \chi = \pi \rho + 2\rho' \alpha. \end{cases}$$

Pour une ligne d'eau inférieure à mn , il faudrait affecter l'arc β du signe moins.

Ces formules permettent de calculer ω et χ , et ensuite le rayon moyen R et le coefficient C qui entrent dans l'expression de Bazin :

$$U = C\sqrt{RI}.$$

Avec U et ω , on détermine Q .

Lorsque les rayons sont inconnus, on facilite le calcul en posant $\rho' = m\rho$, $\rho'' = n\rho$; alors l'équation ne contient plus que ρ comme inconnue, que l'on détermine en fonction de Q et I , comme pour les sections rectangulaire et circulaire.

Assez fréquemment on prend $m = 3$, $n = \frac{1}{2}$.

153. Débit maximum. — Si, pour un aqueduc de pente connue, on calcule successivement les débits qui correspondent à diverses positions AB , $A'B'$, $A''B''$, ..., etc., de la ligne d'eau, on reconnaît que le débit maximum est obtenu, non par l'écoulement à plein aqueduc comme on pourrait le supposer, mais pour une certaine position MN de la ligne d'eau voisine de la clef de voûte; ce débit dépasse de 3 0/0 environ celui à plein tuyau.

L'analyse rend compte de ce fait en apparence paradoxal; mais on peut l'expliquer *a priori*, en observant qu'au voisinage de la clef une petite élévation de la ligne d'eau accroît sensiblement le périmètre mouillé, sans augmenter en proportion la section d'écoulement, de sorte que le rayon moyen va en diminuant ainsi

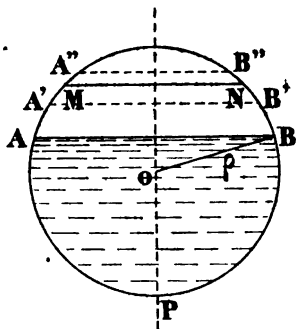


FIG. 411.

que la vitesse, et, comme l'accroissement de la section ω n'est pas suffisant pour compenser la diminution de la vitesse U , le produit ωU , c'est-à-dire le débit, se trouve diminué.

Cherchons à fixer la position de la ligne MN , qui varie avec la forme géométrique de la section d'écoulement.

On a, en général,

$$Q = \omega U,$$

d'où, en différentiant :

$$dQ = \omega dU + U d\omega;$$

le maximum de Q est caractérisé par la condition $dQ = 0$, c'est-à-dire :

$$\omega dU + U d\omega = 0. \quad (1)$$

Mais l'équation fondamentale :

$$\frac{\omega}{\chi} I = bU^3, \quad (2)$$

donne par différentiation, en supposant b constant,

$$\frac{\chi d\omega - \omega d\chi}{\chi^2} I = 2bU dU. \quad (3)$$

Si, entre les équations (1), (2) et (3), on élimine U et dU , la relation différentielle résultante entre χ et ω est celle qui doit exister dans tous les cas pour que le débit maximum se produise. L'équation (1) donne d'abord :

$$dU = - \frac{U d\omega}{\omega};$$

portant cette valeur dans (3) et tenant compte de (2), il vient :

$$\frac{\chi d\omega - \omega d\chi}{\chi^2} I = - \frac{2}{\omega} \frac{\omega}{\chi} I d\omega,$$

ou, en réduisant,

$$d\omega - \frac{\omega}{\chi} d\chi = - 2d\omega,$$

enfin :

$$3\chi d\omega - \omega d\chi = 0; \quad (4)$$

c'est la relation différentielle cherchée.

154. *Section circulaire.* — Pour une section circulaire de rayon ρ ,

appelons θ l'angle au centre qui correspond à l'arc mouillé MPN; on trouve immédiatement :

$$\omega = \frac{\rho^2}{2}(\theta - \sin \theta), \quad \chi = \rho\theta;$$

d'où :

$$d\omega = \frac{\rho^2}{2}(1 - \cos \theta) d\theta, \quad d\chi = \rho d\theta;$$

transportant ces valeurs dans l'équation (4), elle devient, après simplifications :

$$3(1 - \cos \theta) = 1 - \frac{\sin \theta}{\theta},$$

ou encore :

$$2\theta - 3\theta \cos \theta + \sin \theta = 0.$$

Au moyen d'une table de cercles, on trouve que cette équation est vérifiée pour $\theta = 308^\circ$. La flèche non mouillée au cerveau égale alors :

$$\rho + \rho \cos \frac{\theta}{2} = \rho + \rho \cos 154^\circ = 0,10\rho.$$

Mettant l'expression du débit sous la forme :

$$Q = \omega \sqrt{R} \sqrt{\frac{1}{b}},$$

et appelant Q' , Q'' , Q''' les débits qui correspondent à des arcs mouillés de 240° , 308° et 360° , on obtient :

$$Q' = 1,99\rho^2 \sqrt{\frac{\rho I}{b}},$$

$$Q'' = 2,34\rho^2 \sqrt{\frac{\rho I}{b}},$$

$$Q''' = 2,23\rho^2 \sqrt{\frac{\rho I}{b}};$$

Q'' est effectivement supérieur à Q' et Q''' ; les rapports :

$$\frac{Q''}{Q'} = 1,05, \quad \frac{Q''}{Q'''} = 1,18,$$

montrent que le débit maximum dépasse de 5 0/0 celui à plein tuyau, et de 18 0/0 le débit correspondant à l'arc mouillé de 240° .

155. *Section carrée.* — Le calcul est analogue pour une section carrée. Soient a le côté du carré, h la hauteur inconnue. On vérifie aisément que :

$$\omega = 2 \sqrt{2} ah - h^2 - a^2,$$

$$\chi = 2 \sqrt{2} h;$$

différentiant, il vient :

$$d\omega = 2(a\sqrt{2} - h)dh,$$

$$d\chi = 2\sqrt{2}dh;$$

portant ces valeurs dans la formule (4) et réduisant, il reste l'équation :

$$5h^2 - 4\sqrt{2}ah - a^2 = 0,$$

d'où l'on tire :

$$h = \frac{a}{5}(2\sqrt{2} + \sqrt{13}) = 1,287a,$$

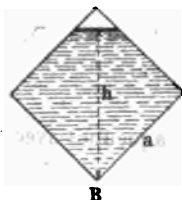


FIG. 442.

La flèche libre a pour longueur :

$$f = 0,127a.$$

156. *Vitesse maximum.* — La position de la ligne d'eau pour laquelle le rapport du débit à l'aire de la section mouillée, c'est-à-dire la vitesse moyenne, est maximum, n'est pas la même que celle qui répond au maximum de débit.

On peut la déterminer en suivant une marche identique. L'équation :

$$U = C\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\omega}{\chi}}}$$

donne par différentiation :

$$dU = C\sqrt{1 + \frac{\chi d\omega + \omega d\chi}{2\chi^2 \sqrt{\frac{\omega}{\chi}}}}$$

Le maximum de U correspond à l'équation $dU = 0$, c'est-à-dire :

$$\chi d\omega + \omega d\chi = 0.$$

157. Dans le cas d'une section circulaire, désignons par α l'angle au centre correspondant au périmètre mouillé de vitesse maximum ou comme au paragraphe précédent :

$$d\omega = \frac{r^2}{2}(1 - \cos \alpha) d\alpha, \quad d\chi = r d\alpha;$$

l'équation ci-dessus devient en substituant :

$$\alpha \cos \alpha - \sin \alpha = 0;$$

elle est sensiblement vérifiée pour $\alpha = 258^\circ$.

CALCUL DES ÉGOUTS

158. Les égouts se calculent comme les aqueducs avec la formule de l'écoulement uniforme :

$$RI = bU^2; \quad (3)$$

on pose pour abrégé, avec M. Bazin,

$$b = \left[\frac{1}{87} \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}} \right) \right]^2,$$

et l'on prend pour γ le coefficient 0,06 des parois très unies.

159. **Section demi-circulaire.** — Le type demi-circulaire sera employé avec avantage pour des égouts à ciel ouvert, pour des cunettes de grands collecteurs, et pour des petits égouts non visitables dans lesquels on voudra ménager un vide égal à la moitié de la section pour le passage des corps solides.

Soit ρ le rayon de la section capable de fournir un débit Q sous une pente I , en supposant que l'égout coule à pleins bords, c'est-à-dire que la ligne d'eau coïncide avec le diamètre. On a dans ce cas :

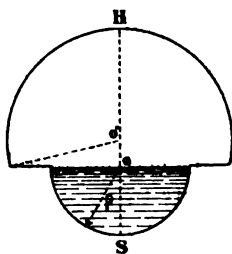


Fig. 413.

$$x = \pi \rho, \quad \omega = \frac{1}{2} \pi \rho^2, \quad R = \frac{\omega}{x} = \frac{\rho}{2}.$$

La formule (3) donne ensuite :

$$\frac{1}{2} \rho l = bU^2;$$

mais on tire de la formule du débit $Q = \omega U$:

$$U = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q}{\frac{1}{2} \pi \rho^2} = \frac{2Q}{\pi \rho^2};$$

par suite, on peut écrire :

$$\frac{1}{2} \rho l = \frac{4bQ^2}{\pi^2 \rho^4},$$

c'est-à-dire :

$$\rho^5 = \frac{8bQ^2}{\pi^2 l}. \quad (\alpha)$$

Cette équation permettra de calculer le rayon inconnu ρ d'après les valeurs de b , Q , l ; on la traitera par les logarithmes, $\pi = 3,1416$.

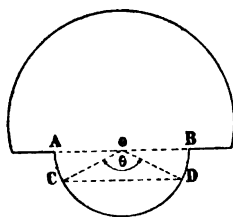


FIG. 444.

Si le plan d'eau supérieur, au lieu d'atteindre le diamètre AB, ne devait pas dépasser le niveau de la corde CD pour laquelle l'angle au centre COD a une valeur θ , par exemple $\theta = 160^\circ$, alors on aurait :

$$x = \rho \theta, \quad \omega = \frac{\rho^2}{2} (\theta - \sin \theta), \quad R = \frac{\rho (\theta - \sin \theta)}{2l};$$

puis, d'après (3) :

$$\rho^5 (\theta - \sin \theta)^3 l - 8bQ^2 = 0;$$

enfin :

$$\rho^5 = \frac{8bQ^2}{(\theta - \sin \theta)^3 l}.$$

Pour $\theta = \pi$, on retrouve la formule (α).

Au lieu de calculer le rayon ρ , on peut se donner cette dimension, alors la formule (2) permet de calculer le débit Q ; on trouve :

$$Q = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\rho^5 I}{2b}}. \quad (a')$$

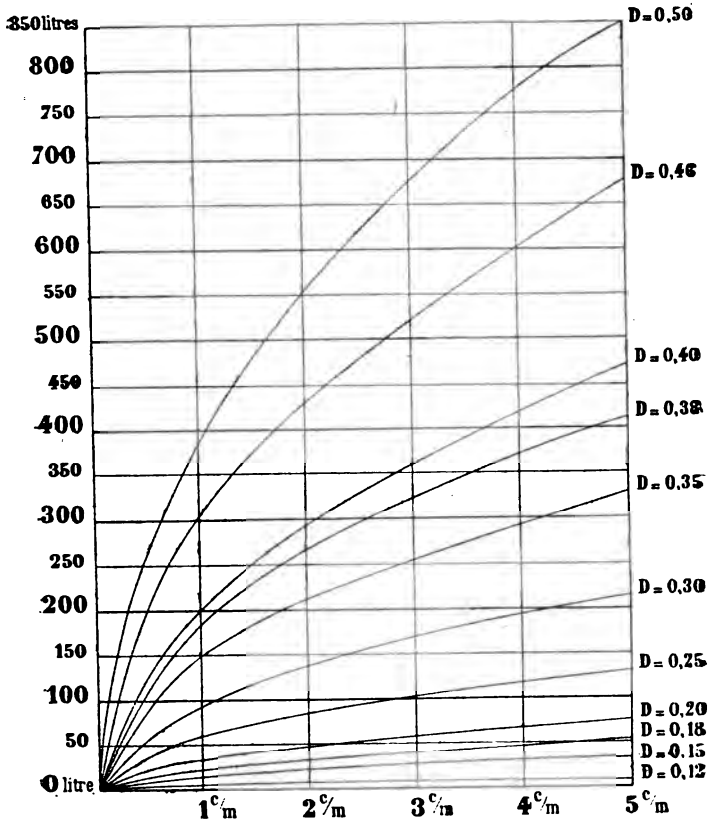


FIG. 445.

De même on peut prendre la pente comme inconnue, ce qui revient à la déterminer de façon que l'égout de rayon ρ

puisse porter un débit Q par seconde; la formule donne :

$$I = \frac{8bQ^2}{\pi^2 p^3} \quad (a'')$$

La figure 443 traduit graphiquement la formule (2) pour des pentes variant de 0,01 à 0,05 par mètre; le débit se lit sur la colonne de gauche et le diamètre sur celle de droite. Par exemple, pour $Q = 400$ litres, $I = 0,03$, on lit $D = 0,42$.

160. Section elliptique. — Ce profil est quelquefois appliqué

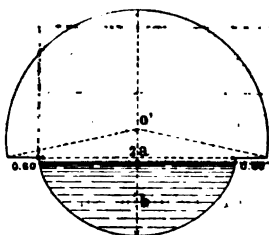


Fig. 443.

pour de grands ouvrages. La cuvette de l'aqueduc de Naples est elliptique; celle du type n° 8 des égouts de Paris l'est sensiblement.

La section ellipse est définie par ses deux demi-axes a et b ; l'aire totale de l'ellipse est égale à πab ; mais le calcul des axes ne peut se faire qu'au moyen de tables numériques spéciales, ou

de tables de fonctions elliptiques.

Posons $b = ma$, et soit γ une fonction du rapport $\frac{1-m}{1+m}$; supposons que l'écoulement se fasse à pleine cuvette; on a :

$$\omega = \frac{m\pi a^2}{2}, \quad x = \frac{\pi(m+1)\gamma a}{2};$$

puis :

$$R = \frac{ma}{(1+m)\gamma}$$

Portant ces valeurs dans l'équation (3), elle devient :

$$\frac{maI}{(1+m)\gamma} = bU^2 = \frac{bQ^2}{\omega^2},$$

ou bien :

$$\frac{maI}{(1+m)\gamma} = \frac{4bQ^2}{m^2\pi^2 a^4};$$

enfin : avec m on a :

$$a^3 = \frac{4(1+m)\gamma b Q^2}{m^2 \pi^2} \quad (\beta)$$

Cette formule permettra de calculer le demi-grand axe a ; on aura ensuite le demi-petit axe b par le produit $b = ma$, car m est un rapport que l'on se donne à l'avance en choisissant la forme de la section d'eau. Avec m , on calculera le rapport $K = \frac{1-m}{1+m}$, et la valeur correspondante de γ se lira dans le tableau ci-dessous :

K	γ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
γ	1,0	1,002	1,010	1,023	1,040	1,064	1,092	1,127	1,168	1,216

Pour $m = 1$, on a $K = 0$, $\gamma = 1$, et l'on retombe sur la formule du demi-cercle.

Si l'on ne disposait que d'une largeur réduite eu égard à la disposition des lieux, mais que l'on puisse gagner en profondeur, on pourrait choisir une ellipse dont le grand axe serait vertical ; la formule (β) serait encore applicable à condition de remplacer a par $\frac{b}{m}$.

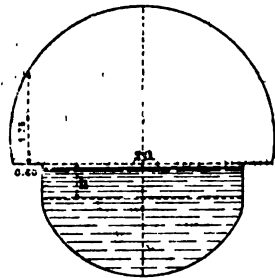


FIG. 417.

Quelquefois, pour accrottre le débouché, on est amené à surmonter la demi-ellipse d'un rectangle de base $2a$ et de hauteur h ; dans ce cas on a :

$$\omega = 2ah + \frac{m\pi a^2}{2},$$

$$x = 2h + \frac{\pi(m+1)\gamma a}{2};$$

et le calcul se continue comme précédemment.

161. **Section cycloïdale.** — Dans quelques cas exceptionnels où l'on serait limité par la profondeur d'eau, on pourrait envisager l'application d'un profil cycloïdal, qui n'est pas plus difficile à tracer que le profil elliptique.

Dans ce cas, la largeur en gueule égale $2\pi\rho$, en appelant ρ le rayon du cercle générateur, et la flèche maximum égale 2ρ .

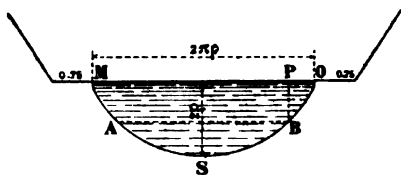


FIG. 448.

Les propriétés connues de la cycloïde donnent, en supposant que l'écoulement s'effectue à pleine cunette :

$$\omega = 3\pi\rho^2, \quad x = 8\rho, \quad R = \frac{3\pi}{8}\rho;$$

par suite, la formule (3) devient :

$$\frac{3\pi}{8}\rho I = \frac{bQ^2}{9\pi^2\rho^4},$$

d'où l'on déduit comme pour les autres profils :

$$\rho^5 = \frac{8bQ^2}{2\pi^3 I}. \quad (\gamma)$$

Cette formule détermine ρ en fonction de Q et I ; on en déduit la largeur en gueule OM , la profondeur maximum 2ρ , la section et le périmètre mouillés.

Si l'on se donnait le rayon ρ et que le plan d'eau fût limité à une ligne AB , on observerait que l'on a pour un point quelconque de la courbe :

$$x = \rho(\alpha - \sin \alpha), \quad y = \rho(1 - \cos \alpha).$$

L'expression de y permettrait alors de calculer la valeur de α correspondant au niveau AB , en fonction de y et ρ ; on

pourrait ensuite déterminer le périmètre mouillé ASB et la section mouillée, en observant que :

$$\text{arc OB} = 4\rho \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\text{aire OBP} = \rho^2 \left(\frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha\right).$$

La connaissance du rayon moyen et de la pente suffit pour calculer la vitesse moyenne et le débit.

Comparaison des types elliptique et cycloïdal. — A largeur et à profondeurs égales, la section demi-elliptique donne un plus grand débouché que le profil cycloïdal.

En effet, dans l'ellipse, on a, en faisant $a = \pi\rho$, $b = 2\rho$:

$$\omega = \pi \frac{ab}{2} = \pi^2 \rho^2.$$

Dans la cycloïde, l'expression de l'aire est :

$$\omega' = 3\pi\rho^2;$$

de sorte que le rapport des débouchés est :

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\pi^2 \rho^2}{3\pi\rho^2} = \frac{\pi}{3} = 1,047.$$

Pour comparer les débits, il suffit de rapprocher les formules (β) et (γ) en faisant $a = \pi\rho$, $b = 2\rho$. On a alors :

$$\frac{b}{a} = \frac{2\rho}{\pi\rho} = \frac{2}{\pi} = 0,63 = m,$$

puis d'après le tableau :

$$\frac{1-m}{1+m} = \frac{0,37}{1,63} = 0,23, \quad \gamma = 1,013.$$

La formule (β) devient, en appelant Q' le débit de la section ellipse :

$$\pi^3 \rho^5 = \frac{4 \times 1,63 \times 1,013 Q'^2}{\frac{8}{\pi} \times 1};$$

de sorte que l'on peut écrire avec γ :

$$\frac{4 \times 1,63 \times 1,013 \times \pi \times Q^2}{81} = \frac{8b\pi^3 Q^2}{27\pi^3 I}$$

Cette équation donne, en effectuant les calculs,

$$\frac{Q^2}{Q^2} = \frac{50}{43},$$

d'où l'on tire :

$$\frac{Q'}{Q} = 1,080.$$

162. Section en anse de panier. — L'anse de panier à trois-centres est d'un tracé facile ; c'est un profil qui se plie sans difficulté aux diverses circonstances de la pratique, comme ouverture et profondeur d'eau ; on l'emploiera avec avantage dans un grand nombre de cas.

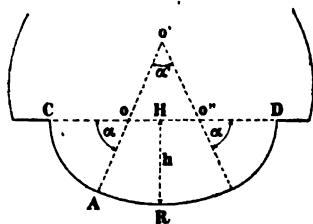


Fig. 449.

Ordinairement on se donne l'angle α et le rapport k des rayons $O'A$ et OA ; il faut alors déterminer le rayon OA de façon que la cu-

nette puisse évacuer un volume d'eau Q avec une pente I .

Posons $OA = r$, $O'A = kr$, et supposons toujours que l'écoulement s'effectue à pleine cuvette. Si l'on prend pour unité d'arc celui qui correspond à l'unité d'angle dans le cercle de rayon 1, on a pour l'aire de la section :

$$\omega = \frac{1}{2} r^2 \alpha + \frac{1}{2} k^2 r^2 \alpha' - \frac{1}{2} r^2 (k - 1)^2 \sin \alpha' + \frac{1}{2} r^2 x,$$

puis pour le périmètre mouillé :

$$\chi = r\alpha + rk\alpha' + rx.$$

D'autre part, la figure donne :

$$2\alpha + \alpha' = \pi, \quad \sin \alpha' = \sin 2\alpha;$$

par suite, on peut écrire :

$$\omega = \frac{1}{2} r^2 (\alpha + k^2 \pi - 2k^2 \alpha + \alpha) - \frac{1}{2} r^2 (k-1)^2 \sin 2\alpha,$$

enfin :

$$\chi = r(\alpha + k\pi - 2k\alpha + \alpha);$$

$$\omega = \frac{1}{2} r^2 [2\alpha + k^2 \pi - 2k^2 \alpha - (k-1)^2 \sin 2\alpha],$$

$$\chi = r(2\alpha + k\pi - 2k\alpha).$$

Posons pour abréger :

$$2\alpha + k^2 \pi - 2k^2 \alpha - (k-1)^2 \sin 2\alpha = \varphi,$$

$$2\alpha + k\pi - 2k\alpha = \theta;$$

alors les formules ci-dessus s'écrivent :

$$\omega = \frac{1}{2} r^2 \varphi, \quad \chi = r\theta;$$

les quantités φ et θ sont connues d'après α et k .

Portant les valeurs précédentes dans l'équation (3), il vient :

$$\frac{\frac{1}{2} r^2 \varphi}{r\theta} I = b \frac{Q^2}{\omega^2} = \frac{4bQ^2}{r^4 \varphi^2},$$

ce que l'on peut écrire :

$$\frac{r\varphi}{2\theta} I = \frac{4bQ^2}{r^4 \varphi^2},$$

ou enfin :

$$r^5 = \frac{8bQ^2}{I\varphi^3}. \quad (5)$$

Cette formule fera connaître r d'après les valeurs connues de b , θ , Q , I , φ . Pour $\alpha = 0$ et $k = 1$, on a $\varphi = \theta = \pi$, et l'on retrouve la formule du demi-cercle.

Au lieu de se donner α et k , on peut se fixer *a priori* l'ouverture $CD = \Delta$ et la profondeur $HR = h$ du canal; dans ce cas on a :

$$\Delta = 2r + 2(r - r') \cos \alpha,$$

$$h = r' - (r' + r) \sin \alpha;$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\Delta &= 2r + 2(k-1)r \cos \alpha, \\ h &= kr - (k-1)r \sin \alpha.\end{aligned}\quad (\delta')$$

Les équations (δ) et (δ') permettent de calculer r , α , k .

163. Pente des égouts. — Pratiquement la pente des collecteurs peut varier de 0,0015 à 0,04; il est même préférable de se limiter à 0,03 quand on peut le faire sans inconvénient, la circulation des ouvriers est rendue moins dangereuse.

La pente des égouts non visitables ne doit pas être inférieure à 0,01 pour obtenir une vitesse capable d'entraîner les sables et les grosses impuretés; exceptionnellement on peut descendre jusqu'à 0,007, mais les tuyaux ne doivent présenter aucune sinuosité.

164. Conduite forcée équivalente. — La pente par mètre J , le débit Q et le diamètre D d'une conduite forcée sont liés entre eux par la relation de Darcy :

$$D^5 = \frac{64 b_1 Q^2}{\pi^2 J},$$

b_1 est le coefficient de résistance à la paroi analogue à b pour les égouts, formule (3).

Les éléments d'un égout à cunette en anse de panier sont liés par la relation analogue :

$$r^3 = \frac{8 b_1 Q^2}{17^3}.\quad (\delta)$$

En posant :

$$\frac{Q^2}{J} = \frac{\pi^2 D^5}{64 b_1} = \frac{Q^2}{1} = \frac{\pi^3 r^3}{8 b \theta},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\pi^2 D^5}{64 b_1} = \frac{\pi^3 r^3}{8 b \theta},$$

ou encore :

$$D^2 = \frac{64 b_1 \pi^3}{8 b \theta \pi^2} r^3,\quad (m)$$

on obtient le diamètre de la conduite forcée capable d'écouler le même volume d'eau que l'égout sous une charge égale, ou avec une pente égale.

Inversement on déduit de la formule (m) :

$$r = D \sqrt[3]{\frac{\pi^2 b^2}{86,4 \varphi^3}} \quad (n)$$

de sorte que, si l'on connaît D, on pourra déterminer immédiatement r en évaluant le coefficient du second membre.

Cette remarque a son importance si l'on considère que le calcul des conduites forcées s'effectue presque instantanément au moyen des abaques de Flamant ou de Lévy.

Pour les diverses sections d'aqueducs et d'égouts on obtiendrait une relation analogue à (n), le calcul serait identique; en particulier, on trouverait pour la section circulaire (fig. 435), en faisant $b = 0,00017$, $b_1 = 0,00035$:

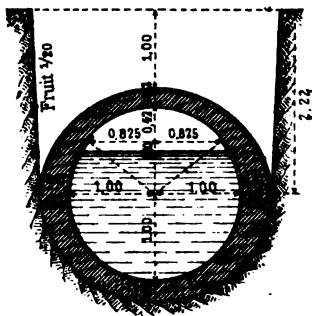


FIG. 449 bis.

$$\rho = D \sqrt[3]{0,075 \times 0,261},$$

c'est-à-dire :

$$\rho = 0,460D.$$

Aqueduc de la Vanne. — L'aqueduc de la Vanne (fig. 449 bis) a été construit pour porter 1.500 litres d'eau par seconde, avec une pente de 0^m,10 par kilomètre.

L'abaque Lévy accuse pour ces éléments :

$$D = 2,15;$$

la valeur correspondante du rayon ρ est :

$$\rho = 0,460 \times 2,15 = 0,989,$$

ce qui donne 1,978 pour le diamètre. En fait, l'aqueduc a 2 mètres de diamètre. On voit que l'approximation est très suffisante au point de vue pratique.

Aqueduc de l'Avre. — Le premier tronçon de l'Avre a une pente de 0,40 par kilomètre, et l'aqueduc a été calculé pour un débit de 2.050 litres par seconde.

L'abaque Lévy donne pour le diamètre de la conduite forcée :

$$D = 1,85,$$

en conséquence :

$$\rho = 0,460 \times 1,85 = 0,851.$$

L'aqueduc a 1^m,70 de diamètre (fig. 436).

Sur le second tronçon, la pente n'est que de 0^m,30 par kilomètre, et la section a 1^m,80 de diamètre. On trouve comme précédemment :

$$D = 1,95,$$

puis :

$$\rho = 0,460 \times 1,95 = 0,897;$$

enfin :

$$2\rho = 1,794;$$

la différence n'est que de 6 millimètres.

165. Procédé graphique. — Les sections ovoïdes, cycloïdales, elliptiques, etc., donnent lieu à des calculs compliqués qui exigent de la part du calculateur une instruction développée et une attention très soutenue.

Dans la plupart des cas, il sera plus pratique et plus rapide d'opérer graphiquement, et les erreurs seront ainsi plus facilement reconnues et corrigées.

Ayant fait choix d'une première section, que l'on dessine à l'échelle de 1/10^e, on évalue sur l'épure, par le moyen de trapèzes inscrits ou de la formule de Simpson, les aires et les périmètres mouillés qui correspondent à diverses hauteurs de la ligne d'eau; les rayons moyens et les vitesses se déduisent de ces données par de simples calculs arithmétiques. Ordinairement c'est le débit et la pente de l'aqueduc qui sont connus.

En répétant les mêmes opérations sur un certain nombre de sections différentes, la comparaison des résultats conduit rapidement à l'adoption d'un profil rationnel. Les formules fournissent à la fin une vérification utile.

166. Égouts de Paris. — La section des divers types d'égouts de Paris est ovoïde, elle est ordinairement définie par la

de mi-largeur ρ aux naissances, la demi-largeur b à l'origine du radier, et par la distance L de la ligne des naissances au radier.

Au moyen de ces éléments, il est facile de déterminer les rayons ρ' , ρ'' , et les angles α et δ .

La figure donne les relations :

$$(\rho' - \rho'') \sin \alpha + \rho'' = L,$$

$$\rho'' \cos \alpha = b,$$

$$(\rho' - \rho'') \cos \alpha = \rho' - \rho.$$

$$\text{L'angle } \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

La résolution de ce système s'effectue rapidement en prenant pour variable la hauteur

$$h = \rho' \sin \alpha;$$

on est conduit à l'équation du second degré :

$$h^2 - (L - \rho) h - (\rho - b)(L + b) = 0.$$

Avec h , on calcule ρ' , ρ'' , α , par les formules :

$$\rho' = \frac{h^2 + (\rho - b)^2}{2(\rho - b)},$$

$$\rho'' = \frac{b^2 + (L - h)^2}{2(L - h)},$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{\rho''}.$$

Débouché. — La section des égouts se calcule en majorant le débit de $\frac{1}{8}$ environ, pour tenir compte des dépôts de sable, de vase, et des installations intérieures, telles que conduites d'eau, canalisations électriques, etc., quand elles existent.

L'évaluation du débit maximum est la question la plus délicate lorsque les égouts doivent recevoir à la fois les eaux pluviales et les eaux ménagères. Pendant les plus grandes averses, les collecteurs d'une ville doivent pouvoir

évacuer toute l'eau amenée par les égouts tributaires, sans que le plan d'eau dépasse une certaine hauteur.

Pour chaque collecteur, on évalue sur le plan la surface drainée; puis, d'après la hauteur maximum de pluie dans la région, on calcule le plus grand afflux d'eau par seconde. Enfin, on ajoute le volume d'eau fourni par les conduites et consommé par les habitants. On procède de la même façon pour le calcul des égouts élémentaires.

A Paris, Belgrand a proposé pour le débouché des égouts la formule :

$$S = \frac{0.00033 \sqrt{RI}}{0.0239}$$

déduite de celle de Prony en faisant : $a = 0$, $b = 0.00033$.

S représente la surface des versants drainés par l'égout, exprimée en hectares;

ω , l'aire de la section mouillée de l'égout;

I , la pente du radier par kilomètre.

Cette formule suppose que le maximum d'eau tombée est de 125 litres par seconde et par hectare, et que le temps d'écoulement dans les égouts est trois fois plus long que la durée de la pluie. Cette dernière hypothèse est assez exacte pour les collecteurs; mais, dans les petites galeries secondaires, l'afflux des eaux pluviales est certainement plus rapide, il faut tabler sur une durée double seulement de celle de l'averse.

RÉGIME VARIÉ

167. Le mouvement uniforme est caractérisé par une section d'écoulement et une pente constantes; lorsque ces conditions ne sont pas remplies, la vitesse varie d'une section à l'autre et le mouvement est varié; on suppose toujours que le régime permanent est établi.

168. Équation de l'écoulement. — On parvient à cette équation en appliquant le théorème des forces vives au système matériel formé par les molécules liquides comprises

entre deux sections transversales AC et A'C', perpendiculaires à l'axe du courant. Au bout d'un certain temps, ce système occupe la position BDB'D'.

Appelons ω l'épaisseur CD de la tranche ABCD; ω , l'aire de la section mouillée; ρ , la densité du liquide. La masse de cette tranche est égale à $\rho\omega\omega$. Or, si l'on suppose que toutes les molécules qui traversent au même instant la section A'C' sont animées d'une vitesse moyenne commune U, le premier membre de l'équation des forces vives s'écrit :

$$\frac{1}{2} \rho \omega \omega (U^2 - U_0^2),$$

FIG. 452.

car les molécules situées dans l'intervalle BDA'C' ont même vitesse au commencement et à la fin du temps considéré et ne donnent aucun terme dans l'équation; U_0 représente la vitesse moyenne dans la section AC.

Pour le second membre, il faut considérer le travail de la pesanteur, celui des pressions sur les sections extrêmes AC et A'C', et le travail des forces résistances.

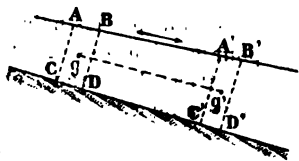
Le travail P de la pesanteur est égal au produit du poids du système ABCD par la hauteur dont s'est abaissé son centre de gravité; on a donc, en appelant y, y' les distances des centres de gravité g, g' à la surface libre de l'eau, et z la distance du point A' à l'horizontale du point A,

$$P = \rho \omega g \omega (z + y' - y).$$

La pression moyenne qui s'exerce sur le centre de gravité de la section AC égale $\rho g y$; celle qui s'exerce sur le centre de A'C' s'exprime par $\rho g y'$; la résultante P' des travaux de ces pressions est donc :

$$P' = \rho \omega g \omega (y - y').$$

D'autre part, comme le frottement à la paroi est proportionnel à la surface mouillée et à une certaine fonction $\rho g f(U)$ de la vitesse moyenne, le travail P' des forces résis-



tantes, qui doit être affecté du signe moins, s'exprime par la formule :

$$P' = - \int \rho g \varepsilon \gamma f(U) ds;$$

ρg représente le poids du mètre cube d'eau; γ , le périmètre mouillé de la section. L'intégrale est prise entre les sections AC et A'C', c'est-à-dire qu'elle s'étend à tous les éléments de longueur ds qui composent la distance CC'.

Faisant la somme de tous ces travaux, on obtient l'équation :

$$\frac{1}{2} \rho \omega \varepsilon (U^2 - U_0^2) = \rho \omega g \varepsilon (z + y' - y) + \rho \omega g \varepsilon (y - y') - \int \rho g \varepsilon \gamma f(U) ds.$$

Divisant par $\rho g \omega \varepsilon$, simplifiant et transposant les termes, cette équation devient :

$$z = \frac{U^2 - U_0^2}{2g} + \int_{\omega}^{\gamma} f(U) ds, \quad (1)$$

c'est l'équation en termes finis du mouvement varié. Si l'on fait $U = U_0 = \text{constante}$, on retrouve l'équation du mouvement uniforme.

REMARQUE. — Plus rigoureusement, soit v la vitesse du liquide dans un élément $d\omega$ de la section A'C'; cette vitesse est généralement différente de la vitesse moyenne U , et l'on peut poser $v = U + \varphi$. L'expression du débit devient alors :

$$Q = \int v d\omega = \int (U + \varphi) d\omega = \int U d\omega + \int \varphi d\omega,$$

ce que l'on peut écrire en intégrant le premier terme :

$$Q = \omega U + \int \varphi d\omega;$$

mais, comme $Q = \omega U$, on en conclut que $\int \varphi d\omega = 0$.

La force vive I du liquide qui traverse la section A'C', d'aire ω , dans le temps dt , égale :

$$I = \frac{1}{2} \int \rho v dt d\omega v^2 = \frac{1}{2} \rho dt \int v^3 d\omega = \frac{1}{2} \rho dt \int (U + \varphi)^3 d\omega,$$

ou bien :

$$I = \frac{1}{2} \rho dt \int (U^3 + 3U^2\varphi + 3U\varphi^2 + \varphi^3) d\omega,$$

on encore, en intégrant les deux premiers termes,

$$I = \frac{1}{2} \rho Q d t U^2 + \frac{1}{2} \rho d t \int \varphi^2 (3U + \varphi) d\omega;$$

enfin :

$$I = \frac{1}{2} \rho Q d t U^2 + \frac{1}{2} \rho d t \int \varphi^2 (2U + v) d\omega.$$

On voit que I est plus grande que la force vive due à la vitesse moyenne U , qui est représentée par le premier terme. Pour tenir compte du second terme, on pose ordinairement :

$$I = \frac{1}{2} \alpha \rho Q d t U^2,$$

et l'on donne au coefficient α une valeur qui reste comprise entre 1 et 1,13. D'après M. Bazin, on devrait calculer α dans chaque cas par la formule :

$$\alpha = 1 + 1,07 \left(\frac{V}{U} - 1 \right)^2,$$

mais on se contente de lui donner la valeur 1,10. V représente la vitesse superficielle au milieu du courant.

Sur la figure 452, si les sections $A'C'$ et $B'D'$ sont infiniment voisines, on a $Qdt = \omega s$, et l'on retrouve le premier membre de l'équation des forces vives avec le coefficient α ; par suite, l'équation (4) doit être remplacée par la suivante :

$$z = \alpha \frac{U^2 - U_0^2}{2g} + \int \frac{x}{\omega} f(U) ds. \quad (2)$$

169. Formule différentielle. — Différentions l'équation (2) par rapport à la variable indépendante s , il vient :

$$dz = \alpha \frac{U dU}{g} + \frac{x}{\omega} f(U) ds.$$

Soient AB la ligne d'eau entre les points très voisins A et B , AH l'horizontale du point A , AF la parallèle à la ligne de fond CD . Appelons i la pente de la ligne CD différente de celle de AB ; h , la profondeur AC ; $h + dh$, la profondeur BD . Vu la petitesse des inclinaisons, on a sensiblement : $HB = dz$, $HF = ids$, $BF = dh$; et, comme $HB = HF - BF$, il en résulte que :

$$dz = ids - dh.$$

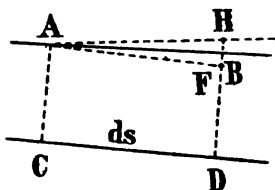


FIG. 453.

L'équation ci-dessus peut donc s'écrire :

$$ids - dh = \alpha \frac{U dU}{g} + \frac{\kappa}{g} f(U) ds. \quad (3)$$

C'est ordinairement sous cette forme que l'on utilise l'équation du mouvement varié.

170. Canal rectangulaire de largeur et de pente constantes. — Ce cas est assez étendu dans la pratique, même pour les rivières dont la pente et le profil en travers restent sensiblement constants, au moins sur un certain parcours.

Soient CS la ligne de fond du canal, C sa trace sur le profil en travers initial mené normalement à CS. Déterminons la position d'un point quelconque M de la ligne d'eau par ses coordonnées CP = s , MP = h ; h est la profondeur au point M, mesurée perpendiculairement à CS.

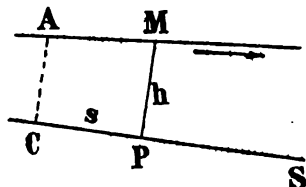


FIG. 454.

En appelant l la largeur du canal, Q son débit constant, on a :

$$lhU = Q,$$

d'où :

$$Udh + h dU = 0; \quad (\alpha)$$

éliminant dU entre (α) et (3) , et posant $f(U) = bU^2$, il vient :

$$ids - dh = -\frac{\alpha U^2}{hg} dh + \frac{bU^2}{R} ds, \quad (\beta)$$

ce que l'on peut écrire :

$$dh = i \frac{1 - \frac{bU^2}{Ri}}{1 - \frac{\alpha U^2}{gh}} ds. \quad (3')$$

Le rayon moyen et la vitesse étant donnés en fonction de h et Q par les formules :

$$R = \frac{lh}{l + 2h}, \quad U = \frac{Q}{lh}, \quad (\gamma)$$

voit que l'intégration de l'équation (β) peut théorique-

ment s'effectuer et conduire à la relation finie, telle que $s = \varphi(h)$, qui existe entre s et h , c'est-à-dire à l'équation du profil en long du canal. Malheureusement, cette intégration présente de grandes difficultés et la formule finale est beaucoup trop compliquée pour être utilisée dans la pratique; en réalité, on n'intègre jamais, on se contente de donner à h une série de valeurs pour lesquelles on calcule les valeurs correspondantes de s ; on obtient de cette façon une forme suffisamment exacte du profil de la ligne d'eau.

Appelons H la hauteur qui correspond, pour le débit considéré Q , au régime uniforme; cette hauteur satisfait à la relation :

$$\frac{1}{l + 2H} = \frac{bQ^2}{l^2 H^3} \quad (8)$$

Éliminant U , Q , R entre (β) , (γ) , (8) , on obtient l'équation où les variables sont séparées :

$$\left(1 - \frac{l + 2h}{l + 2H} \frac{H^3}{h^3}\right) ds = \left(1 - \frac{\alpha i}{bg} \frac{l}{l + 2H} \frac{H^3}{h^3}\right) dh. \quad (12)$$

171. Remous. — La discussion de l'équation (β) présente un certain intérêt, parce qu'elle rend compte des phénomènes qui se produisent lorsqu'en un point d'un canal on établit un barrage transversal formant déversoir, qui surélève le niveau d'amont et rend le mouvement varié, ou bien lorsqu'un bief de ce canal débouche dans un autre dont la pente est plus forte, ce qui amène une dénivellation brusque.

Reprenons cette équation :

$$dh = i \frac{1 - \frac{bU^2}{Ri}}{1 - \frac{\alpha U^2}{gh}} ds. \quad (\beta')$$

Soit H la profondeur qui correspondrait au régime uniforme avec le même débit et une pente égale.

Lorsque h reste constante et égale à H , $dh = 0$; et le régime du canal est évidemment uniforme.

Lorsque h diffère peu de H , la valeur de $\frac{bU^2}{Ri}$ se rapproche de

l'unité; le numérateur de la fraction (β') est très petit par rapport à son dénominateur, et il en est de même de dh par rapport à ds . Dans ce cas, la profondeur du canal ne varie que d'une manière insensible sur de grandes longueurs; on peut considérer que son régime est uniforme.

Quand $h < H$, la vitesse moyenne est plus grande que celle qui correspondrait au mouvement uniforme, puisque le débit est le même et que l'aire mouillée est moindre; on a donc $bU^2 > Ri$, et le numérateur de la fraction est négatif. Les circonstances sont inverses lorsque $h > H$. Pour le dénominateur, deux cas sont à considérer suivant que $\alpha U^2 \leq gh$.

Lorsque le mouvement est varié, la ligne d'eau présente une forme courbe, définie analytiquement par l'équation (β'), ou par (μ), et que l'on appelle la *courbe du remous*. Si cette courbe est supérieure à la droite du régime uniforme, le remous est d'exhaussement; il est d'abaissement lorsque la courbe est située au-dessous de la droite.

172. Remous d'exhaussement. — Supposons que l'on ait constamment :

$$\alpha U^2 < gh, \quad h > H.$$

Dans ce cas, la fraction (β') reste positive, et dh a le même signe que ds .

Lorsqu'on chemine dans le sens du courant, h augmente avec s , U décroît, de sorte que, *a fortiori*, les inégalités précédentes sont satisfaites pour les valeurs successives de h . Au contraire, h diminue en même temps que s quand on s'éloigne du côté de l'amont.

Mais h diminuant tend nécessairement vers H , puisque par hypothèse $h > H$; ceci montre que, si l'on mène une parallèle xy , d'ordonnée H , à la ligne de fond CS , la courbe du remous est asymptote à cette parallèle. La ligne xy n'est autre chose que la droite du mouvement uniforme.

D'autre part, lorsque h augmente, les quotients $\frac{bU^2}{Ri}$ et $\frac{\alpha U^2}{gh}$ ne cessent de décroître, puisque R croît avec H , et se

rapprochent de zéro ; on voit, par là, que le rapport $\frac{dh}{ds}$ qui représente le coefficient angulaire de la tangente à la ligne d'eau tend vers la limite i , ce qui montre que cette ligne est encore asymptote à une certaine horizontale $x'y'$.

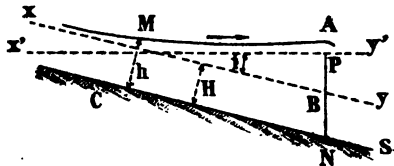


Fig. 455.

La courbe du remous présente la disposition de la figure 455; sa concavité est tournée vers le haut; son tracé est intéressant à connaître depuis le barrage PN jusqu'au point où la différence $h - H$ devient négligeable.

Les conditions $\alpha U^2 < gh$ et $h > H$ seront le plus souvent remplies dans les cours d'eau naturels; en effet, on en déduit, puisque $bU^2 < Ri$:

$$1 - \frac{\alpha U^2}{gh} > 1 - \frac{\alpha i}{bg} \frac{R}{h},$$

et, *a fortiori*, puisque $\frac{R}{h} < 1$:

$$1 - \frac{a^2}{gk} > 1 - \frac{ai}{bg},$$

ou, en prenant les valeurs pratiques $b = 0,0004$, $\alpha = 1,10$:

$$1 - \frac{\alpha U^2}{gh} > 1 - \frac{i}{0,00357}.$$

Pour que le second membre de cette inégalité soit positif comme le premier qui l'est par hypothèse, il suffit que $i < 0,00357$, soit une pente de 3,57 par kilomètre, qui est rarement atteinte par les cours d'eau non torrentiels.

Pour obtenir l'équation en termes finis, il faut intégrer la différentielle (μ).

Posons pour simplifier les calculs :

$$1 - \frac{\alpha i}{bq} \frac{l}{l + 2H} = \pi;$$

sur les cours d'eau à faible pente, m sera inférieur et voisin de l'unité.

Remplaçons la variable h par la hauteur z du remous au-dessous de la droite xy ; on a $h = H + z$, et l'équation (a) devient, en transposant les termes :

$$ids = \frac{(H+z)^3 - (1-m)H^3}{(H+z)^3 - \left(1 + \frac{2z}{l+2H}\right)H^3} dz.$$

Développons les cubes et réduisant :

$$ids = \frac{mH^3 + z^3 + 3Hz^2 + 3H^2z}{z \left[\left(z + \frac{3H}{2}\right)^2 + H^2 \left(\frac{3l-2H}{4(l+3H)}\right) \right]} dz.$$

Posons encore :

$$\frac{3l+4H}{l+2H} = n,$$

l'équation s'écrit :

$$ids = \frac{mH^3 + z^3 + 3Hz^2 + 3H^2z}{z \left[\left(z + \frac{3H}{2}\right)^2 + \left(n - \frac{9}{4}\right)H^2 \right]} dz.$$

La décomposition en fractions rationnelles donne ensuite :

$$ids = \left[1 + \frac{mH}{nz} + \frac{H^2(3n-3m+n^2) - mHz}{n \left[\left(z + \frac{3H}{2}\right)^2 + \left(n - \frac{9}{4}\right)H^2 \right]} \right] dz.$$

L'intégration est ainsi rendue facile; on obtient, en appelant C la constante :

$$is = z + \frac{mH}{n} L \frac{z}{\sqrt{\left(z + \frac{3H}{2}\right)^2 + \left(n - \frac{9}{4}\right)H^2}} - \frac{H}{n} \frac{n^2 + \frac{3}{2}m - 3n}{\sqrt{n - \frac{9}{4}}} \arctg \frac{z + \frac{3H}{2}}{H \sqrt{n - \frac{9}{4}}} + C$$

L désigne un logarithme népérien.

Pour avoir la relation entre s et h , il suffit de remplacer z par $h - H$.

Cette équation fort compliquée n'est d'aucune utilité pratique, elle n'a vraisemblablement jamais servi au calcul d'un remous. Nous ne l'avons établie que pour montrer la manière de conduire le calcul au point de vue théorique.

On simplifie l'équation en remplaçant le dernier terme par un développement en série, et négligeant les puissances de z supérieures à 4. Soit z_0 la valeur de z pour $s = s_0$; il en résulte la formule approchée :

$$i(s - s_0) = (z - z_0) \left(1 - \frac{m}{9n} \right) + \frac{mH}{n} L \frac{z(3H + 2z_0)}{z_0(5H + 2z)}$$

Si l'on compte les distances s à partir du barrage PN en remontant vers l'amont, alors $s_0 = 0$, et z_0 représente la surélévation AB à l'origine A.

Dans le cas où z_0 est petit par rapport à H , on prend quelquefois pour $\frac{m}{n}$ la valeur moyenne $\frac{2}{3}$, et l'on remplace le logarithme du dernier terme par le quotient $\frac{z_0 - z}{z_0}$; la formule prend alors la forme simple :

$$is = \frac{z_0 - z}{5} \left(\frac{2H}{z_0} + 3,45 \right).$$

173. Formule de Rühlmann. — Dans ses études sur le mouvement de l'eau dans les canaux, le professeur Rühlmann donne pour le remous la formule ;

$$s = \frac{H}{i} \left[f\left(\frac{z_0}{H}\right) - f\left(\frac{z}{H}\right) \right];$$

les variables ont la même signification que ci-dessus.

$\frac{z}{H}$	$f\left(\frac{z}{H}\right)$	$\frac{z}{H}$	$f\left(\frac{z}{H}\right)$	$\frac{z}{H}$	$f\left(\frac{z}{H}\right)$
0,01	0,0067	0,3	1,3428	1,4	2,7264
0,02	0,2344	0,4	1,5419	1,5	2,8337
0,03	0,3863	0,5	1,6611	1,6	2,9401
0,04	0,4839	0,6	1,7980	1,7	3,0458
0,05	0,5701	0,7	1,9266	1,8	3,1508
0,06	0,6376	0,8	2,0495	1,9	3,2553
0,07	0,6958	0,9	2,1683	2,0	3,3594
0,08	0,7482	1,0	2,2739	2,5	3,8784
0,09	0,7933	1,1	2,3971	3,0	4,3843
0,1	0,8353	1,2	2,5683	3,5	4,8891
0,2	1,1361	1,3	2,6179	4,0	5,3958

Cette formule se calcule rapidement avec la table ci-dessus

En faisant $\frac{z}{H} = 0,01$, on peut considérer la valeur correspondante de s comme égale à l'amplitude du remous, alors :

$$\delta = \frac{H}{i} \left[f\left(\frac{z_0}{H}\right) - f(0,01) \right].$$

EXEMPLE. — Au voisinage du réservoir de Ménilmontant, l'aqueduc de la Dhuis est coupé par un barrage de 1^m,15 de haut; l'épaisseur de la tranche d'eau au-dessus de la crête du déversoir est de 0^m,20.

Avec une pente de 0^m,10 par kilomètre et une hauteur de régime uniforme : $H = 0^m,54$, le remous s'étend en amont à une distance :

$$\delta = \frac{0,54}{0,0001} \left[f\left(\frac{0,81}{0,14}\right) - 0,067 \right];$$

$z_0 = 1,15 + 0,20 = 0,54$. Effectuant les calculs :

$$\delta = 15265 \text{ mètres.}$$

174. Usines hydrauliques. — La chute nécessaire au fonctionnement d'une usine hydraulique U est ordinairement obtenue au moyen d'un barrage B que l'on installe en travers de la rivière et qui produit à l'amont un gonflement des eaux, c'est-à-dire un remous.

La prise d'eau de l'usine se fait au moyen d'une vanne placée en A à l'origine du canal d'amenée Af dont la pente est très faible; hC est le canal de fuite qui ramène les eaux à la rivière. La chute se produit dans l'usine entre les points f et h, où sont installés les engins moteurs, roues, turbines et dynamos.

Les ouvrages régulateurs du niveau des eaux comprennent un déversoir de superficie D et une vanne de décharge V. Quelquefois il existe une seconde vanne V' suivie d'un canal de décharge. La longueur du déversoir est au moins égale à la largeur moyenne du cours d'eau, et sa crête est dérasée à la cote du niveau légal, de façon à obtenir avec le barrage, qui fonctionne également comme déversoir, une crête de déversement double de la largeur de la rivière. Tant que les eaux à l'amont du barrage sont en contre-bas du niveau de retenue, la vanne de décharge reste fermée; l'usinier la lève dès que ce niveau se trouve notablement dépassé.

La figure 450 n'est évidemment qu'un schéma; il est clair que les positions relatives des ouvrages, leurs formes et dimensions, varient à l'infini suivant les circonstances locales.

Chaque usine d'un cours d'eau a son niveau de retenue particulier, qui fixe la hauteur de la chute, c'est-à-dire la force motrice de l'usine. Lorsqu'un industriel projette d'ins

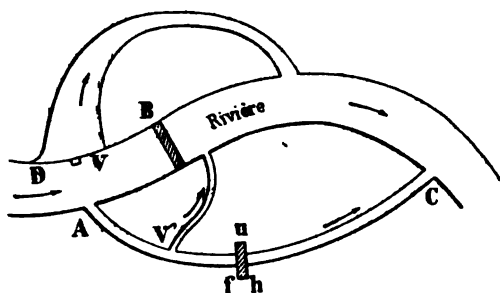


FIG. 456.

taller une usine hydraulique, l'Administration intervient pour réglementer les dimensions des ouvrages régulateurs et fixer le niveau légal de retenue.

En temps de crue, lorsque la rivière est prête à déborder, le déversoir et la vanne de décharge doivent pouvoir évacuer la totalité du débit, comme si le barrage n'existait pas. Le niveau de retenue doit être déterminé par la condition que le remous ne puisse jamais envahir les terres riveraines et causer un préjudice quelconque aux tiers intéressés.

On voit que la réglementation d'une usine hydraulique nécessite l'étude du remous en amont du barrage; ordinairement cette étude se fait pour les basses eaux et pour les eaux moyennes.

175. Tracé de la courbe du remous. — Dans la pratique, on opère généralement de la façon suivante pour tracer approximativement la courbe du remous en amont d'un barrage.

Soit DN le barrage (fig. 457) et AG la droite du régime uniforme, c'est-à-dire la ligne des eaux moyennes avant la construction du barrage.

La formule des déversoirs détermine la position du point B, d'après la charge qu'il sera nécessaire d'avoir sur la crête D pour obtenir le débit Q du cours d'eau.

D'autre part, toutes les observations faites sur les cours d'eau à faible pente s'accordent pour reconnaître que le remous cesse d'être appréciable au delà d'un point A, situé sur l'horizontale du point F, tel que $BF = BG$.

Le point B étant déterminé, le procédé approximatif que nous avons en vue consiste à remplacer la courbe réelle par une parabole du second degré passant par les points B et A et tangente à l'horizontale BK et à la droite AG.

En appelant z_0 la surélévation BG du point B au-dessus de la ligne du régime uniforme, z la surélévation en un point quelconque situé à la distance s du barrage, l'équation de cette parabole est :

$$z = \frac{(2z_0 - is)^2}{4z_0} \quad (\alpha)$$

Donnant à s une série de valeurs équidistantes de 100 mètres par exemple, cette équation fait connaître les valeurs correspondantes de z , lorsque z_0 est calculée. On obtient de cette façon autant de points de la courbe qu'on en a besoin. On peut aussi se donner des valeurs de z équidistantes de 0,10, et calculer les longueurs correspondantes.

Quelquefois même on procède plus simplement encore en remplaçant l'arc de parabole par un arc de cercle tangent à l'horizontale BK au point B et à la droite AG; on détermine alors le point A en prenant $KA = KB$.

Ces tracés approximatifs s'appliquent pour les canaux d'une forme quelconque et pour les rivières; ils s'écartent plus ou moins de la courbe effective suivant l'influence de la pente, le profil et la grandeur du lit. Lorsque la pente est faible, ce qui est un cas assez général, l'approximation obtenue est suffisante au point de vue pratique.

Nous ferons observer qu'aucune formule ne peut donner une sécurité complète pour se rendre compte des effets du

remous dans des cas exceptionnels. D'après M. Graëff, lorsque l'importance du cours d'eau le permet, il n'y a rien de mieux à faire que de construire un barrage provisoire en bois pour étudier les effets à attendre du barrage projeté. Sur un canal de navigation, si l'on ne considère que l'effet utile du remous, on peut limiter son influence à l'horizontale passant par la crête D.

La distance FA est l'amplitude du remous; on peut la

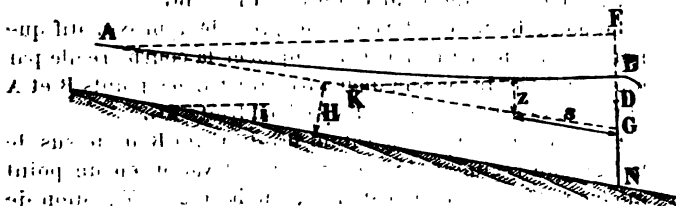


FIG. 457.

confondre avec GA à cause de la petitesse des inclinaisons; posons $FA = \delta$. Le triangle GFA donne, en observant que $GF = 2BG = 2z_0$:

$$\frac{GF}{AF} = \frac{2z_0}{\delta} = i,$$

d'où l'on déduit :

$$\delta = \frac{2z_0}{i}.$$

PROBLÈME. — Étant donné un canal à section rectangulaire de 2 mètres de large, revêtu de moellons, dont la pente $i = 0,004$ et le débit $Q = 1$ mètre cube, étudier la courbe du remous en amont d'un barrage de 0^m,60 de hauteur.

1° On commence par calculer la profondeur H qui correspond au régime uniforme; il faut procéder par tâtonnements.

Faisons $H = 0,60$, et calculons le débit; on trouve, successive-

$$w = 2,00 \times 0,60 = 1,20.$$

$$x = 2,00 + 1,20 = 3,20,$$

$$R = \frac{1,20}{3,20} = 0,38.$$

3° La formule parabolique qui donne la surélévation z à une distance s du barrage est :

$$z = \frac{(1,00 - 0,001s)^2}{2,00} ;$$

on peut l'écrire, en résolvant par rapport à s :

$$s = 1000(1 - \sqrt{2z}).$$

Faisons successivement : $z = 0,40, 0,30, \dots, 0,05$; on obtient :

$z = 0,40$	$s = 106$ mètres
$z = 0,30$	$s = 225$ —
$z = 0,20$	$s = 368$ —
$z = 0,10$	$s = 553$ —
$z = 0,05$	$s = 684$ —
$z = 0$	$s = 1000$ —

Ces chiffres suffisent pour tracer approximativement la courbe du remous.

176. Remous d'abaissement. — Supposons que l'on ait constamment :

$$\alpha U^2 < gh, \quad h < H.$$

Dans ce cas, la fraction (β') reste négative, et dh est de signe contraire à ds ; par suite, lorsqu'on descend dans le sens du courant, h diminue et U augmente; au contraire, h croît avec s lorsqu'on s'éloigne du côté de l'amont.

La hauteur h diminuant quand s augmente, la seconde inégalité restera toujours satisfaite; mais la différence $gh - \alpha U^2$ allant toujours en décroissant, il arrivera que $\alpha U^2 = gh$. On voit ainsi que le profil du niveau s'éloigne constamment de la droite qui répond au mouvement uniforme, au-dessous de laquelle il est entièrement situé, et que, pour une certaine valeur h' de h , répondant à $s = s'$, la tangente est normale au fond du canal. Comme l'hypothèse

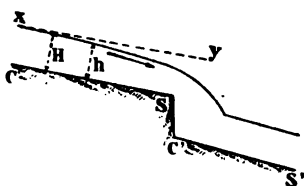


FIG. 459.

du parallélisme des filets liquides, qui sert de base à toute l'hydraulique, est incompatible avec ce résultat, il faut que, à partir d'une valeur de s plus petite que s' ou d'une valeur de h plus grande que h' , il y ait discontinuité dans le mouvement; effectivement le liquide prend une forme arrondie et vient, en tourbillonnant, rencontrer la masse liquide d'aval animée d'une vitesse différente; ce résultat est ordinairement dû à une solution de continuité de la ligne de fond.

Au delà du point de chute, le régime du canal peut être changé, il est alors sous l'influence de son extrémité d'aval, et la pente peut être différente; les équations premières ne sont plus applicables à ce mouvement.

177. Ressaut. — On donne le nom de ressaut à un phénomène particulier que l'on observe fréquemment dans les égouts, et quelquefois sur les canaux à forte pente lorsqu'une partie tranquille succède à une partie torrentielle; on l'observe aussi au delà du débouché des vannes.

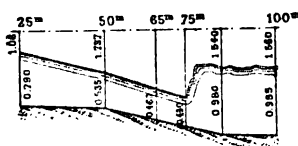


FIG. 461.

Ce phénomène a été observé par Bidone et ensuite par Darcy et M. Bazin.

Il existe, en France, deux ressauts bien connus : celui du pont de Roquefavour, qui se répercute sur une longueur de près de 50 mètres, et celui du canal de Craponne (fig. 461).

Dans la discussion du remous, supposons que l'on ait :

$$\alpha U^2 > gh, \quad h < H.$$

La dérivée $\frac{dh}{ds}$ est positive; la hauteur h croîtra avec s , et U diminuera. Il arrivera donc qu'on s'arrêtera à l'une ou l'autre des deux égalités :

$$\alpha U^2 = gh, \quad h = H.$$

Si c'est la première qui se trouve d'abord vérifiée, la tangente à la ligne d'eau deviendra normale au fond en un

certain point du profil, ce qui est inadmissible pour les mêmes motifs que ceux donnés au précédent paragraphe.

Il y a effectivement, pour une valeur moindre de s , discontinuité dans l'écoulement ; la masse d'eau d'amont vient heurter celle d'aval animée d'une moindre vitesse, en donnant lieu à des tourbillons tumultueux, de sorte que le niveau éprouve une surélévation brusque. Il se produit ainsi un ressaut d'élévation au delà duquel le régime du canal se trouve changé (fig. 462) ; ce cas est assez fréquent dans les cours d'eau torrentiels.



FIG. 462.

Si c'est l'égalité $h = H$ qui est d'abord satisfaite, le profil de la ligne d'eau restera continu et sa tangente sera parallèle à la ligne de fond dans une certaine section transversale ; au delà de cette section, h restera constante, et alors le régime sera uniforme, ou bien la différence $h - H$ deviendra positive, $\frac{dh}{ds}$ sera négative, et l'on rentrera dans le remous d'abaissement.



FIG. 463.

On voit que le ressaut d'élévation est caractérisé par les conditions $\alpha U^2 > gh$ et $h < H$.

Il se produit encore un ressaut lorsqu'on a les inégalités $\alpha U^2 > gh$, $h > H$. La dérivée $\frac{dh}{ds}$ est négative, la hauteur h commence par décroître et U augmente lorsqu'on descend vers l'aval ; le dénominateur de (β) reste négatif, mais il peut arriver que le numérateur s'annule, et alors la tangente à la ligne d'eau est parallèle au fond dans une certaine section ; au delà, le numérateur devenant négatif, h augmente,

ce qui occasionne un ressaut plus ou moins allongé. Ce cas se présente dans les cours d'eau à faible pente.

178. Canal de grande largeur. — Les formules se simplifient et l'intégration devient plus simple, lorsque la profondeur du canal est faible par rapport à sa largeur, ce qui se produit dans certains cours d'eau dont le lit est très large.

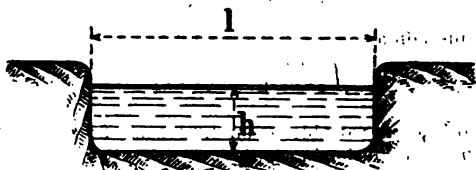


FIG. 464.

On a encore : $\omega = lh$, mais on peut faire approximativement $x = l$, $R = h$; l'équation (u) devient, en négligeant h et H devant l :

$$ids = \frac{1 - \frac{\alpha i \cdot H^3}{bg h^3}}{1 - \frac{H^3}{h^3}} dh ;$$

on peut l'écrire :

$$ids = \left[1 + \frac{1 - \frac{\alpha i}{bg}}{\frac{h^3}{H^3} - 1} \right] dh.$$

Développons en série le quotient :

$$\frac{1}{\frac{h^3}{H^3} - 1} = \frac{H^3}{h^3} + \frac{H^6}{h^6} + \frac{H^9}{h^9} + \dots ;$$

cette série est convergente lorsque $h > H$, ce qui correspond au remous d'exhaussement.

Posons pour simplifier $\lambda = \frac{h}{H}$, et décomposons le même quotient en fractions simples ; on trouve facilement :

$$\frac{1}{\lambda^3 - 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\lambda - 1} - \frac{\lambda + 2}{\lambda^2 + \lambda + 1} \right) ;$$

par suite, on a :

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda^3 - 1} = \frac{1}{6} L \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda^2 + \lambda + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \cotg \frac{2\lambda + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

La table XVI, calculée par Bresse, donne les valeurs de la fonction :

$$\psi(x) = \frac{1}{6} L \frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \cotg \frac{2x + 1}{\sqrt{3}};$$

de sorte que l'on a :

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda^3 - 1} = C - \psi(\lambda).$$

Revenant à la variable h , on trouve en fin de compte pour l'équation de la courbe du remous :

$$i(s - s_0) = h_0 - h + H \left(1 - \frac{ai}{bg} \right) \left[\psi \left(\frac{h}{H} \right) - \psi \left(\frac{h_0}{H} \right) \right].$$

Il ne faut pas oublier que cette formule ne s'applique qu'aux cours d'eau très larges ; on pourrait s'écarter notablement de la vérité en l'utilisant pour des canaux et des rivières de dimensions restreintes.

179. Cas où la pente est nulle. — Les formules du remous se simplifient également lorsque la pente du canal est nulle, ou à peu près, et que son plafond est horizontal ; ce cas est assez fréquent dans la pratique.

La formule (β) devient pour $i = 0$:

$$ds = \frac{R\alpha}{bhg} dh - \frac{R}{bU^2} dh;$$

remplaçant R et U par leurs valeurs en fonction de h et Q :

$$ds = \frac{\alpha}{bg} \frac{l}{l + 2h} dh - \frac{l^3 h^3}{bQ^2(l + 2h)} dh.$$

D'autre part, on vérifie aisément que :

$$\int \frac{dh}{l + 2h} = \frac{1}{2} L(l + 2h) + C,$$

$$\int \frac{h^3 dh}{l + 2h} = \frac{1}{8} \left[\frac{4}{3} h^3 - lh^2 + l^2 h - \frac{l^3}{2} L(l + 2h) \right] + C'.$$

Ces deux relations donnent l'expression intégrale $(s - s_0)$.

Ordinairement le premier terme de ds est négligeable devant le second, et l'on peut pratiquement poser :

$$s - s_0 = \frac{l^3}{bQ^2} \int_h^{h_0} \frac{h^3 dh}{l + 2h};$$

on tire de cette équation :

$$Q^2 = \frac{l^3}{b(s - s_0)} \int_h^{h_0} \frac{h^3 dh}{l + 2h}.$$

Cette formule donne le moyen de calculer le débit du canal, lorsqu'on connaît la profondeur dans deux sections.

180. Changement de la section d'un canal. — Le rétrécissement graduel de la section d'un canal produit un remous d'exhaussement que l'on peut calculer approximativement dans le cas d'une section rectangulaire.

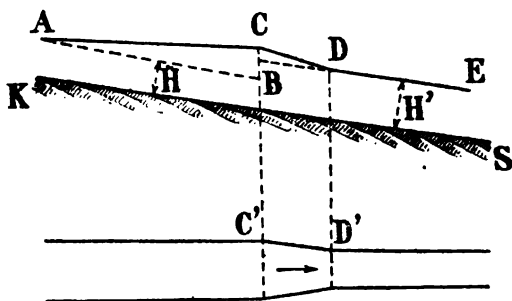


FIG. 465.

On peut d'abord observer qu'en vertu de l'équation :

$$\omega U = \omega' U',$$

qui exprime la permanence du régime du cours d'eau, la vitesse U' dans la section rétrécie D, d'aire ω' , est supérieure

à la vitesse moyenne U dans la section non étranglée C , d'aire ω .

Soit KS la ligne de fond. Désignons par H et H' les profondeurs du régime uniforme, supposé établi dans les deux sections; on a évidemment $H < H'$, puisque ω' est plus petit que ω . Le profil de la ligne d'eau $ACDE$ présente la disposition de la figure, car l'écoulement exige une pente superficielle entre les profils C et D . La courbe du remous CA se raccorde asymptotiquement vers l'amont avec la droite du régime uniforme. La profondeur au point D est égale à H' , et DE est parallèle à KS .

Le tracé de la courbe du remous exige le calcul de la surélévation BC . Or la formule des canaux très larges donne pour la section d'amont :

$$Hi = bU^2,$$

et pour la section d'aval :

$$H'i = bU'^2.$$

Si l'on appelle l et l' les largeurs des sections, l'équation du débit s'écrit :

$$HlU = H'l'U'.$$

On tire de ces équations :

$$\frac{H'}{H} = \frac{U'^2}{U^2} = \frac{lU}{l'U'},$$

ou encore :

$$\frac{U'}{U} = \sqrt[3]{\frac{l}{l'}},$$

enfin :

$$\frac{H'}{H} = \sqrt[3]{\frac{l^2}{l'^2}}.$$

Le calcul de la surélévation $BC = z_0$ est maintenant facile, on a :

$$z_0 = \alpha \frac{U'^2 - U^2}{2g} + H' - H, \quad (m)$$

c'est-à-dire, d'après les relations précédentes,

$$z_0 = \alpha \frac{U^2 - U^2}{2g} + H \left[\sqrt[3]{\frac{l^2}{l'^2}} - 1 \right].$$

Connaissant z_0 , la courbe du remous se construit comme il est indiqué au paragraphe 175.

La même équation est applicable pour le calcul de l'abaissement de niveau qui se produit à l'entrée d'une section élargie; mais l' est plus grand que l . Dans la partie élargie, le niveau de l'eau se relève progressivement en descendant vers l'aval, et la courbe du remous est celle de l'exhaussement. A l'extrémité aval de la partie élargie, le raccordement se fait comme il est dit plus haut.

181. Rétrécissement de faible longueur. — Le calcul serait plus long si le rétrécissement, au lieu de s'étendre indéfini-

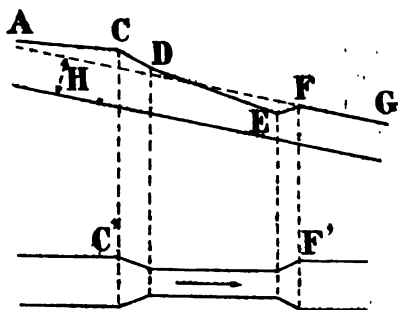


FIG. 466.

ment vers l'aval, ne subsistait que sur un faible parcours, ce qui est un cas assez étendu.

La ligne d'eau ACDEFG présenterait la disposition indiquée sur la figure, avec un remous d'exhaussement AC, suivi d'une chute CDE, et d'un relèvement brusque en EF pour se raccorder avec la droite du régime uniforme, après que le lit aurait repris sa largeur normale. Ce relèvement est dû à la différence de charge correspondant à la différence des vitesses.

Appelons :

z , la dénivellation en E au-dessous de la droite du régime uniforme;

U , l , la vitesse et la largeur dans la section normale;

U' , l' , la vitesse et la largeur au profil E.

L'équation donne :

$$l'(H - z) U' = lHU,$$

d'où l'on tire :

$$U' = \frac{lHU}{l'(H - z)};$$

transportant cette valeur de U' dans la formule :

$$z = \alpha \frac{U'^2 - U^2}{2g} = \frac{\alpha U^2}{2g} \left[\frac{l^2 H^2}{l'^2 (H - z)^2} - 1 \right],$$

on obtient une équation du troisième degré en z , qui permet de déterminer cette hauteur; on a ainsi une valeur approchée de la dénivellation en E; on prend $\alpha = 1,10$.

Connaissant z , il est facile de tracer la courbe ED et de calculer la vitesse en D; cette vitesse détermine ensuite la position du point C comme dans le problème précédent. Dans une première approximation, on pourra supposer que le régime est uniforme en DE.

Dans le cas d'un élargissement, le relèvement EF est remplacé par une chute, et la courbe du remous DE est celle de l'exhaussement; on applique la même formule et l'on procède d'une façon analogue.

182. Rétrécissement brusque de faible longueur. — La formule rigoureuse de l'exhaussement dans le cas d'un rétrécissement brusque est encore à trouver. On a un exemple de ce phénomène dans le remous que l'on observe au passage de l'eau sous un pont.

Soient P et P' deux piles adjacentes; toute la masse d'eau qui, avant la construction du pont, s'écoulait dans l'intervalle des droites P et P', n'a plus à sa disposition, après l'établissement de l'ouvrage, que l'intervalle des droites H et H'.

L'observation montre que le profil de la ligne d'eau ABCDEF

cesse d'être une droite, et présente l'aspect de la figure 467, avec une chute BC suivie d'un relèvement DE. L'importance de BC dépend principalement de la grandeur du rétrécissement et du débit de la rivière.

On peut calculer approximativement le remous par la formule :

$$z = \frac{\alpha (U'^2 - U^2)}{2g}; \quad (1)$$

z représente la dénivellation superficielle entre les points B

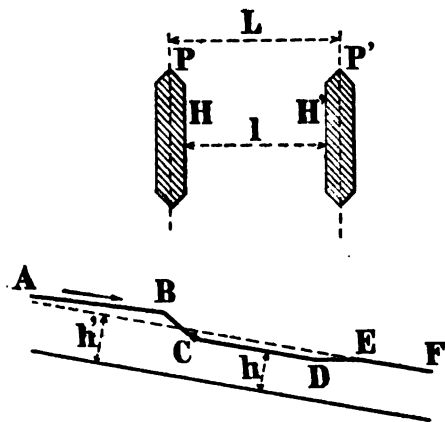


FIG. 467.

et C; U et U' sont les vitesses moyennes dans les deux sections transversales, c'est-à-dire les quotients du débit par les aires de ces sections.

Cette formule n'est autre chose que l'équation (m) (180), dans laquelle on fait $H = H'$, ce qui revient à poser $\Pi = h$, c'est-à-dire à négliger le relèvement DE.

Appelons :

L , la distance d'axe en axe des piles P et P' ;

l , la largeur rétrécie;

m , le coefficient de contraction dû au changement brusque de section.

On a les équations :

$$L(h+z)U = m h U' = Q,$$

desquelles on déduit :

$$U = \frac{Q}{L(h+z)}, \quad U' = \frac{Q}{m h};$$

remplaçant dans (1) U et U' par ces valeurs, il vient :

$$z = \frac{\alpha Q^2}{2g} \left[\frac{1}{m^2 l^2 h^2} - \frac{1}{L^2 (h+z)^2} \right]. \quad (2)$$

C'est l'équation du troisième degré en z indiquée par Bresse dans son *Cours d'hydraulique*; cette équation se traite par approximations successives ou graphiquement. On s'en sert pour calculer le remou en amont d'un pont projeté, en prenant pour L la largeur moyenne du cours d'eau avant la construction du pont, et pour l la largeur moyenne du débouché après la construction. On peut aussi calculer l lorsqu'on connaît L et que l'on se fixe *a priori* le remous z .

Eytelwein avait indiqué une formule analogue pour des avant-becs carrés, avec $m = 0,80$. Dans le cas d'avant-becs triangulaires, on pourrait faire $m = 0,90$; mais bien des ingénieurs adoptent pour tous les cas la valeur $m = 0,80$.

EXEMPLES. — 1°. Soit un pont de 3 arches, de 10 mètres d'ouverture chacune, ensemble... 30 mètres
à construire sur une rivière dont la largeur moyenne est de..... 40 mètres
dont le débit maxima par seconde en temps de crue est de..... 150 mètres cubes
et dont la profondeur des eaux est de..... 3 mètres
On a alors :

$$Q = 150, \quad L = 40, \quad l = 30, \quad h = 3;$$

la formule devient :

$$z = \frac{1.1 \times 150^2}{19,62} \left[\frac{1}{0,80^2 \times 30^2 \times 9} - \frac{1}{40^2 (3+z)^2} \right].$$

On calcule d'abord le second membre en faisant $z = 0,10$, ce qui donne $z = 0,146$; recommençant le calcul avec cette dernière

valeur de z , on obtient comme seconde approximation $z = 0,160$, chiffre dont on peut se contenter.

La formule de Bresse s'applique avec assez d'exactitude au calcul des faibles remous, comme il s'en produit à l'amont des ponts à piles minces et à culées peu saillantes, non accompagnées de levées, lorsque les crues ne s'élèvent pas contre les tympans; c'est le cas de l'exemple ci-dessus. Mais, quand le niveau des crues doit dépasser notablement celui des naissances, on ne peut plus négliger la contre-pente DE, qui devient très sensible au point de se transformer quelquefois en brusque ressaut, et la formule (2) n'offre plus aucune sécurité.

2° Lors de la construction du pont-aqueduc de la Mauldre sur la dérivation de l'Avre, on avait comme données :

$Q = 30$ mètres cubes, débit maximum de la rivière aux époques des crues;

$L = 100$ mètres, largeur de la vallée;

$l = 13$ mètres, débouché linéaire du pont projeté;

$h = 3,85$, hauteur d'eau sous le pont.

La formule (2) donne pour la hauteur du remous, en faisant $m = 0,80$:

$$z = \frac{1,1 \times 30^2}{2g} \left[\frac{1}{0,80^2 \times 13^2 \times 3,85^2} - \frac{1}{100^2 (3,85 + z)^2} \right];$$

effectuant les produits, développant l'équation et résolvant, on obtient :

$$z = 0,045.$$

REMARQUE. — Pour tenir compte du relèvement DE, on peut raisonner de la façon suivante : appelons h_0 et h' les profondeurs d'eau à l'amont et à l'aval du pont, U' la vitesse qui correspond à la profondeur h' .

On a d'abord l'équation (1) :

$$h_0 - h = \frac{\alpha (U'^2 - U^2)}{2g}; \quad (1)$$

puis, en tenant compte de la perte de charge produite par l'élargissement brusque (57) :

$$h' - h = \frac{\alpha (U'^2 - U^2)}{2g} + \frac{\alpha (U' - U)^2}{2g}.$$

On déduit de cette seconde équation :

$$h' - h = \alpha \frac{U' (U' - U)}{g}. \quad (3)$$

On a d'ailleurs les relations :

$$U = \frac{Q}{Lh}, \quad U = \frac{LhU}{mLh} = \frac{Q}{mLh}, \quad U = \frac{h_0U}{h} = \frac{Q}{Lh};$$

alors, les équations (1) et (3) se réduiront à deux autres entre les inconnues h et h' , et qui, par suite, feront connaître la dénivellation $h_0 = h' - h$.

JAUGEAGE DES COURS D'EAU

183. On trouvera au numéro 72 les procédés les plus pratiques pour jauger les sources et les petits cours d'eau ; le plus communément employé dérive de la formule des déversoirs.

Le jaugeage des cours d'eau de moyenne importance, des rivières, des fleuves, s'effectue par la mesure des vitesses.

Dans une section normale déterminée PP', on mesure l'aire ω du profil en travers du cours d'eau et la vitesse moyenne U ; on calcule ensuite le débit par la formule :

$$Q = \omega U.$$

La vitesse U se déduit, par les relations de Prony ou de M. Bazin, de l'observation de la vitesse superficielle V au milieu du courant ; dans certains cas, on peut l'obtenir directement au moyen de bâtons lestés. Comme cette vitesse s'applique aux divers profils compris dans la partie AB du cours d'eau sur laquelle on a mesuré V , il est bon de relever plusieurs sections ω , équidistantes de 25 à 30 mètres, et de prendre la moyenne des aires obtenues.

Il faut choisir, autant que possible, une partie du cours d'eau sensiblement rectiligne, assez régulière comme profil longitudinal et section transversale, et dans laquelle le mouvement peut être considéré comme uniforme. Il est nécessaire aussi que cette partie, dont la longueur ne doit pas être inférieure à 50 mètres, fasse suite à une autre également régulière et de même forme, car ce n'est pas immédiatement à chaque variation de forme de la section transversale que

la répartition des vitesses s'établit suivant les lois qui ont été précédemment indiquées.

Le procédé ci-dessus offre assez d'exactitude dans la plupart des cas; c'est celui qui est le plus fréquemment appliqué pour les cours d'eau moyens. Lorsqu'on veut obtenir

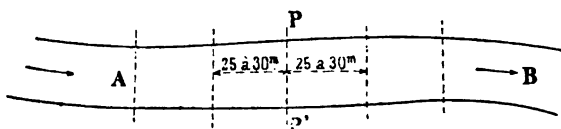


Fig. 468.

des résultats très approchés, qu'il s'agit d'un grand cours d'eau, il est nécessaire de partager la section transversale en un certain nombre de triangles et trapèzes par des ordonnées équidistantes ab, cd, ef (fig. 469). Pour chaque trapèze $abcd$ on mesure la vitesse superficielle au point m milieu de ac et l'on en déduit la vitesse moyenne correspondante que l'on multiplie par l'aire $abcd$. Le débit du cours d'eau s'obtient en additionnant tous les débits partiels. On peut dire que la précision du résultat est en raison du nombre des points où l'on a mesuré la vitesse superficielle, dans une même section transversale.

Au lieu de déduire la vitesse moyenne relative au trapèze

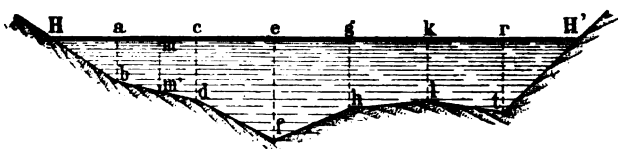


Fig. 469.

$abcd$ de la vitesse superficielle en m , il est encore plus exact de mesurer les vitesses en m et m' et au milieu de mm' ; la moyenne des trois relevés s'écarte généralement très peu de la vitesse moyenne cherchée.

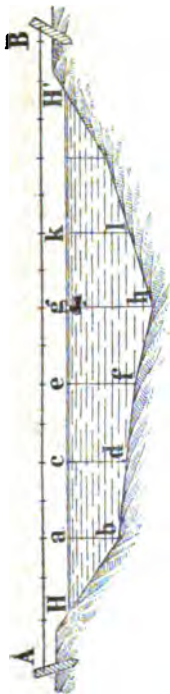
On voit que le jaugeage d'un cours d'eau comprend deux opérations distinctes : 1° le levé des sections transversales;

2° la mesure des vitesses de superficie ou de profondeur. Les vitesses de superficie s'obtiennent au moyen de flotteurs, celles de profondeur à l'aide de divers appareils dont nous donnerons la description.

184. Levé des profils en travers. — Le procédé ordinaire pour relever les profils transversaux consiste à tendre en travers du cours d'eau une corde AB, graduée en mètres par des nœuds ou des cordelettes et solidement attachée aux deux rives.

L'amarrage se fait au moyen de piquets enfoncés dans le sol; pour obtenir une tension constante, on fait quelquefois passer l'une des extrémités de la corde sur une poulie, et un poids suffisamment lourd suspendu à cette extrémité donne toujours la même tension.

FIG. 470.



L'opérateur, placé dans une barque, suit la direction de la corde et mesure avec une sonde ou un jalon des ordonnées équidistantes, telles que ab, cd, ef , etc...; l'équidistance ac est de 2, 3, 5 mètres

suivant la largeur du cours d'eau et les déclivités de son lit.

Il suffit ensuite, pour avoir le profil en travers cherché, de

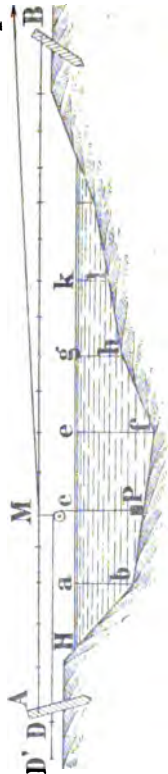


FIG. 471.

reporter sur une feuille, à une échelle déterminée, 0,005 par mètre par exemple, tous les points relevés et de les joindre par une ligne polygonale *Hbdf*...

D'autres fois, pour éviter l'emploi du bateau, dont les oscillations amènent toujours une légère modification du plan normal de l'eau, on a recours à un anneau mobile *M* portant une poulie sur laquelle passe un cordeau *DC* supportant un poids *P*. L'anneau est manœuvré de la rive opposée par un aide-opérateur au moyen d'une ficelle *F*.

L'anneau et la poulie étant amenés au point *c*, l'opérateur installé en *D* laisse glisser le poids *P*, en tenant le cordeau tendu, jusqu'à ce que sa main ne soit plus attirée, ce qui indique que le poids touche le fond; retirant ensuite le cordeau jusqu'à ce que le poids vienne affleurer l'eau en *c*, l'opérateur n'a plus qu'à mesurer la longueur *DD'* dont s'est allongé le cordeau pour obtenir la profondeur au point *c*.

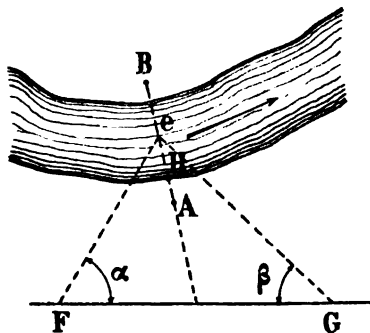


FIG. 472.

Les relevés en *a* et *c* étant terminés et les profondeurs consignées sur le carnet de l'opérateur, l'aide tire sur la ficelle *F* pour amener l'anneau en *e* où l'on recommence l'opération, et ainsi de suite en *g*, *k*, etc...

Ce procédé s'applique sans difficulté tant que la largeur du cours d'eau ne dépasse pas

25 mètres, et la vitesse de l'eau 1,20, par seconde. Au-dessus de 1,20 l'action du courant sur le fil à plomb fausse la longueur des ordonnées entre le fond du lit et la surface de l'eau, car le fil s'éloigne sensiblement de la position verticale.

Lorsque la largeur du cours d'eau est trop grande pour que l'on puisse tendre un câble rectiligne d'une rive à l'autre, on cherche néanmoins à diriger la barque suivant la droite *AB*; un aide placé en *A* indique l'alignement

sur le point B. Dans ce cas, la mesure directe des distances horizontales Hd, ae, be, etc..., est le plus souvent impraticable, et pour fixer la position d'un point e où l'on fait un sondage, deux observateurs installés en F et G avec des cercles nivelent simultanément; à un signal donné, les angles α et β ont

il va sans dire que l'on a préalablement mesuré les longueurs AB et FG, autrement dit que l'on connaît les situations relatives des quatre points A, B, F, G. La position du point e étant reportée à l'échelle sur la droite AB, on en déduit la distance He.

185. Flotteurs. — Les petits flotteurs en liège n'offrent aucune sécurité comme exactitude; ils ne conviennent que dans le cas d'un écoulement lent et régulier, lorsqu'il ne se présente aucun obstacle, par exemple pour le jaugeage d'un aqueduc. Ces flotteurs sont beaucoup trop légers; ils obéissent à l'action du vent, et leur mouvement est arrêté ou modifié par le moindre obstacle.

On se sert quelquefois de morceaux de bois de chêne de 0,05 de diamètre et de 0,30 de longueur environ, qui donnent d'assez bons résultats.

M. Debaube a trouvé une assez grande régularité dans les indications du flotteur suivant qui est facile à construire.

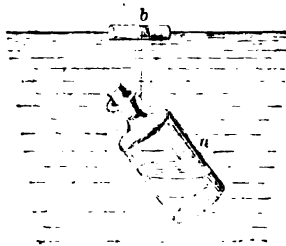


Fig. 473.

On prend une petite bouteille a, d'un décilitre par exemple; à son goulot, on attache par une courte ficelle un bouchon b. La bouteille a est munie de son bouchon; on la lèse à l'intérieur avec de la grenaille de plomb ou avec de l'eau, de telle sorte que tout l'appareil flotte, le bouchon b restant seul à la surface du liquide; après quelques tâtonnements on arrive en un instant à ce résultat. Ce système constitue un flotteur presque insensible au vent et à la résistance de l'air, et qui marche avec la vitesse des filets situés dans le voisinage de la surface.

Lorsqu'on lance l'appareil dans l'eau, il plonge d'abord,

puis se relève et, après quelques oscillations, se fixe dans la position indiquée par la figure.

Quel que soit le système de flotteurs adapté, la vitesse de superficie V s'obtient en comptant exactement le temps que met un flotteur à parcourir une distance connue. Pour l'exactitude des résultats, il faut que cette distance ne soit pas inférieure à 50 mètres, et, si cela est possible, on la prend de 100, 200, et même 300 mètres. Il importe de faire les observations par un temps calme, car le moindre vent pourrait modifier sensiblement la vitesse des flotteurs.

Lorsqu'on a trouvé un emplacement convenable AB pour faire les relevés, on plante sur la rive deux piquets ou repères A et B espacés d'une distance connue. Cela fait, un aide placé dans une barque en h , à 20 mètres environ en amont du repère A , lâche un flotteur au fil de l'eau; ce flotteur est entraîné et, lorsqu'il passe en a au droit du repère A , un observateur muni d'une montre à secondes note exactement l'instant du passage. Un second observateur placé au droit du repère B , muni également d'une montre réglée avec celle du premier, note pareillement l'instant où le même flotteur traverse en b la section BD ; il vérifie, en outre, que ce flotteur ne s'est pas sensiblement écarté du milieu du courant, auquel cas l'opération est valable.

Il ne reste, pour obtenir la vitesse V , qu'à diviser la dis-

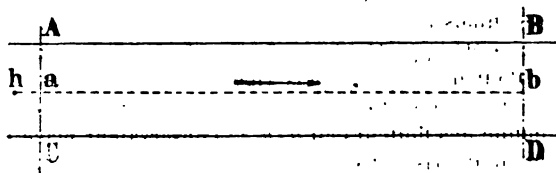


FIG. 474.

tance en mètres des sections AC et BD par le nombre de secondes mis par le flotteur à passer de l'une à l'autre. — Une seule épreuve serait insuffisante; on la renouvelle trois ou quatre fois et on obtient une moyenne du nombre de secondes qu'il faut au flotteur pour parcourir AB ; la vitesse se calcule d'après cette moyenne.

Par exemple, si la longueur AB est de 200 mètres, et que le flotteur mette en moyenne 400 secondes pour aller de A en B, on a pour la vitesse superficielle :

$$V = \frac{200}{400} = 0,50 \text{ par seconde.}$$

Lorsque la largeur du cours d'eau le permet, il est plus exact de fixer les alignements AC et BD par deux câbles transversaux. On peut aussi utiliser deux couples de jalons installés aux points A, B, C, D.

Pour le cas où l'on serait dépourvu de montre à secondes,

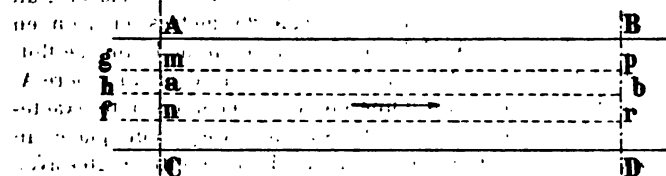


Fig. 475.

M. Graëff indique la possibilité de s'en passer en confectionnant sur place un pendule de 0^m,994 de longueur, battant la seconde, au moyen d'une pierre attachée à l'extrémité d'une ficelle. Ce procédé approximatif peut suffire pour des reconnaissances sommaires ; son exactitude dépend du soin qui a été apporté à la confection du pendule et à son emploi.

Pour un jaugeage plus rigoureux, si l'on désire mesurer la vitesse des filets liquides tels que *mp*, *ab*, *nr*, on abandonne des flotteurs en *g*, *h*, *f* ; l'observateur placé en A vérifie qu'ils passent bien aux points *m*, *a*, *n*, ou dans leur voisinage ; de même l'observateur installé en B vérifie que ces flotteurs ne s'écartent pas trop des points *p*, *b*, *r*. Lorsque l'écart est trop considérable, on annule l'observation.

Un second aide placé dans une barque en aval de BD recueille les flotteurs pour les utiliser de nouveau.

186. Calcul de la vitesse moyenne. — La vitesse moyenne *U*, que l'on doit multiplier par l'aire ω de la section du cours

d'eau pour obtenir le débit, se déduit de la vitesse superficielle V par la formule :

$$U = 0,85V. \quad (1)$$

A vrai dire, le coefficient reste compris entre 0,80 et 0,90; Prony avait indiqué 0,80; ce coefficient est d'autant plus voisin de 0,80 que le fond du cours d'eau est plus irrégulier et que sa largeur est moindre. C'est donc pour les cours d'eau très larges et à fond très uni que l'on doit prendre $U = 0,90V$. En faisant $U = 0,85V$, on choisit une valeur moyenne.

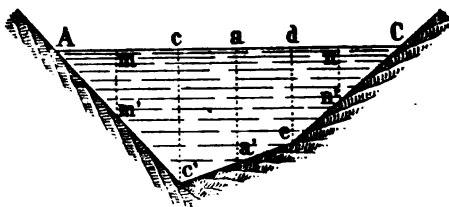


FIG. 476.

Quand on connaît la pente de superficie du cours d'eau, on peut calculer le rayon moyen et utiliser la table de M. Bazin.

Lorsqu'on a mesuré la vitesse superficielle en un certain nombre de points m , a , n de la section transversale, on en déduit assez exactement les vitesses moyennes correspondantes par la formule (1). La vitesse sur mm' doit être multipliée par l'aire du triangle Acc' , celle sur aa' par l'aire du trapèze $cc'de$, et la vitesse moyenne sur nn' par la surface du triangle deC . Le débit total du cours d'eau s'obtient en additionnant les trois débits partiels. Quelquefois on se contente de prendre la moyenne des vitesses en m , a , n , de la multiplier par 0,85 et par la surface totale de la section transversale.

187. Jaugeage par flotteurs. — Les résultats indiqués dans le tableau ci-après se rapportent à un jaugeage exécuté sur la Marne, au voisinage de Nogent. Le bief qui a

servi à la mesure des vitesses avait 500 mètres de long ; la section transversale de la rivière a été partagée en huit triangles et trapèzes, mais on a calculé une seule vitesse moyenne applicable à la section totale, comme dans le cas

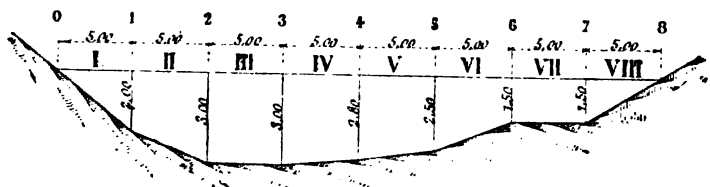


FIG. 477.

de la figure 476. On a utilisé six flotteurs qui ont été lâchés dans l'axe de chaque trapèze.

Section de la Marne à 150 mètres de la borne kilométrique n° 15 (l'eau étant à 2 mètres au-dessus de l'étiage à l'échelle de Nogent).

EMPLACEMENT de la SECTION MESURÉE	DIVISIONS PARTIELLES DU COURS D'EAU			TEMPS ÉCoulé à parcourir la SECTION CONSIDÉRÉE	NOMBRE DE FLOTEURS	TEMPS MOYEN EN SECONDES	VITESSE MOYENNE DE SURFACE	VITESSE MOYENNE EFFECTIVE	DÉBIT PAR SECONDE
	Divisions élémentaires	Profondeur	Largeur						
		mètres	mètres				m.	m.	m ³
Rivière de la Marne sur 300 mètres en aval de la borne kilométrique 15.	I	1,00	5,00	5,00	6	186	2,68	2,28	18
	II	2,50	5,00	12,50					
	III	3,00	5,00	15,00					
	IV	2,90	5,00	14,50					
	V	2,65	5,00	13,25					
	VI	2,00	5,00	10,00					
	VII	1,50	5,00	7,50					
	VIII	0,75	5,00	3,75					
	Totaux			84,50					
				1117					

Les chiffres des quatre dernières colonnes se déduisent des éléments mesurés par les relations :

$$186'' = \frac{1117''}{6}, \quad 2,68 = \frac{1500}{186},$$

$$2,28 = 2,68 \times 0,85, \quad 186 = 81,50 \times 2,28.$$

Divers expérimentateurs ont imaginé des appareils spéciaux, plus ou moins compliqués, qui permettent de mesurer la vitesse des filets liquides situés à différentes profondeurs. La plupart de ces appareils ne sont pas entrés dans la pratique; nous ne parlerons que des plus intéressants : les bâtons lestés, le tube de Pilot perfectionné par Darcy, et le moulinet de Woltmann.

188. Bâtons lestés. — Pour mesurer directement la vitesse moyenne sur une verticale, lorsque la profondeur du cours d'eau n'est pas trop grande, on peut se servir d'une tige ou bâton lesté à sa partie inférieure, de manière à se tenir debout dans l'eau et à descendre presque jusqu'au fond du courant. Le bâton n'émerge que d'une très faible hauteur, 0,05 environ, ce qui diminue l'effet de la résistance de l'air.

On leste naturellement l'appareil en le constituant d'une tige de chêne, bien droite, de 0,06 de diamètre environ, que l'on immerge dans l'eau pendant quelques jours. On peut également se servir d'un tube en fer-blanc terminé par un petit cylindre creux dans lequel on place des rondelles de plomb. Le bâton est abandonné au fil de l'eau et descend légèrement incliné vers l'aval; pour que sa vitesse représente la vitesse moyenne de l'eau dans le plan vertical qu'il parcourt, il faut que la longueur du bâton soit les 94 centièmes de la profondeur du cours d'eau.

Pour un bâton d'une longueur moindre, on démontre que sa vitesse d'entraînement représente la vitesse du filet qui rencontre le bâton aux $\frac{3}{5}$ de sa profondeur.

Les bâtons lestés fournissent la vitesse moyenne avec une assez bonne approximation; c'est un procédé de jaugeage peu compliqué, qui doit être appliqué toutes les fois que les circonstances le permettent, lorsque le lit du cours d'eau

est régulier, pas encombré, par les herbes, peu profond, et que la vitesse n'atteint pas 1 mètre par seconde.

189. Tube de Pitot. — L'appareil de Pitot est formé d'un tube de verre ABC coulé à angle droit et à branches inégales. L'instrument étant plongé dans l'eau à une certaine profondeur et tenu comme l'indique la figure, l'orifice C recevant directement les filets liquides, l'eau s'élève jusqu'en *a* dans la branche verticale et dépasse le plan de la surface libre du cours d'eau. Une échelle marquée sur le tube et graduée d'après la surélévation *ab* indique la vitesse en C; si l'on pose $ab = h$, on a :

$$V^2 = 2gh.$$

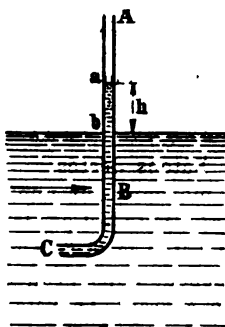


FIG. 478.

Cet appareil comporte de multiples causes d'erreur qui rendent ses indications peu précises; le clapotement de l'eau contre la surface

externe du tube et les oscillations qui se produisent dans l'intérieur rendent difficile la mesure exacte de *ab*, surtout lorsque la vitesse est faible.

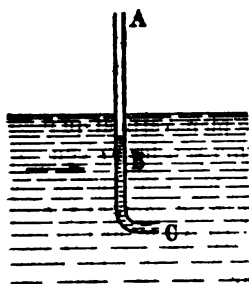


FIG. 479.

On a reconnu que la hauteur *ab* variait avec l'inclinaison de la branche BC sur la direction du courant; si cette branche est normale au courant, ou si le tube est disposé en sens inverse, comme sur la figure 479, la surélévation se transforme en dénivellation; ce résultat est attribué à la déviation que subissent les filets liquides pour remonter dans le tube.

Le tube de Pitot n'est plus employé aujourd'hui qu'avec le perfectionnement de Darcy, qui en a fait un instrument suffi-

samment exact pour les besoins ordinaires de la pratique.

190. Tube de Darcy. — Darcy a perfectionné l'appareil de Pitot en le constituant de deux tubes AB et EF de 1 centimètre de diamètre, fixés sur une planchette qui peut tourner autour d'une tige et s'orienter d'elle-même dans le courant. A leur partie inférieure, ces tubes n'ont plus que 0^m,0015 de diamètre et sont commandés par un même robinet R; les ajutages B et F sont en prolongement l'un de l'autre. A leur partie supérieure, les tubes se réunissent et un robinet S permet de les faire communiquer avec l'atmosphère.

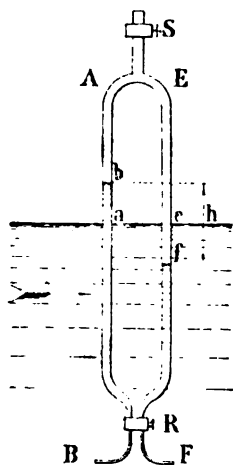


FIG. 480.

Le robinet R étant ouvert, et l'appareil descendu dans le courant à la profondeur voulue, de façon que BF ait le sens de l'écoulement, on observe que le niveau de l'eau monte jusqu'en *b* dans le premier tube et s'arrête en *f* dans le second. Si l'on ferme ensuite le robinet R au moyen d'une communication avec l'extérieur et que l'on remonte l'appareil, la graduation de la planchette donne la dénivellation totale $ab + ef = h$; cette hauteur fait connaître

la vitesse en B d'après la formule :

$$V = m \sqrt{2gh}.$$

Comme les lectures se font mal à une certaine profondeur, on peut encore, sans retirer de l'eau l'appareil, ouvrir le robinet S, aspirer avec la bouche l'air qui se trouve au-dessus des niveaux *b* et *f*, de façon à relever ces niveaux d'une même quantité et à les amener assez haut au-dessus de la surface libre pour que la lecture de leur différence puisse se faire facilement.

Pour déterminer le coefficient *m* particulier à chaque appareil, on peut utiliser les indications d'un flotteur, ou

bien faire mouvoir l'instrument en ligne droite dans une eau tranquille et avec une vitesse constante et connue V' ; si l'on relève la dénivellation h' , on a :

$$m = \frac{V'}{\sqrt{2gh'}}$$

Il est bon, dans ce cas, de répéter l'opération un certain nombre de fois en faisant varier la vitesse, et de prendre la moyenne des valeurs obtenues.

Lorsque les ajutages B et F sont en ligne droite, comme sur la figure, la valeur de m approche de l'unité ; pour des ajutages à angle droit, m reste voisin de 0,84.

Le tube de Darcy n'est réellement pratique que pour les faibles profondeurs et lorsque la vitesse est assez forte ; on s'en sert fréquemment pour la mesure des vitesses de surface.

191. Moulinet de Woltmann. — Le modèle ordinaire du moulinet de Woltmann est formé d'un arbre horizontal B que l'on place dans le sens du courant, et qui porte à son extrémité quatre ailettes planes ou hélicoïdales A, et, en son milieu, une vis sans fin pouvant engrener avec une roue dentée C ; sur l'axe de cette roue se trouve un pignon engrenant une seconde roue D. La tringle verticale FG permet d'élever ou d'abaisser la traverse EF qui tourne autour du pivot E. Enfin, tout le système est mobile le long d'une forte tige verticale IK.

Pour mesurer une vitesse, on commence par régler l'instrument de façon que, la pointe I touchant le fond, l'axe B soit à la profondeur voulue. Si l'on descend ensuite l'appareil dans le courant, les filets liquides viennent heurter contre les ailettes et leur impriment un mouvement qui devient uniforme au bout de quelques instants lorsque le travail produit par le choc de l'eau égale celui des résistances passives.

Quand la rotation uniforme est obtenue, on soulève FG, ce qui fait engrener la roue C avec la vis sans fin, et met en marche les roues C et D. Après avoir maintenu le système

en mouvement pendant deux minutes environ, on arrête la rotation des roues en abaissant la tringle, puis on remonte l'appareil.

La vitesse de rotation de l'axe à ailettes est proportion-

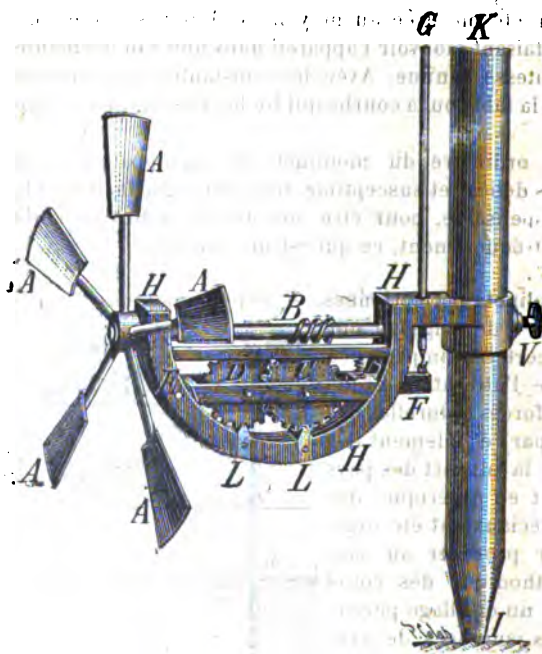


Fig. 481.

nelle à la vitesse V des filets liquides. Si l'on désigne par n le nombre de tours exécutés en une seconde par cet axe, on peut écrire :

$$V = an + b;$$

a et b sont deux coefficients constants pour chaque appareil; très souvent b peut être négligé par rapport à a .

Du nombre de tours exécutés par la roue C et enregistré par un cadran, on déduit le nombre correspondant de tours

de l'axe B; en divisant ce dernier nombre par la durée de l'observation exprimée en secondes, on obtient n .

Les constantes a et b spéciales à chaque instrument se déterminent de la même façon que le coefficient m du tube de Darcy, soit en plongeant le moulinet dans un courant dont la vitesse a été mesurée au moyen de flotteurs, ou mieux encore en faisant mouvoir l'appareil dans une eau dormante avec une vitesse connue. Avec les constantes on construit facilement la table ou la courbe qui lie les vitesses au nombre de tours n .

Le type ordinaire du moulinet est un appareil assez exact, mais délicat et susceptible de se déranger facilement; il est indispensable, pour être sûr de ses indications, de le vérifier fréquemment, ce qui est une sujétion.

192. Moulinets perfectionnés. — Depuis quelques années les questions de jaugeage ont pris une certaine importance à cause de l'utilisation éventuelle des forces naturelles développées par l'écoulement des eaux. Dans la plupart des pays d'Europe et en Amérique, des services spéciaux ont été organisés pour procéder au jaugeage méthodique des cours d'eau avec un outillage perfectionné. Ces jaugeages de précision s'exécutent avec le tube de Darcy, et plus souvent avec les nouveaux modèles de moulinets à embrayage et débrayage électrique et à enregistreurs.

M. Harlacher, ancien directeur des travaux hydrométriques de la Bohême, a perfectionné l'appareil de Woltmann en supprimant tous les engrenages; un compteur électrique accompagné d'un chrono-

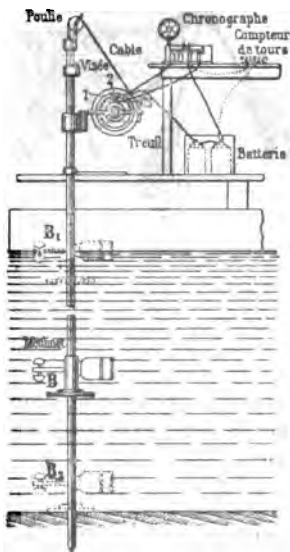


FIG. 432.

graphe enregistreur, placé à l'extérieur et relié par un câble avec l'axe B, indique le nombre de tours effectués par cet axe dans un temps donné. De cette façon les lectures peuvent se faire à chaque instant, et il n'est plus nécessaire de retirer l'appareil après chaque observation, ce qui rend la manœuvre plus simple et les résultats plus exacts.

Tout récemment, M. Hajos, successeur de M. Harlacher, a de nouveau perfectionné le même appareil comme profil des ailettes et comme tarage. On trouvera dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, troisième trimestre de 1898, la description et la théorie complète de ce nouveau moulinet, qui convient spécialement pour les jaugeages de haute précision.

193. Jaugeage par moulinet. — Le tableau ci-après donne les résultats du jaugeage par moulinet de Woltmann exécuté sur la section (fig. 477). Sur l'axe de chaque trapèze et triangle on a mesuré trois vitesses dont on a pris la moyenne : la vitesse de surface, celle de fond, et la vitesse à la moitié de la profondeur.

Pour le tarage de l'appareil, on a fait $a = 0,113$, $b = 0$, de sorte que $V = 0,113n$.

STATIONS	POSITION du moulinet à chaque station	NOMBRE DE TOURS		DURÉE DES EXPÉRIENCES exprimée en secondes		NOMBRE moyen de tours par seconde	VITESSE moyenne	SURFACES	DÉBIT par seconde
		par position	par station	par position	par station				
I	Surface	1.809		100"	300"	16,84	1 ^m ,90	5 ^m 2,00	9 ^m 3,50
	1/2 profondeur..	1.626		100"					
II	Fond	1.616		100"					
	Surface	2.557		id.	900"	19,70	2,23	12,50	27,88
III	Fond	1.613							
	Surface	2.526		id.	300"	21,55	2,44	15,00	36,60
IV	1/2 profondeur..	2.415							
	Fond	1.824		id.					
V	Surface	2.580		id.	300"	21,39	2,42	14,50	35,09
	1/2 profondeur..	2.092							
VI	Fond	1.775		id.	300"	21,39	2,42	13,25	32,07
	Surface	2.092							
VII	1/2 profondeur..	1.775		id.	300"	20,56	2,32	10,00	23,20
	Fond	2.075							
VIII	Surface	2.094		id.	300"	14,48	1,64	7,50	12,30
	1/2 profondeur..	1.690							
IX	Fond	1.063		id.	300"	6,62	0,74	3,75	2,78
	Surface	1.583							
X	1/2 profondeur..	1.107		id.	300"				
	Fond	740							
XI	Surface	713							
	1/2 profondeur..	524							
Total								81 ^m 2,50	179 ^m 3,42

194. Régime varié. — Lorsque le cours d'eau est en régime varié, le procédé des flotteurs offre peu d'exactitude à cause de la variabilité de la section transversale et de la vitesse. On doit alors utiliser le tube de Darcy ou le moulinet pour mesurer les vitesses dans une section transversale dont on a relevé très exactement le profil.

195. PROBLÈME. — Connaissant le profil en long et plusieurs profils en travers d'un cours d'eau, calculer le débit Q .

Le profil en long fait connaître la dénivellation z de la ligne d'eau entre deux points déterminés.

Pour chaque profil en travers, on peut calculer l'aire ω et le périmètre mouillé χ . Supposons connus $n+1$ profils en travers intermédiaires; appelons :

$\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$, les aires des sections transversales;

$\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n$, les périmètres mouillés;

l_0, l_1, \dots, l_n , les longueurs des entreprofils;

U_0, U_1, \dots, U_n , les vitesses moyennes.

La permanence du mouvement donne les relations :

$$Q = \omega_0 U_0 = \omega_1 U_1 = \omega_2 U_2 \dots = \omega_n U_n,$$

desquelles on déduit :

$$U_0 = \frac{Q}{\omega_0}, \quad U_1 = \frac{Q}{\omega_1} \dots \quad U_n = \frac{Q}{\omega_n}.$$

Le premier terme du second membre de l'équation du mouvement varié (168) peut donc s'écrire :

$$\frac{\alpha}{2g} \left(\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \right) Q^2.$$

Si, dans l'intégrale, on remplace la vitesse U par le quotient $\frac{Q}{\omega}$, on obtient :

$$\int_{\omega}^Z b U^2 ds = b Q^2 \int_{\omega}^Z \frac{1}{\omega^3} ds;$$

b et Q constants sortent du signe d'intégration.

Reposant

$$\int \frac{Z}{\omega^3} ds = I_1$$

alors

$$Z = \frac{\alpha}{2g} \left(\frac{1}{\omega_n^3} - \frac{1}{\omega_0^3} \right) Q^2 + bIQ^2;$$

d'où l'on tire :

$$Q^2 = \frac{Z}{\frac{\alpha}{2g} \left(\frac{1}{\omega_n^3} - \frac{1}{\omega_0^3} \right) + bI}$$

L'intégrale I étant calculée, tout se trouve connu dans le second membre de cette formule, qui fait alors connaître Q . On peut faire $\alpha = 1$ pour simplifier. I se calcule par la for-

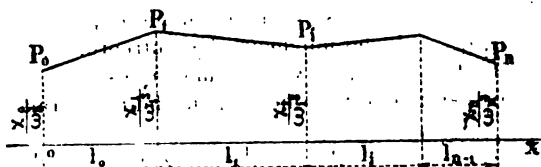


FIG. 483.

mule de Parmentier ou par celle des trapèzes. Dans chaque profil P_i , on connaît l'aire ω_i , le périmètre mouillé χ_i ; on peut donc obtenir $\frac{\chi_i}{\omega_i^3}$ et construire par points la courbe intégrale $P_0P_1...P_n$. Il ne reste plus qu'à évaluer l'aire comprise entre cette courbe, l'axe OX et les ordonnées extrêmes.

196. Formules de jaugeage. — La théorie précédente pour le jaugeage des rivières offre, en général, peu d'exactitude, à cause des erreurs que l'on commet dans l'évaluation de χ et dans le calcul de I . Pour obtenir des résultats suffisamment approchés, il vaut mieux procéder par la mesure des vitesses.

Lorsqu'on a fréquemment besoin d'évaluer le débit approximatif d'un grand cours d'eau, on peut encore employer une

relation empirique liant ce débit à la profondeur H mesurée en un point déterminé.

La forme courante de cette relation est :

$$Q = A (H + C)^{\frac{3}{2}}.$$

A et C sont des coefficients constants pour un même point, mais variables avec le point considéré. La détermination de ces coefficients s'effectue une fois pour toutes par d'autres procédés de jaugeage. H est exprimée en mètres, Q en mètres cubes par seconde.

Lorsque A et C sont connus, on construit facilement, au moyen d'une table de carrés et de cubes, la courbe des débits qui lie les variables Q et H ; cette courbe est une parabole semi-cubique.

Quelquefois la relation prend la forme :

$$Q = A (C - H)^{\frac{3}{2}}.$$

L'équation du mouvement uniforme appliquée à une section rectangulaire de grande largeur et de profondeur h donne :

$$hI = \sigma U^2,$$

c'est-à-dire :

$$hI = \frac{bQ^2}{l^2 h^3}.$$

ou bien :

$$Q = l \sqrt{\frac{I}{b}} h^{\frac{3}{2}}.$$

Pour un point déterminé du cours d'eau, le premier facteur du second membre peut être considéré comme constant ; d'ailleurs la profondeur h ne diffère que par une constante de la hauteur H lue à une échelle fixe, donc $h = H + C$.

Posant $A = l \sqrt{\frac{I}{b}}$, on retrouve la première formule.

Dans l'ordre d'idées en question, le débit de la Seine au

pont de Mantes correspondrait, d'après M. Cuvinot, à la formule :

$$Q = 95 (H + 0,70)^{\frac{3}{2}};$$

celui de la Loire au pont de Roanne serait, d'après M. Graëff :

$$Q = 180 (H + 0,25)^{\frac{3}{2}}.$$

Lombardini avait proposé pour le débit de l'Adda au pont de Côme la formule un peu différente :

$$Q = 100 (1 - 0,032H) H^{\frac{3}{2}}.$$

Par *exemple*, pour $H = 1,30$, le débit de la Seine à Mantes égale :

$$Q = 95 \times \sqrt{2,00^3} = 269 \text{ mètres cubes par seconde.}$$

197. Mouvement non permanent. — On a établi au numéro 39 l'équation du régime non permanent :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = X, \quad (*)$$

qui se déduit immédiatement des équations de l'hydrodynamique; u représente la vitesse des filets liquides en un point, et l'on suppose que cette vitesse est parallèle à l'axe de coordonnées ox . X représente la somme des composantes des forces extérieures qui agissent sur le point, rapportées à l'unité de masse du liquide.

Considérons la masse d'eau qui s'écoule dans un canal par filets sensiblement parallèles suivant la direction CS; prenons deux sections transversales AC et BD séparées par une distance ds . Nous supposons que tous les filets d'eau qui traversent la section AC d'aire ω ont une même vitesse moyenne U ; alors, en appliquant l'équation ci-dessus à tous ces filets, on obtient la relation approchée :

$$\frac{dU}{dt} + U \frac{dU}{ds} = X,$$

dans laquelle X est comptée parallèlement à CS.

Si l'on observe que la masse μ du volume ABCD a pour expression $\frac{\pi \omega ds}{g}$, on peut encore écrire en multipliant par μ :

$$\frac{\pi \omega ds}{g} \left(\frac{dU}{dt} + U \frac{dU}{ds} \right) = \mu X,$$

et μX représente la somme des composantes suivant CS des forces extérieures qui agissent sur l'élément ABCD, forces qui comprennent la pesanteur, les pressions, et la résistance des parois.

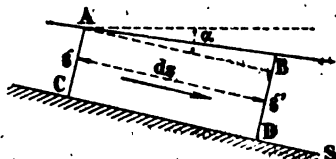


FIG. 484.

La composante de la pesanteur est $\pi \omega ds \sin \alpha$, α

étant l'angle que fait avec l'horizon la droite qui joint les centres de gravité des deux sections. Sur AC, la pression totale est $p\omega$, en appelant p la pression moyenne, et sur BD, $-(p + dp)\omega$; la somme de ces pressions est $-\omega dp$; si l'on observe que $p = \pi y$, en désignant par y la profondeur du centre de gravité g au-dessous du point A, on peut représenter cette somme par $-\pi \omega dy$. Enfin, le frottement aux parois a pour expression $\pi \gamma f(U) ds$. En résumé, on a :

$$\mu X = \pi \omega ds \sin \alpha - \pi \omega dy - \pi \gamma f(U) ds,$$

ce que l'on peut écrire, en appelant dz la distance verticale des points A et B :

$$\mu X = \pi \omega dz - \pi \gamma f(U) ds.$$

Ainsi on a l'équation :

$$\frac{\pi \omega ds}{g} \left(\frac{dU}{dt} + U \frac{dU}{ds} \right) = \pi \omega dz - \pi \gamma f(U) ds,$$

et en divisant par $\pi \omega$ et transposant les termes :

$$dz = \frac{U dU}{g} + \frac{\gamma}{\omega} f(U) ds + \frac{ds}{g} \frac{dU}{dt}; \quad (1)$$

c'est l'équation du mouvement non permanent; elle diffère de celle du mouvement varié (169) par l'adjonction du terme $\frac{ds}{g} \frac{dU}{dt}$, qui tient compte de la variation de la vitesse avec le temps, et par l'hypothèse $\alpha = 1$. Si le régime était permanent et uniforme, le premier et le troisième termes du second membre disparaîtraient.

A cette équation il faut joindre celle qui exprime la continuité de la masse d'eau, et qui s'écrit, en remplaçant dx par ds ,

$$\frac{d\omega}{ds} + \omega \frac{dU}{ds} + U \frac{d\omega}{ds} = 0. \quad (2)$$

Canal rectangulaire. — Nous appliquerons les formules ci-dessus au cas d'un canal à section rectangle dans lequel le débit variable sera obtenu, par exemple, en supposant que ce canal débite sur son parcours, par des prises d'eau latérales, un volume d'eau variable. À l'extrémité aval, la vitesse moyenne et le débit seront nuls. Ce cas se présente à Paris sur l'aqueduc de ceinture qui distribue les eaux de l'Ourcq.

Soit H la profondeur d'eau d'aval, $H + h$ cette profondeur en un autre point quelconque; l la largeur; on a d'abord, puisque H est supposée constante :

$$\omega = l(H + h), \quad \text{d'où} \quad d\omega = l dh.$$

La pente de la ligne d'eau est exprimée approximativement par le rapport $\frac{dz}{ds}$, lequel est égal à $i - \frac{dh}{ds}$ (169), en appelant i la pente de la ligne de fond ED . On a donc d'après (1) :

$$i - \frac{dh}{ds} = \frac{U}{g} \frac{dU}{ds} + \sum_{\omega} f(U) + \frac{1}{g} \frac{dU}{dt}.$$

Nous supposons, pour simplifier, que la pente i et le frottement $\sum_{\omega} f(U)$ sont assez petits pour que leur différence soit négligeable devant les autres termes de l'équation; dans ces conditions, on aura :

$$\frac{dh}{ds} + \frac{U}{g} \frac{dU}{ds} + \frac{1}{g} \frac{dU}{dt} = 0.$$

Mais, si l'on observe que la vitesse U est une fonction de la surélévation h , on trouve en prenant les dérivées par rapport à t et à s :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dh} \frac{dh}{dt}, \quad \frac{dU}{ds} = \frac{dU}{dh} \frac{dh}{ds}.$$

de sorte que l'équation précédente devient

$$\frac{dh}{ds} + \frac{U}{g} \frac{dU}{dh} \frac{dh}{ds} + \frac{1}{g} \frac{dU}{dh} \frac{dh}{dt} = 0.$$

D'autre part, l'équation de continuité donne, en introduisant h

$$\frac{dh}{dt} + U \frac{dh}{ds} + (H + h) \frac{dU}{dh} \frac{dh}{ds} = 0. \quad (x)$$



FIG. 484 bis.

Actuellement, il est facile d'éliminer le rapport $\frac{dh}{dt}$ entre ces deux équations, on obtient après simplifications :

$$(H + h) \frac{dU^2}{dh^2} = g,$$

d'où l'on tire :

$$\frac{dU}{dh} = \sqrt{\frac{g}{H + h}}, \quad \text{et} \quad dU = \sqrt{g} \frac{dh}{\sqrt{H + h}}.$$

L'intégrale générale est :

$$U = 2 \sqrt{g(H + h)} + C,$$

et si l'on observe que, d'après l'hypothèse, on a à l'extrémité BD du canal : $U = 0$, $h = 0$, il en résulte :

$$U = 2 \sqrt{g(H + h)} - 2 \sqrt{gH}.$$

Cette expression de U et celle de sa dérivée introduites dans la relation (x) conduisent à l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{dh}{dt} + [3 \sqrt{g(H + h)} - 2 \sqrt{gH}] \frac{dh}{ds} = 0,$$

dont l'intégrale est, en désignant par φ une fonction arbitraire :

$$s = [3 \sqrt{g(H + h)} - 2 \sqrt{gH}] t + \varphi(h).$$

Cette équation, qui détermine en fonction de h ou inversement, fera connaître le profil de la ligne d'eau AB à une époque déterminée t , quand on connaîtra la fonction φ , c'est-à-dire ce profil à une époque antérieure correspondant, par exemple, à $t = 0$.

CHAPITRE VI

RÉSISTANCE DES LIQUIDES

Le problème de la résistance des liquides a pour objet de déterminer l'effort normal exercé sur un corps solide au repos ou en mouvement par une masse liquide également en mouvement. Ce problème offre d'assez grandes difficultés; il est loin d'être résolu complètement, même dans des cas simples. Dans ce qui suit, nous nous conformerons aux idées de Poncelet.

198. Pression d'une veine liquide contre un plan fixe. — Considérons une paroi plane AB inclinée d'un angle α sur la verticale, et heurtée par une veine liquide à filets parallèles, et dont la direction fait l'angle β avec AB . On suppose que le plan de la figure est celui qui, passant par l'axe de la veine, est normal à la paroi. Cherchons à évaluer exactement la pression normale R exercée par la veine liquide sur la paroi.

Appelons :

P , le poids de la masse liquide ;

ρ , la densité de ce liquide ;

ω , la section mn de la veine ;

v , la vitesse des filets dans mn .

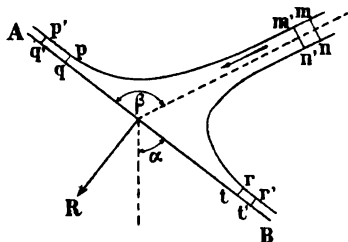


FIG. 495.

Si l'on considère la masse d'eau comprise entre la paroi et les sections normales mn , pq , rt , au bout d'un temps dt cette masse se trouve limitée aux sections voisines $m'n'$, $p'q'$, $r't'$; et l'on peut app'

quer à ce déplacement élémentaire le théorème de l'accroissement des quantités de mouvement et des impulsions des forces en projection sur la normale à la paroi.

Supposons que la paroi soit assez étendue pour que, à une certaine distance de l'axe de la veine, les vitesses sur la paroi soient sensiblement parallèles. Le théorème précité donne alors, en appelant N la réaction normale de la paroi :

$$N dt - \rho \omega v dt \sin \beta = 0,$$

d'où l'on déduit pour la pression R égale et contraire à N :

$$R = \rho \omega v^2 \sin \beta.$$

Rigoureusement, il faudrait ajouter au second membre la composante $P \sin \alpha$, qui représente la pression statique exercée par la masse liquide sur la paroi ; mais, dans ces questions, on se préoccupe surtout de la pression dynamique $\rho \omega v^2 \sin \beta$.

L'expression de R peut s'écrire :

$$R = \rho \frac{\omega}{\sin \beta} (v \sin \beta)^2,$$

ce qui montre que R égale le produit de la densité ρ , soit $\frac{1000^k}{g}$ pour l'eau, par l'aire $\frac{\omega}{\sin \beta}$ de la section de la veine

liquide, faite par un plan parallèle à AB , et par le carré de la composante normale $v \sin \beta$ de la vitesse.

Dans le cas d'un choc normal : $\beta = 90^\circ$, $\sin \beta = 1$, par suite :

$$R = \rho \omega v^2. \quad (a)$$

Comme nous l'avons déjà dit, ces formules supposent que la paroi AB est suffisamment étendue

pour que les filets liquides lui deviennent parallèles avant leur sortie. Lorsque cette condition n'est pas remplie, ce qui est le cas de la figure 485 bis, la vitesse des filets n'est que partiellement détruite, ce qui a pour résultat de diminuer la pression R .

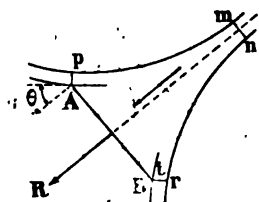


FIG. 485 bis.

En appelant θ l'inclinaison sur R des filets liquides aux points où ils abandonnent la paroi, on a alors approximativement :

$$R = \rho \omega v^2 \sin \beta \left(1 - \frac{\cos \theta}{\sin \beta} \right),$$

et lorsque le choc est normal ($\beta = 90^\circ$) :

$$R = \rho \omega v^2 (1 - \cos \theta).$$

On écrit quelquefois les formules précédentes sous une forme un peu différente en introduisant le débit Q de la veine ; il est facile d'effectuer la transformation ; par exemple la formule (a) donne, en observant que $Q = \omega v$:

$$R = \rho v Q.$$

La densité ρ est liée au poids spécifique π par la relation $\pi = \rho g$; pour l'eau, $\pi = 1.000$ kilogrammes.

199. Pression d'une veine liquide sur un solide de révolution au repos. — La théorie précédente s'applique identiquement au cas d'une veine liquide qui vient heurter un solide de révolution au repos, lorsque l'axe de la veine coïncide avec celui du solide.

Désignons par :

ω_0 , l'aire de la section mn de la veine ;

v_0 , la vitesse de l'eau dans cette section ;

ω , l'aire de la section conique pqr ;

v , la vitesse dans cette section ;

θ , l'angle de pq avec la normale à l'axe.

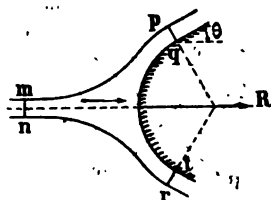


FIG. 486.

Le théorème de l'impulsion donne pour la pression R, dirigée suivant l'axe commun de la veine et du solide :

$$R = \rho (\omega_0 v_0^2 - \omega v^2 \cos \theta).$$

Si l'angle θ est aigu, c'est-à-dire si la surface de révolution présente sa convexité à la veine, on a :

$$R < \rho \omega_0 v_0^2.$$

Au contraire, lorsque la veine rencontre la concavité, θ est obtus et $R > \rho \omega_0 v_0^2$ (fig. 486 bis).

Pour un hémisphère, lorsque le liquide retourne en arrière parallèlement à sa direction primitive, l'angle $\theta = 180^\circ$, $\cos \theta = -1$, par suite :

$$R = \rho (\omega_0 v_0^2 + \omega v^2),$$

et, si $\omega = \omega_0$, il en résulte $v = v_0$,
d'où :

$$R = 2\rho \omega v^2.$$

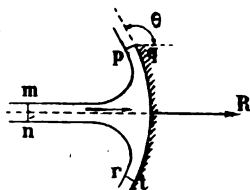


FIG. 486 bis.

On voit, d'après (a), que cette pression est double de celle exercée par l'eau sur une paroi plane ; ces résultats sont conformes à ceux de l'expérience.

200. Cas où les corps sont en mouvement. — Les mêmes formules subsistent lorsque la paroi plane ou les surfaces de révolution, au lieu d'être au repos, sont animées d'une vitesse v' dans la direction de la veine ; seulement, il faut remplacer la vitesse réelle v par la vitesse relative $(v - v')$. Ainsi la formule (a) devient dans ce cas :

$$R = \rho \omega (v - v')^2.$$

Si l'on appelle $E = Rv'$ le travail transmis à la paroi du vase, on a :

$$E = \rho \omega v' (v - v')^2,$$

et l'on peut vérifier que l'effet du choc, c'est-à-dire E , est maximum pour $v = 3v'$.

201. Pression de l'eau en mouvement sur des corps fixes immergés. — C'est un fait reconnu par l'expérience que,

lorsqu'un corps solide est immergé à une profondeur suffisante dans une masse d'eau en mouvement, sa surface n'exerce aucune influence sur les filets liquides situés à une distance de la surface supérieure à une certaine limite; cette limite varie en chaque point avec la forme de la surface.

Il résulte de là que l'on peut considérer le problème qui nous occupe comme se réduisant au cas où

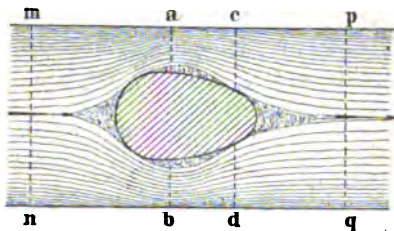


FIG. 487.

le courant serait limité par un cylindre dont le diamètre dépendrait de la forme de la surface du corps.

Soient mp et nq les traces du cylindre limite, mn une section normale faite en amont avant que le corps ait modifié la direction des filets liquides, pq une section faite en aval lorsque les tourbillons ont disparu et que l'écoulement est redevenu régulier.

Appelons : ω_0 l'aire de la section mn , V_0 la vitesse moyenne dans cette section, p_0 la pression dans la même section, p la pression dans la section pq . L'aire ω_0 reste ordinairement comprise entre 5 et 7 fois l'aire de la plus large section du corps parallèle à mn .

Les filets qui rencontrent le corps s'infléchissent, et la masse liquide en mouvement glisse sur la surface sur une certaine étendue, après quoi elle passe par une section contractée ab .

Si la longueur du corps, dans le sens de l'écoulement, est assez grande, le liquide, au delà de ab , reviendra glisser sur la surface jusqu'à une section cd , puis il abandonnera le corps. Entre les sections ab et cd , il se produit un élargissement brusque auquel correspond une perte de force vive; il en est de même entre les sections cd et pq .

Désignons par : U la vitesse moyenne perdue entre les sections ab et cd , U' la vitesse perdue entre cd et pq ; le

théorème de Bernoulli appliqué à un filet liquide entre les sections mn et pq donne :

$$z_0 + \frac{p_0}{\pi} + \frac{V_0^2}{2g} = z + \frac{p}{\pi} + \frac{V_0^2}{2g} + \frac{U^2}{2g} + \frac{U^2}{2g},$$

car la vitesse est la même dans les sections mn et pq . Si la dénivellation $z_0 - z$ est négligeable, on a la relation :

$$\frac{p_0 - p}{\pi} = \frac{U^2}{2g} + \frac{U^2}{2g}, \quad (1)$$

qui permet dans certains cas particuliers de calculer la pression exercée par le liquide sur le corps.

202. Pression sur une plaque très mince. — Dans ce cas,

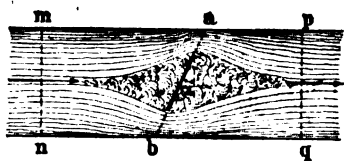


FIG. 487 bis.

les sections ab et cd coïncident, $U = 0$. Supposons que la normale à la plaque fasse un angle α avec la direction du courant.

Appelons : A l'aire de la plaque, m le coefficient de contraction pour la section annulaire ab , V la

vitesse dans cette section. Le débit en mn a pour expression : $\omega_0 V_0$, et en ab : $m(\omega_0 - A \cos \alpha) V$; on obtient donc en égalant les débits :

$$V = \frac{\omega_0 V_0}{m(\omega_0 - A \cos \alpha)},$$

de sorte que la vitesse perdue U' égale :

$$U' = V_0 \left[\frac{\omega_0}{m(\omega_0 - A \cos \alpha)} - 1 \right].$$

Représentons par k le rapport $\frac{\omega_0}{A \cos \alpha}$; on aura d'après (1) :

$$p_0 - p = \pi \frac{V_0^2}{2g} \left[\frac{k}{m(k-1)} - 1 \right]^2.$$

L'impulsion pour l'unité de temps, c'est-à-dire la pression exercée par le liquide sur sa plaque, est alors $R = p_0 \omega_0 - p \omega$, ce que l'on peut écrire, puisque $\omega_0 = kA \cos \alpha$:

$$R = \pi \frac{V_0^2}{2g} k \left[\frac{k}{m(k-1)} - 1 \right]^2 A \cos \alpha.$$

Posons pour abréger :

$$\mu = k \left[\frac{k}{m(k-1)} - 1 \right]^2 ;$$

il vient :

$$R = \mu \pi \frac{V_0^2}{2g} A \cos \alpha. \quad (2')$$

D'après les expériences de Dubuat, la pression sur une plaque carrée normale au courant s'exprime assez bien par la formule :

$$R = 1,86 \pi A \frac{V_0^2}{2g} ;$$

dans ce cas, comme la contraction est incomplète, le coefficient m est supérieur à 0,62, et sa valeur doit être voisine de 0,80. Pour cette valeur de m , la comparaison des deux formules donne $k = 8,5$.

Le rapport k est assez voisin de 8 pour les valeurs de α comprises entre 0 et 45° ; le coefficient m dépend de k , et sa valeur oscille entre 0,70 et 1. Pratiquement le coefficient μ reste compris entre 1,80 et 2.

203. Pression sur une demi-sphère. — La formule (2) est également applicable au cas où la plaque mince est remplacée par

une demi-sphère tournant sa convexité vers l'amont, ou bien par une sphère entière. Dans ce cas, les filets liquides se dévient progressivement en restant en contact avec la

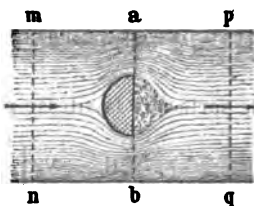


FIG. 488.

surface du corps, et le coefficient m est voisin de l'unité ; mais la valeur du rapport $\frac{w_0}{A}$ se rapproche de 4,5 et μ reste compris entre 0,50 et 0,60. L'aire A est celle d'un grand cercle de la sphère ; on a $\alpha = 0$.

204. Pression sur un corps placé dans un tuyau de conduite. — La perte de charge est représentée par le second membre de l'équation (1), mais le rapport k est variable suivant les dimensions relatives du

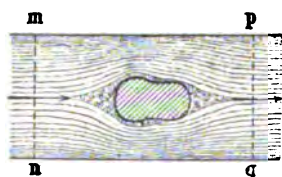


FIG. 483.

corps et du tuyau. On peut appliquer la formule (2) en calculant pour chaque cas la valeur de μ d'après celles de m et de k ; on prendra pour A l'aire de la plus large section du corps normale au courant.

Lorsque k reste compris entre 4 et 8, on a $\mu = 0,60$; quand le corps se réduit à une plaque mince et que $k = 8$ environ, on a $\mu = 1,90$ pour $m = 0,80$.

205. Pression sur un prisme de faible longueur dont les arêtes sont parallèles au courant. —

Si la longueur du prisme n'atteint pas deux fois et demie la plus grande largeur de la base, ce prisme se comporte à peu près comme une plaque mince normale au courant. Les filets liquides déviés se rejoignent seulement au delà de ce corps, qui se trouve tout entier dans la portion du courant où l'eau ne coule pas.

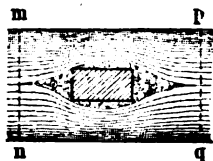


FIG. 490.

D'après les expériences de Dubuat, il conviendrait pour les prismes courts de donner à μ dans la formule (2) la valeur 1,45.

206. Pression sur un prisme allongé dont les arêtes sont dirigées dans le sens du courant. — Si le prisme est assez long pour que les choses se passent comme sur la figure 491, c'est-à-dire si la longueur des arêtes dépasse deux fois et

demie la plus grande largeur de la base, alors on obtient comme au numéro 202 avec les mêmes notations :

$$U = V_0 \left[\frac{k}{m(k-1)} - \frac{k}{k-1} \right] = V_0 \frac{k}{k-1} \left(\frac{1}{m} - 1 \right),$$

$$U' = V_0 \left[\frac{k}{k-1} - 1 \right] = \frac{V_0}{k-1}.$$

On déduit de là d'après la formule (1) :

$$p - p_0 = \pi \frac{V_0^2}{2g} \frac{1}{(k-1)^2} \left[k^2 \left(\frac{1}{m} - 1 \right)^2 + 1 \right];$$

la pression exercée par le liquide sur la plaque a pour valeur :

$$R = \frac{k}{(k-1)^2} \left[k^2 \left(\frac{1}{m} - 1 \right)^2 + 1 \right] \pi A \frac{V_0^2}{2g},$$

et, si l'on pose :

$$\mu = \frac{k}{(k-1)^2} \left[k^2 \left(\frac{1}{m} - 1 \right)^2 + 1 \right],$$

il en résulte :

$$R = \mu \pi \frac{V_0^2}{2g} A.$$

Cette théorie ne tient pas compte du frottement des filets liquides les uns sur les autres ni sur la surface du corps immergé, elle néglige également le terme correctif $\frac{1}{9} \frac{V_0^2}{2g}$ destiné à tenir compte de l'inégalité de vitesse des filets d'eau (56). Pour ces diverses raisons, le coefficient pratique μ n'a pas rigoureusement la valeur que lui attribue son expression en fonction de m et k .

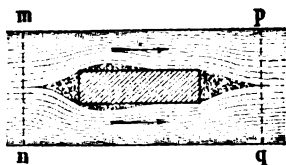


FIG. 491.

D'après l'analyse de Saint-Venant, qui s'accorde assez bien

avec les observations de Dubuat, il conviendrait de déterminer μ dans chaque cas par la formule :

$$\mu = 1,230 + 0,0124 \frac{l}{a},$$

l représente la longueur du prisme et a la plus grande largeur de la base. Cette formule s'accorde très bien avec les faits observés dès que l dépasse $3a$.

On calculerait de la même façon la pression sur un cylindre à base circulaire dont les génératrices seraient parallèles au courant; mais la dimension a devrait être remplacée par le diamètre du cercle de base.

207. Influence des proues et des poupes. — La présence d'une proue demi-sphérique à l'amont d'un solide immergé, a pour effet de réduire notablement la contraction des filets liquides et d'accroître m , qui se rapproche alors de l'unité. C'est ainsi que, pour des valeurs de k comprises entre 4,5 et 5, on aurait sensiblement dans le cas d'un prisme long :

$$\mu = 0,58 + 0,0124 \frac{l}{a}.$$

Il est d'ailleurs vraisemblable que le coefficient μ est encore moindre lorsque la forme de la proue est plus allongée et plus effilée.

L'influence d'une poupe à l'aval du prisme n'est pas moins appréciable que celle d'une proue, car alors la vitesse perdue U' devient très faible. En appelant S la surface de la poupe entre cd et l'extrémité (fig. 481), on a sensiblement dans les mêmes conditions que ci-dessus :

$$\mu = 0,20 + 0,004 \frac{S}{A};$$

A représente l'aire de la section la plus large du corps en ab .

Si la poupe était très allongée et venait se raccorder avec la proue, la vitesse U serait également très faible; ainsi que la pression R .

Bossut et d'Alembert, qui ont fait des observations sur des corps en forme de navire, ont obtenu pour μ la valeur moyenne 0,25.

208. Résistance éprouvée par un solide immergé qui se déplace dans un liquide au repos. — Supposons que l'on imprime au système matériel du numéro 201 une vitesse égale et contraire à V_0 ; le liquide sera ramené au repos et le corps solide sera animé de la vitesse V_0 ; la pression R sera transformée en résistance qu'on pourra diminuer par l'adjonction au solide d'une poupe et d'une proue, comme cela existe dans les navires.

La résistance normale éprouvée par une aire plane A aura pour expression :

$$R = \mu \pi \frac{V_0^2}{2g} A \cos \alpha,$$

et cette formule générale est encore applicable, avec $\alpha = 0$, au cas de corps prismatiques en mouvement; mais jusqu'à ce jour le coefficient μ n'a pas été déterminé d'une manière précise pour les divers cas de la pratique, surtout pour les corps flottants.

Pour les navires à la mer, les ingénieurs admettent que la résistance est proportionnelle à l'aire de la section immergée du maître-couple, ce qui revient à prendre pour A la section de ce maître-couple, c'est-à-dire la section qui sépare la proue de la poupe du navire. D'après Bourgois, on aurait alors $\frac{\mu \pi}{2g} = 4$, soit $\mu = 0,08$ environ. D'autres ingénieurs appliquent la même formule, mais en prenant pour A l'aire mouillée de la coque. Scott-Russell avait proposé la formule suivante, plus rationnelle, mais dont l'emploi ne s'est pas étendu :

$$R = \mu A V_0^2 + \mu' A' V_0^2;$$

A représente la section immergée du maître-couple, A' l'aire mouillée de la coque, μ et μ' deux coefficients numériques dans lesquels est comprise la valeur de π .

Pour les bateaux dans les rivières et les canaux, on applique également la formule ci-dessus; mais le travail à la montée

est évidemment supérieur à celui de la descente. En effet, les courants parfaitement horizontaux n'existent nulle part dans la nature; la surface libre des cours d'eau présente, à vitesse égale, une pente d'autant plus grande que les frottements du liquide sur les parois qui le renferment sont plus intenses, de sorte que le bateau qui remonte le courant doit non seulement refouler le liquide, mais encore s'élever sur la pente, et le travail nécessaire pour produire l'élévation de poids sur les rivières est loin d'être négligeable. Il en résulte donc que le bateau, en remontant un cours d'eau, donnera, à égalité de travail développé, une vitesse moindre qu'en eau tranquille, et à plus forte raison qu'en descendant le courant.

Les dernières expériences sur la question de la résistance éprouvée par les bateaux sur les canaux et rivières sont dues à M. de Mas; elles ont porté sur des péniches, flûtes, toues, bateaux-prussiens et margotats, de 20 à 40 mètres de long et 3 mètres de largeur, avec profondeur variable de 1,40 à 1,95. Les résultats de ces expériences sont assez exactement représentés par la formule:

$$R = (a + bt) V_0^{2,25},$$

dans laquelle R représente la résistance à la traction en kilogrammes, V_0 la vitesse relative du bateau et de l'eau en kilomètres par heure, t l'enfoncement du bateau en mètres, a et b deux coefficients numériques variables avec le type du bateau.

Pour une péniche.....	$a = 21,3,$	$b = 123,6$
Pour une flûte.....	$a = 21,5,$	$b = 78,1$
Pour une toue.....	$a = 14,2,$	$b = 52,4$

Les valeurs données par la formule concordent d'une manière satisfaisante avec les résultats de l'observation pour les vitesses de 1,00 et au-dessus; au-dessous de 0,50 à la seconde, l'écart en moins augmente rapidement lorsque la vitesse diminue.

CHAPITRE VII

MOUVEMENTS ONDULATOIRES

209. Dans le mouvement ondulatoire d'une masse liquide, l'état de mouvement, qui, à un instant donné, affecte un ensemble de molécules occupant un certain lieu de l'espace, se transmet à d'autres molécules occupant un autre lieu, et cela d'une façon continue. Cet état de mouvement peut se transmettre sans modification, ou bien les changements qui se produisent laissent une certaine similitude entre les mouvements des premières molécules et ceux des molécules qui sont affectées successivement.

L'étude des mouvements ondulatoires comprend celle des ondes de translation que l'on observe fréquemment dans les rivières et canaux de navigation, et l'étude des ondes d'oscillations, houle et clapotis, qui se produisent principalement en haute mer et dans les lacs.

L'onde solitaire, étudiée spécialement par Scott-Russel, est un cas particulier des ondes de translation; elle jouit de la propriété remarquable de se propager à la surface des eaux sur de longues distances sans se déformer.

Les ondes de translation dans leur course restent complètement en saillie au-dessus du niveau de l'eau sur laquelle elles cheminent. Au contraire, les ondes d'oscillations, qui peuvent également être translatatoires comme la houle, comprennent toujours une saillie accompagnée d'une cavité correspondante. Dans le clapotis, les ondes paraissent rester sur place.

210. Ondes de translation. — L'onde de translation est celle qui se produit dans une masse d'eau lorsque, sous une influence quelconque, par exemple le mouvement d'un bateau, un certain volume d'eau se trouve momentanément soulevé

au-dessus du niveau général de la masse, et ensuite abandonné à lui-même. Ce soulèvement du liquide, immédiatement suivi d'un abaissement, a pour effet de produire à la

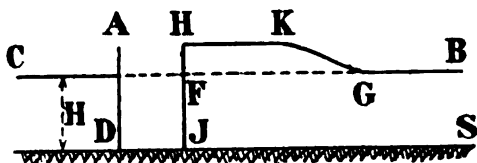


FIG. 492.

surface de l'eau une onde qui chemine avec une vitesse d'autant plus grande que le soulèvement primitif a été plus accentué.

Considérons un canal à plafond horizontal dont la section transversale rectangulaire reste uniforme et égale à ω ; ce canal est supposé rempli d'eau au repos. Soit DS la ligne de fond et CB la surface libre horizontale.

Si l'on suppose le canal barré transversalement par une vanne AD occupant toute la largeur et formant piston, et si l'on imprime à cette vanne une vitesse horizontale U, il se produira, en avant, sur une certaine longueur FG, une surélévation du liquide qui viendra, par exemple, jusqu'en MK; ce sera l'origine d'une onde de translation.

Désignons par H la profondeur d'eau du canal, par h la surélévation HF, et par V la vitesse de la translation de l'onde; cette vitesse est une fonction de H et h , que l'on peut déterminer approximativement par les considérations suivantes.

Supposons que l'on imprime aux parois du canal et à l'observateur une vitesse commune de translation égale à V, ce qui ne change rien aux mouvements effectifs; l'onde sera devenue fixe par rapport à l'observateur, la masse d'eau du canal s'écoulera en sens inverse du mouvement de ce dernier, et la surélévation KG pourra être assimilée à un ressaut.

Dans les parties non atteintes par l'onde où la section est ω , la vitesse du liquide est égale à V; mais, dans les parties atteintes où la section est $l(H + h)$, en appelant l la lar-

geur du canal, la vitesse de l'eau est $V - U$.
 L'équation du régime varié donne donc, en
 tenant compte de la perte de charge due au
 changement de section :

$$\alpha \frac{(V - U)^2 - V^2}{2g} = -h - \alpha \frac{U^2}{2g}.$$

D'autre part, à cause de l'incompressibilité
 du liquide, il doit y avoir égalité entre l'ac-
 croissement de volume FHKG et la diminution
 ADJF résultant de l'avancement de la vanne
 d'une quantité U par seconde ; on a donc la
 seconde équation $hV = (H + h)U$.

L'élimination de U donne, après réduc-
 tions,

$$V^2 = \frac{1}{\alpha} gH \left(1 + \frac{h}{H}\right)^2,$$

d'où l'on tire, en faisant pour simplifier
 $\alpha = 1$ au lieu de $\alpha = 1,4$:

$$V = \sqrt{gH} \left(1 + \frac{h}{H}\right),$$

ou encore :

$$V = \frac{\sqrt{g(H+h)}}{\left(1 - \frac{h}{H+h}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1)$$

Lorsque h est négligeable devant H , ce qui
 est fréquent, on a simplement $V = \sqrt{gH}$,
 et cette formule est suffisamment approchée
 dès que la profondeur H est un peu grande.

Scott-Russel avait déduit de ses observa-
 tions la relation :

$$V = \sqrt{g(H+h)}, \quad (2)$$

qui donne pratiquement les mêmes résultats.
 D'ailleurs ces formules s'appliquent avec



FIG. 493

une approximation suffisante pour un profil quelconque ω , pourvu que l'on remplace le produit HI par ω , l étant la largeur à la surface.

211. Expériences de M. Bazin. — La propagation des ondes a fait l'objet d'expériences nombreuses et très précises exécutées par M. Bazin sur une rigole détachée du canal de Bourgogne; ces expériences ont démontré l'exactitude suffisante de la formule (2), sauf dans quelques cas particuliers où les vitesses observées se sont rapprochées de celles fournies par les formules (1).

M. Bazin a d'abord étudié la propagation en eau stagnante, ce qui correspond précisément au cas ci-dessus. Les formes successives de l'onde sont représentées par la figure 493; tant qu'elle reste sur une profondeur suffisante, l'onde garde son profil à courbe lisse et régulière; mais si, à mesure qu'elle s'avance, elle rencontre des profondeurs moindres, elle se raccourcit et prend une forme plus aiguë en s'exhaussant peu à peu; sa crête s'incline légèrement en avant, et enfin, lorsqu'elle ne rencontre plus qu'une profondeur insuffisante, elle se brise subitement; la surface lisse et régulière qu'elle présentait un instant avant s'efface tout à coup et disparaît dans un tourbillon d'écume. L'onde ne peut se propager que sur une profondeur d'eau notablement supérieure à sa hauteur.

Lorsque l'onde se propage dans un canal dont l'eau est animée dans le même sens d'une vitesse moyenne V' , la formule (1) fait connaître sa vitesse relative V , c'est-à-dire que sa vitesse absolue de propagation est alors égale à $V + V'$. Au contraire, lorsque l'onde remonte le courant, sa vitesse n'est plus que $V - V'$, et l'apparence du phénomène est toute différente de ce qu'elle était dans une eau au repos; l'onde perd sa régularité de formes et sa hauteur tend à diminuer rapidement à mesure qu'elle remonte le courant. On conçoit, en effet, que l'onde ne peut se propager dans le courant qu'autant que la vitesse V qu'elle prendrait dans une eau stagnante est supérieure à V' ; en approchant de cette limite, sa propagation doit donc devenir plus difficile; c'est dans cette circonstance que la formule (2) paraît donner des vitesses trop fortes.

M. Bazin a également étudié la dépression suivie d'ondulations qui se produit lorsque, au lieu d'introduire brusquement une certaine masse d'eau dans un canal au repos, on enlève brusquement une certaine masse; c'est ce qu'il a appelé l'onde de translation négative (fig. 494). La vitesse de propagation est donnée par les formules (1) ou (2), mais la hauteur h est prise avec le signe négatif. L'onde négative ne paraît pas douée, comme l'onde positive, de la faculté de franchir de grands espaces sans déformation.

212. Onde solitaire. — Elle est caractérisée par ce fait que la vitesse de propagation V est la même pour tous ses éléments, c'est-à-dire que cette vitesse est indépendante de h .

Pour étudier le profil de la surface libre de l'onde, prenons le plafond du canal comme axe des x , et pour axe des z une verticale dirigée vers le haut. Dans une section quelconque, on a $z = H + h$ (fig. 495).

Les équations du mouvement d'une molécule s'écrivent (33) :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = - g - \frac{d^2 z}{dt^2};$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) &= \frac{dp}{\rho} \\ &= - \frac{d^2 x}{dt^2} dx - g dz - \frac{d^2 z}{dt^2} dz. \end{aligned}$$

Comme la pression est constante en tous les points de la surface libre, on a $dp = 0$; d'où la relation :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + g \frac{dz}{dx} + \frac{d^2 z}{dt^2} \frac{dz}{dx} = 0,$$

ce que l'on peut écrire, en observant que z et h ne diffèrent que par une constante :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + g \frac{dh}{dx} + \frac{d^2 h}{dt^2} \frac{dh}{dx} = 0.$$

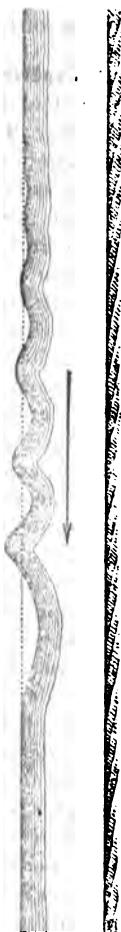


Fig. 494.

D'autre part, si l'on remplace la composante horizontale $\frac{dx}{dt}$ de la vitesse par sa valeur moyenne U dans la section MN , ce qui donne une approximation, on obtient :

$$\frac{dx}{dt} = U, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dU}{dt} + U \frac{dU}{dx},$$

de sorte que l'équation précédente devient :

$$\frac{dU}{dt} + U \frac{dU}{dx} + g \frac{dh}{dx} + \frac{d^2h}{dt^2} \frac{dh}{dx} = 0. \quad (m)$$

La vitesse de propagation, lorsqu'elle est constante, est le rapport entre la distance de deux points quelconques et le temps qui

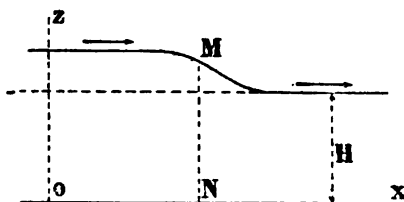


FIG. 495.

s'écoule entre les instants où les mouvements en ces deux points sont identiques; cette vitesse dépend de H .

La vitesse moyenne U dans la section MN varie avec h ; elle varie par conséquent avec l'abscisse x du point M au temps t ; mais, à cause du mouvement

uniforme de propagation de l'onde, c'est en réalité une fonction de la différence $x - Vt$, c'est-à-dire que l'on a en général $U = \varphi(x - Vt)$. Pareillement, comme la surélévation h varie avec U , on a aussi $h = f(x - Vt)$.

Si l'on prend successivement les dérivées de U et h par rapport à t et à x , on obtient les relations :

$$\frac{dU}{dt} = -V \frac{dU}{dx}, \quad \frac{dh}{dt} = -V \frac{dh}{dx}, \quad \frac{d^2h}{dt^2} = V^2 \frac{d^2h}{dx^2},$$

ce qui permet d'écrire l'équation (m) comme il suit :

$$V \frac{dU}{dx} + U \frac{dU}{dx} + g \frac{dh}{dx} + V^2 \frac{d^2h}{dx^2} \frac{dh}{dx} = 0,$$

ou bien :

$$\frac{d}{dx} \left[-UV + \frac{1}{2} U^2 + gh + \frac{1}{2} V^2 \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right] = 0.$$

Cette équation montre que le polynôme placé entre parenthèses est indépendant de x , c'est-à-dire qu'il conserve une valeur constante quel que soit x . D'autre part, on doit admettre qu'à une dis-

tance infinie de son origine l'onde de translation cesse d'exister, c'est-à-dire que l'on a $h = 0$, $V = 0$, $U = 0$; par conséquent, le polynôme considéré est nul pour une valeur infinie de x , et, comme il reste constant quel que soit x , nécessairement il est nul; on peut donc écrire :

$$UV = \frac{1}{2} U^2 + gh + \frac{1}{2} V^2 \left(\frac{dh}{dx} \right)^2. \quad (n)$$

A cette équation, il faut joindre la relation :

$$hV = (H + h) U, \quad (p)$$

qui détermine la vitesse moyenne U dans la section MN , et que l'on pourrait déduire de l'équation de continuité, en raisonnant comme pour l'équation (n).

L'élimination de U entre les équations (n) et (p) donne une expression de la vitesse de propagation V , qui est plus exacte que celle fournie par les formules (1). On obtient d'abord :

$$V^2 = \frac{g(H + h)}{1 - \frac{1}{2} \frac{h}{H + h} - \frac{1}{2} \frac{H + h}{h} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2},$$

ce que l'on peut écrire approximativement, en négligeant h devant

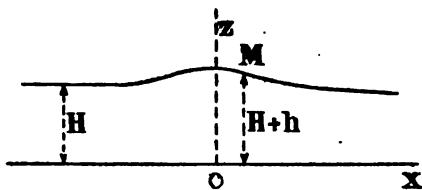


FIG. 496.

et observant que, pour de petites valeurs de α , on a en général

$$\frac{1}{1 - \alpha} = 1 + \alpha :$$

$$V^2 = gH \left[1 + \frac{h}{2H} + \frac{H}{2h} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

Dans l'onde solitaire, la vitesse V est la même pour tous les éléments liquides, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{h}{2H} + \frac{H}{2h} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 = \frac{h_1}{2H},$$

en appelant $\frac{h_1}{2H}$ une constante. Cette relation peut s'écrire :

$$\left(\frac{dh}{dx} \right)^2 = \frac{h}{H^2} (h_1 - h);$$

c'est l'équation différentielle du profil de la surface de l'onde. On voit que la différence $h_1 - h$ est positive, c'est-à-dire que h est toujours inférieure ou au plus égale à h_1 . En outre, la pente $\frac{dh}{dx}$ ayant des valeurs égales, au signe près, pour les points où la surélévation h a la même grandeur, la surface libre de l'onde est symétrique par rapport à l'ordonnée maximum h_1 .

HOULE ET CLAPOTIS

218. Houle. — C'est le mouvement oscillatoire qui se produit à la surface d'une grande masse d'eau, lorsque cette masse, d'abord au repos, puis agitée par une brise plus ou moins forte, la brise vient à cesser. Le liquide en mouvement ne revient pas immédiatement au repos, il passe par un état intermédiaire dans lequel ses molécules oscillent autour de la position moyenne qu'elles prendront plus tard ; c'est cet état intermédiaire qui constitue la houle.

La houle est fréquente à la mer ; la surface des eaux, au lieu d'être plane, présente de longues ondes horizontales à peu près rectilignes, qui semblent se déplacer normalement à leurs génératrices. Mais ce déplacement des ondes n'est

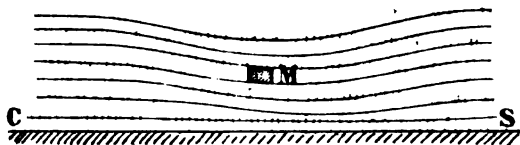


FIG. 497.

qu'apparent, car on constate que les molécules liquides ne changent pas sensiblement de place, c'est-à-dire que leurs trajectoires sont des courbes qui oscillent autour d'une position moyenne.

Nous supposons, pour simplifier, que la houle est cylindrique, c'est-à-dire que ses ondes présentent l'aspect de cannelures cylindriques à génératrices horizontales ; nous admettrons également que les ondes restent invariables pendant la propagation et qu'elles ont toutes la même forme ;

enfin nous supposons que le fond de la masse d'eau est horizontal.

Considérons donc un large canal à section rectangle et à plafond horizontal, contenant une masse d'eau houleuse. Soit CS la section du plafond par un plan vertical parallèle à l'axe du canal, qui est aussi l'axe de propagation des ondes; dans tous les autres plans verticaux parallèles, le mouvement est isoplethique.

Les lignes tracées sur la figure représentent les sections des surfaces de niveau de la masse liquide par le plan vertical considéré, ce sont des courbes de niveau tout le long desquelles la pression est constante.

214. Surfaces de niveau. — Pour faciliter la théorie, nous supposons, comme au précédent paragraphe, que l'on imprime à la masse liquide un mouvement égal et contraire à celui de la propagation; dans ce mouvement, les ondes deviendront immobiles, et ce sont les molécules liquides qui, dans la translation fictive dont elles seront animées, s'élèveront ou s'abaisseront en parcourant leurs sinuosités.

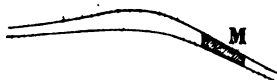


FIG. 408.

Soient $d\omega$ la section transversale d'un élément de volume M , ds sa longueur, V sa vitesse. A cause de l'incompressibilité de l'eau, le volume de l'élément reste invariable pendant le mouvement, c'est-à-dire que l'on a $d\omega ds = k$, k désignant une constante quelconque. D'autre part, la permanence de l'écoulement pour le filet liquide, lieu des positions successives de l'élément, se traduit par la relation $Vd\omega = k'$, k' désignant une autre constante. L'élimination de $d\omega$ entre les deux relations donne :

$$ds = \frac{k}{k'} V, \quad (1)$$

ce qui montre que la longueur de l'élément considéré aux différents points de sa trajectoire est proportionnelle à sa vitesse.

Soient p et $p + dp$ des pressions par unité d'aire sur les

D'ailleurs la similitude des deux triangles VMV' et PMR donne :

$$\frac{MV'}{MR} = \frac{MV'}{MP} = \frac{V'}{P} = \frac{1}{k}, \quad (3)$$

et, comme MV' est constante, il en est de même de MR . Ainsi la force R est constante, et, comme elle est normale à la vitesse, il en résulte que l'élément considéré décrit un cercle d'un mouvement uniforme.

L'élément liquide décrivant un cercle dans le mouvement relatif décrira par rapport à deux axes fixes parallèles une *trochoïde*, ou cycloïde raccourcie, c'est-à-dire une des courbes engendrées par un point qui tourne d'un mouvement uniforme sur un cercle dont le centre se déplace lui-même uniformément et en ligne droite. Ainsi une courbe de niveau quelconque de la houle est une trochoïde.

Il est assez remarquable que l'on parvienne à des conclusions quelque peu analogues lorsqu'on cherche à déterminer la forme de la surface libre d'une masse d'eau en équilibre, soumise à l'action d'un courant d'air de vitesse constante en grandeur et en direction.

Cette surface est évidemment cylindrique, ses génératrices sont horizontales et normales à la direction du courant d'air que nous supposons également horizontale.

Dans une section droite du cylindre, prenons deux axes OX et OZ , l'un horizontal dirigé en sens inverse de la vitesse v du vent, l'autre vertical dans le sens de la pesanteur.

On sait que la pression exercée par le vent sur une surface est sensiblement proportionnelle au carré de la composante normale de la vitesse ; si donc on désigne par α l'inclinaison sur OX de la tangente au profil au point M , par k une constante, on aura pour la pression exercée par le courant d'air sur ce point : $p = kv^2 \sin^2 \alpha$.

D'autre part, la pression du liquide au point M égale πz , en admettant que les pressions se répartissent suivant la loi hydrostatique. On suppose que l'axe OX coïncide avec la surface libre, c'est-à-dire que l'origine O est le point le plus élevé du profil de cette surface.

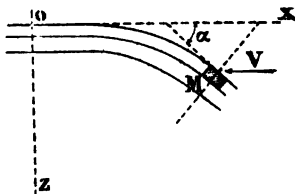


FIG. 501.

Égalant les pressions au point M, on obtient :

$$\pi z = kv^2 \sin^2 \alpha,$$

et, si l'on pose $2a\pi = kv^2$, il en résulte :

$$z = 2a \sin^2 \alpha.$$

Cette équation représente une cycloïde dont OX est la tangente au sommet O, et a le rayon du cercle générateur.

215. Relation entre la longueur et la vitesse d'une onde.

— Si l'on appelle $2T$ le temps que met l'élément liquide à décrire le cercle entier, pendant ce temps le cercle s'avance

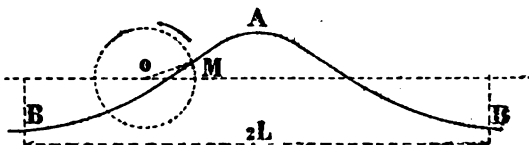


FIG. 502.

horizontalement d'une certaine longueur $2L$, qui est précisément la distance des deux crêtes de la trochoïde. Le mouvement de translation de l'onde sera donc déterminé quand on connaîtra la relation qui lie L et T .

Soit α la vitesse angulaire uniforme de l'élément M sur son cercle; il décrit ce dernier dans le temps $\frac{2\pi}{\alpha} = 2T$, et, comme le centre O se déplace avec une vitesse V' , il parcourra dans le même temps la distance $\frac{2\pi V'}{\alpha} = 2L$. On a donc les relations :

$$T = \frac{\pi}{\alpha}, \quad L = \frac{\pi V'}{\alpha}. \quad (n)$$

La vitesse MV' est celle de l'élément sur son cercle, c'est-à-dire αr , en appelant r le rayon du cercle; la force MR est le produit $m\alpha^2 r$ de la masse de l'élément par l'accélération centrifuge; enfin $P = mg$. La proportion (3) donne donc :

$$\frac{V'}{mg} = \frac{\alpha r}{m\alpha^2 r}, \quad \text{ou} \quad V'\alpha = g;$$

ou encore, en éliminant α avec les relations précédentes :

$$\frac{\pi L}{T^2} = g.$$

On obtient enfin, en observant que $L = TV$, V étant la vitesse de translation de l'onde :

$$L = \frac{gT^2}{\pi}, \quad T = \sqrt{\frac{\pi L}{g}}, \quad V = \sqrt{\frac{gL}{\pi}}. \quad (4)$$

Ces relations font connaître deux des quantités L , T , V en fonction de la troisième; L représente la demi-longueur des vagues et T leur demi-période d'oscillation ou la moitié du temps nécessaire pour qu'une molécule d'eau passe d'une crête à une autre de la vague. On voit que les vagues de même longueur $2L$ sont décrites dans le même temps $2T$, quelle que soit leur hauteur $2r$.

Aux sommets de la trochoïde, c'est-à-dire aux crêtes des vagues, la vitesse du point M est égale à l'excès de la vitesse V' sur celle de l'élément sur son cercle, c'est-à-dire que l'on a :

$$V = V' - r\alpha.$$

Si cette vitesse pouvait devenir nulle, la trochoïde se transformerait en cycloïde, qui présenterait à chaque crête un point de rebroussement; mais cette limite ne peut jamais être atteinte, car il faudrait, d'après (1), que $ds = 0$, c'est-à-dire que la section $d\omega$ des filets liquides devienne infinie, ce qui est impossible. En fait, les houles naturelles restent bien au-dessous de cette limite pour laquelle on aurait $2L = \pi \times 2r$, c'est-à-dire des vagues dont la longueur serait le triple de la hauteur.

216. Condition de continuité. — Le rayon du cercle générateur de chaque trochoïde varie avec la position de la courbe dans la masse liquide; c'est une fonction de la profondeur z du centre du cercle au-dessous d'un plan horizontal de comparaison.

Désignons par r et $r - dr$ les rayons qui correspondent à deux trochoïdes très voisines, par z et $z + dz$ les profondeurs

correspondantes des centres des cercles. Les distances des sommets A et A' au plan de comparaison sont respectivement égales à $z - r$ et $z + dz - (r - dr)$, de sorte que l'épaisseur AA' du filet liquide limité par les deux trochoïdes a pour expression $dz + dr$. Pareillement l'épaisseur BB' du filet au

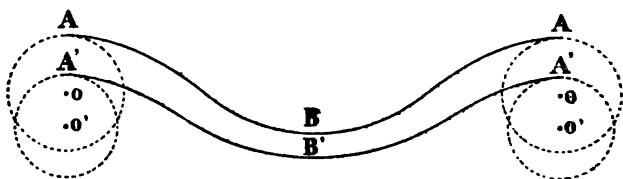


FIG. 503.

point bas de la vague, où la vitesse est maximum, égale $-(z + r) + (z + dz + r - dr) = dz - dr$.

Mais on doit observer que pour un élément liquide la section $d\omega$ et, par suite, l'épaisseur du filet sont inversement proportionnelles à ds , c'est-à-dire à la vitesse V d'après (1). D'autre part, la vitesse des molécules d'eau aux crêtes de la vague est $V' - rz$, et dans le creux elle égale $V' + rz$. Si donc on écrit que les épaisseurs en A et B sont inversement proportionnelles aux vitesses, on obtient la relation :

$$\frac{dz + dr}{dz - dr} = \frac{V' + rz}{V' - rz},$$

d'où l'on déduit, en observant que dz et dr sont de signes contraires :

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{rz}{V'}.$$

Enfin, l'élimination de α et V' à l'aide des relations (n) donne :

$$\frac{dr}{r} = -\frac{\pi}{l} dz.$$

Désignons par r_0 la demi-hauteur des vagues à la surface ; l'intégration donne, en comptant les profondeurs z à partir

de l'horizontale qui passe par les centres des cercles de surface :

$$\log r - \log r_0 = -\frac{\pi}{L} z,$$

ou bien, en passant des logarithmes aux exponentielles :

$$r = r_0 e^{-\frac{\pi z}{L}}.$$

Cette formule montre que la hauteur $2r$ des vagues diminue lorsque la profondeur z augmente et qu'elle devient nulle pour $z = \infty$. Lorsque z croît en progression arithmétique, le rayon r des cercles décroît en progression géométrique.

217. Mouvement effectif. — Pour faciliter la théorie, nous avons supposé que la masse d'eau était animée d'un mouvement tel que les ondes restaient immobiles et que les molécules se déplaçaient en décrivant leur profil. Mais les mêmes conclusions subsistent identiquement si l'on imprime à la masse d'eau une translation uniforme quelconque. En particulier, si on lui imprime une vitesse égale et contraire à celle dont les cercles générateurs des ondes sont animés, les trajectoires des molécules deviennent des cercles, et l'on se trouve en présence du vrai phénomène de la houle, dans lequel les ondes se propagent uniformément, soulevant et abaissant sur leur passage les molécules liquides qui décrivent des cercles d'un mouvement uniforme et oscillent ainsi autour de centres fixes.

La continuité de la masse liquide dans toutes ses parties et la possibilité pour les molécules d'eau de prendre le mouvement qui vient d'être défini exigent qu'à une profondeur quelconque z ces molécules puissent décrire un cercle de rayon r . Cette condition exclut donc la présence d'un fond solide, ce qui revient à dire que les formules ci-dessus ne s'appliquent rigoureusement qu'autant que la masse d'eau a une profondeur indéfinie, comme cela peut se produire à la mer.

Lorsque la profondeur d'eau ne peut pas être pratiquement considérée comme infinie par rapport à la hauteur des vagues,

l'analyse démontre que les cercles sont remplacés par des ellipses dont le petit axe est vertical. Néanmoins, dès que la profondeur est notable, on obtient une approximation suffisante avec les formules (4), que l'on peut d'ailleurs appliquer à toutes les ondulations liquides présentant l'aspect de la houle ou de vagues courantes.

Enfin, il ne faut pas perdre de vue, pour souligner le caractère approximatif de ces formules, qu'elles se rapportent à un mouvement parvenu à un état définitif et permanent, et celui-ci peut différer de l'ondulation qui s'établit ou qui décroît et dans laquelle l'inertie et les forces moléculaires intérieures jouent un rôle dont le calcul n'a pas tenu compte. En outre, la forme irrégulière du fond de la mer, les changements d'intensité et de direction du vent, interviennent sans cesse pour modifier les conditions du mouvement.

218. Énergie de la houle. — La force vive d'une vague représente le travail mécanique dû à la pression des vents qui lui ont donné naissance et emmagasiné par la masse liquide en mouvement. Tant que la vague se propage en pleine mer et sur des hauts-fonds, la demi-force vive reste à peu près constante et ne diminue que très lentement; mais il n'en est plus de même au voisinage des côtes; il se produit alors des frottements, des chocs contre les écueils, des remous et tourbillonnements, qui finissent par absorber la force vive du liquide.

Soit m la masse d'une molécule d'eau dont la vitesse est V , sa demi-force vive est $\frac{1}{2} mV^2$, et, si l'on étend cette expression à toutes les molécules qui composent la vague, on obtient la demi-force vive totale de l'onde $\frac{1}{2} \Sigma mV^2$, qui reste à peu près constante.

En appelant M la masse d'eau à laquelle la vague communique son mouvement, et U une certaine vitesse moyenne, on aura :

$$\frac{1}{2} \Sigma mV^2 = \frac{1}{2} MU^2,$$

d'où l'on déduit :

$$U = \sqrt{\frac{\sum m V^2}{M}}.$$

Comme la masse M diminue généralement à mesure que la vague se rapproche des côtes, ou qu'elle pénètre dans une baie étroite, il en résulte que la vitesse U augmente de plus en plus. La demi-force vive d'une grande vague arrive donc à se concentrer ainsi dans une masse d'eau de plus en plus petite, ce qui peut la rendre capable de produire de grands effets mécaniques. Ceci explique la production dans certains cas de flots de fond très puissants et de paquets de mer énormes qui sont soulevés par des chocs à des hauteurs quelquefois considérables.

219. Clapotis. — On donne ce nom au mouvement oscillatoire qui résulte de la superposition de deux houles égales et de sens contraire; ce mouvement est caractérisé par l'existence de vagues qui sont dépourvues en apparence du mouvement de propagation propre à la houle et qui s'élèvent et s'abaissent sur place.

Le cas le mieux défini s'observe particulièrement au voisinage d'un quai vertical perpendiculaire à l'axe de propagation de la houle, qui vient heurter contre lui. En effet, les vitesses des diverses molécules en mouvement se réfléchissent suivant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence et conservent leurs grandeurs, de sorte que la translation des molécules après leur réflexion est celle d'une houle égale à la première, mais dirigée en sens contraire; la superposition des deux houles constitue le clapotis.

Sur la figure 500 on pourrait voir que l'élément M est alors soumis à son poids P et à deux autres poussées P' et P'' qui donnent une résultante située dans un plan vertical, et dont l'inclinaison sur l'horizontale est constante. Il résulte de là que les molécules liquides décrivent des trajectoires rectilignes diversement inclinées.

Les ondes clapoteuses s'élèvent et s'abaissent sur place périodiquement; la surface libre varie de forme à chaque instant; mais les crêtes et les creux restent toujours sur les

mêmes verticales. La longueur des ondes est égale à celle des houles primitives, mais l'amplitude de l'oscillation est double, de sorte que, pour une même longueur $2l$ de l'onde, la hauteur des vagues du clapotis est double de celle de la houle qui lui a donné naissance. Les formules (4) subsistent pour le clapotis, ainsi que la relation $V = \sqrt{gH}$ lorsque la profondeur H , quoique assez grande, n'est pas infinie.

220. Marées. — On donne le nom de marée au mouvement périodique des eaux de la mer, Deux fois par jour, à $12^h 25^m$ d'intervalle, les eaux de l'Océan s'élèvent, envahissent les plages et se précipitent dans les estuaires; c'est ce qu'on appelle le flux ou la marée montante. Lorsque la mer est parvenue à sa plus grande hauteur, on dit qu'il y a pleine mer, et le niveau reste étale pendant un temps plus ou moins long. Ensuite les eaux s'abaissent pour reprendre leur niveau; c'est ce qu'on appelle le reflux, le jusant, ou la marée descendante. Enfin la basse mer correspond au niveau le plus bas.

La marée totale est la différence de niveau entre la moyenne de deux hautes mers consécutives et la basse mer intermédiaire; cette différence varie d'un jour à l'autre suivant les positions relatives de la lune et du soleil.

Le niveau moyen de la mer auquel on rapporte les altitudes en géodésie est une moyenne entre une haute mer et la basse mer suivante; ce niveau reste à peu près stationnaire en un lieu donné.

Le phénomène des marées est intimement lié aux mouvements de la lune; la double oscillation des eaux correspond exactement au jour lunaire, c'est-à-dire à l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs de la lune au même méridien. De plus, on a observé depuis longtemps que les marées sont plus fortes aux syzygies qu'aux quadratures, c'est-à-dire lorsque la terre, la lune et le soleil sont en conjonction. Les plus grandes marées se produisent à l'équinoxe, quand la lune et le soleil sont en même temps le plus près possible de l'équateur, à l'instant d'une syzygie. En fait, les marées sont produites par l'attraction combinée de la lune et du soleil sur les eaux de la mer, mais l'action de la

lune est toujours prépondérante, à cause de sa faible distance à la terre par rapport à la distance du soleil.

Vitesse de propagation. — Les ondes périodiques de la marée ont une longueur extrêmement considérable; leur vitesse de propagation est régie par la formule :

$$V = \sqrt{gH},$$

qui a été indiquée pour la première fois par Lagrange. A vrai dire, cette formule, qui est celle des ondes de translation, suppose que la profondeur H est très grande par rapport à la hauteur de l'onde; mais néanmoins elles s'accorde bien avec l'observation même dans les mers de profondeur moyenne, comme la Manche.

La vitesse de l'onde-marée, quoique variable, reste toujours considérable; au-dessus des profondeurs de l'Atlantique, elle atteint 175 mètres par seconde, et elle est encore de 21 mètres entre Ouessant et Boulogne.

Dans les mers largement ouvertes, comme celles de l'Océan austral, l'onde-marée se propage d'une manière régulière de l'est à l'ouest; mais, à l'approche des continents, le mouvement se ralentit. La configuration des côtes exerce une grande influence sur la hauteur de la marée, laquelle est d'autant plus considérable, toutes choses égales d'ailleurs, que la direction de la côte approche davantage d'être normale à la direction de la marée montante. C'est vers notre latitude qu'on observe les plus hautes marées: 12 mètres à Granville, 5^m,50 à Cherbourg, 9 mètres à Dieppe, 2^m,80 à Biarritz, 0^m,25 à Marseille.

A l'entrée d'un fleuve, les eaux de ce dernier descendent en même temps que le jusant, s'arrêtent avec l'étale de basse mer, puis remontent avec le flux, s'arrêtent de nouveau à l'étale de marée haute, pour redescendre ensuite vers l'aval. Mais les eaux descendent avec le reflux plus qu'elles ne montent avec le flux, de sorte qu'elles finissent par gagner la mer. En général les eaux salées de la mer ne pénétrant pas loin dans les fleuves.

221. Mascaret. — C'est le phénomène que l'on observe à l'embouchure de certains fleuves où l'ascension du flot d.

marée, au lieu de se produire graduellement et par lames successives comme sur les côtes maritimes, se manifeste par une lame écumante qui déferle sur les hauts-fonds et qui roule avec fracas. On voit alors les eaux remonter le fleuve avec une vitesse considérable et son niveau s'élever très rapidement.

Cet effet remarquable des marées s'observe parfaitement sur la partie de la Seine comprise entre Quillebœuf et Caudebec (fig. 504); c'est ce qu'on appelle la barre. On l'observe



FIG. 504.

également sur la Dordogne, sur le Gange, à l'embouchure de l'Amazone. Sur les fleuves de France, la hauteur de la première lame du mascaret ne dépasse guère 3 mètres; mais on a signalé des vagues de 5 et 6 mètres de hauteur sur le Gange. Ordinairement la première lame est suivie de quatre ou cinq autres de moindre hauteur qu'on appelle éteules, puis la mer redevient calme.

La production du mascaret s'explique par la propagation des ondes de translation. La vitesse V de l'onde-marée et celle V' des eaux du fleuve sont liées à la profondeur H des basses eaux dans le fleuve par la relation :

$$V = \sqrt{gH} - V';$$

comme la vitesse V' augmente avec la pente du cours d'eau, on voit que V diminue en même temps que H , lorsqu'on remonte le fleuve.

Supposons maintenant que le flot de marée s'élève par petites ondes successives de faible hauteur. La première lame s'avance avec une certaine vitesse; la seconde, trouvant sous elle une plus grande profondeur d'eau, s'avance avec une vitesse supérieure à la première et finit par la rejoindre; la troisième s'avance plus vite que la seconde et finit par

rejoindre les deux premières, de même que la quatrième ; de sorte que toutes les petites ondes successives finissent par se réunir, et c'est leur superposition qui constitue le mascaret.

La concentration des ondes successives ne se produit ni sur tous les fleuves ni à toutes les marées ; elle n'a lieu que dans certaines circonstances qui la rendent possible et qui dépendent de la configuration du lit du fleuve et de sa profondeur à l'embouchure. L'effet est d'autant plus accusé que cette embouchure présente plus de bancs et de hauts-fonds, car le retard produit sur les premières lames est alors considérable.

222. Oscillation de l'eau dans les tubes. — Lorsqu'on introduit un certain volume d'eau dans un tube, ou dans une conduite, par exemple dans le tube d'un niveau d'eau, il se produit une oscillation de la masse liquide qui est d'autant plus accusée que la dénivellation primitive qui lui a donné naissance était plus forte et que la masse d'eau était plus faible. Cette oscillation a un caractère pendulaire.

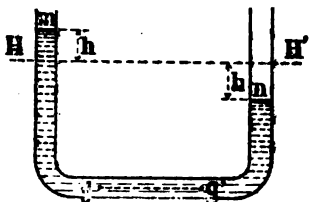


FIG. 505.

Le mouvement des colonnes d'eau oscillantes a été étudié spécialement par M. de Caligny au point de vue expérimental ; ce dernier a imaginé diverses dispositions plus ou moins ingénieuses qui utilisent les propriétés de ce mouvement pour économiser le volume d'eau consommé dans les canaux par les manœuvres de remplissage ou de vidange des sas des écluses.

Considérons un tube en U de section constante ω dans lequel on introduit un certain volume d'eau. A l'état d'équilibre statique, la surface libre se nivelle dans un plan horizontal HH' dont la position dépend de ω et du volume d'eau introduit. Si, par un moyen quelconque, par exemple en inclinant brusquement le tube, on crée une dénivellation $2h$, alors la masse d'eau se met à osciller autour de sa position moyenne HH'.

On peut observer qu'à cause du calibre du tube qui est constant, la longueur de la colonne oscillante demeure invariable; en outre, la surélévation du niveau m au-dessus de HH' égale la dénivellation de n au-dessous de la même droite.

Au début de l'oscillation, le niveau m est à une distance h au-dessus de HH' et le point n à une distance $-h$; au bout d'un certain temps, m n'est plus qu'à la cote x et n à la cote $-x$. Ensuite, lorsque $x = 0$, les niveaux m et n se confondent sur HH' , et le mouvement continuant, m passe au-dessous de la même droite et n au-dessus. Enfin, quand la distance de n à HH' devient égale à h , le mouvement change de sens, et ainsi de suite indéfiniment. Ceci suppose évidemment que l'on néglige le frottement des fillets liquides contre les parois du tube.

Soit g la position du centre de gravité de la colonne d'eau au début de l'oscillation, g' cette position quand la colonne occupe une position symétrique à l'instant où le mouvement change de sens. La masse liquide est animée d'une translation d'ensemble et la distance $gg' = 2h$.

Appelons ξ l'abscisse du centre de gravité de la masse d'eau à un instant quelconque t par rapport à un axe vertical, et l la longueur de la colonne; à cause de l'incompressibilité du liquide, on a constamment $\xi = h - x$.

D'autre part, la force accélératrice qui agit à chaque instant sur le centre de gravité a pour expression en valeur absolue $\pi\omega \times 2x$, et le théorème du mouvement du centre de gravité d'un système donne l'équation :

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = -2\pi\omega x,$$

ce que l'on peut écrire, puisque $m = \frac{\pi\omega l}{g}$ et $\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{d^2x}{dt^2}$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{2l}x. \quad (1)$$

Cette équation est celle d'un mouvement vibratoire simple dont la période est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

Cette période est précisément le temps qui s'écoule entre les instants où le niveau parti de m revient à sa position primitive; on voit que ce temps dépend seulement de l et non de la dénivellation initiale $2h$.

On arrive encore à la formule (1) dans le cas de deux réservoirs R et R' , de section horizontale A , mis en communi-

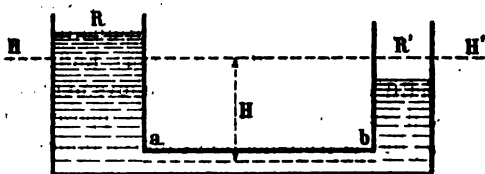


FIG. 506.

cation par un tube ab de section ω et de longueur l ; mais la longueur, $2l$ est remplacée par λ , et l'on a :

$$\lambda = H + \frac{l}{2} \frac{A}{\omega}.$$

H représente la distance du niveau d'équilibre HH' à l'axe du tube ab . On néglige toujours le frottement des filets liquides, et l'on suppose aussi que les vitesses de tous les points dans les bassins R et R' sont égales entre elles.

La durée de l'oscillation totale est alors :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}}.$$

Un calcul plus rigoureux exigerait que l'on tienne compte de la perte de charge qui se produit à l'entrée de l'eau dans le tuyau ab et que l'on peut évaluer à $\frac{U^2}{4g}$, puis de la charge consommée par le frottement de l'eau dans le tuyau, et enfin de la perte de charge résultant de l'épanouissement de la veine affluente dans le réservoir R' . Dans ces conditions, l'équation différentielle exacte du mouvement serait :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{\lambda} x - \frac{k}{2\lambda} \frac{dx^2}{dt^2}; \quad (2)$$

k désigne une constante fonction de A , ω , l , g , et du rayon moyen du conduit ab .

Ces diverses pertes de charge ont pour effet de réduire d'environ deux cinquièmes l'amplitude de chaque oscillation.

CHAPITRE VIII

ÉCOULEMENT SOUTERRAIN

223. Écoulement de l'eau à travers le sable. — Le problème de l'écoulement de l'eau à travers le sable a été étudié théoriquement par Dupuit et expérimentalement par Darcy; les résultats pratiques obtenus par ce dernier ingénieur ont sensiblement vérifiés les conclusions du premier. Dupuit assimilait cet écoulement au mouvement uniforme de l'eau à l'intérieur d'une infinité de tuyaux capillaires juxtaposés, ayant chacun un débit extrêmement petit, et lui appliquait l'équation de Prony. Darcy se servait d'un tuyau en fonte de 0^m,35 de diamètre, dressé verticalement, au bas duquel était placée et soutenue par une grille une couche de sable de hauteur déterminée. L'eau arrivait dans le tuyau à des pressions exactement mesurées à l'aide de manomètres à mercure, et dans chaque expérience le débit était soigneusement évalué dans un bassin gradué.

En faisant varier la pression et l'épaisseur de la couche de sable, Darcy a reconnu qu'en appelant :

q , le débit par mètre carré de la couche filtrante ;

e , son épaisseur ;

z , la charge sur sa base ;

k , un coefficient, variable seulement suivant la nature du sable ;

On avait toujours :

$$q = k \frac{z}{e}.$$

Comme z représente la charge absorbée dans le mouvement, puisque aux orifices de sortie la pression est nulle, le

rapport $\frac{z}{e}$ n'est autre chose que la perte de charge par mètre de parcours vertical à travers le sable.

Soient U la vitesse moyenne de l'eau et μ le rapport qui existe dans une tranche horizontale entre le vide et le plein ; l'aire de la section d'écoulement par mètre carré de couche de sable est précisément égale à μ , de sorte que l'on a :

$$q = \mu U,$$

par suite :

$$\frac{z}{e} = \frac{\mu}{k} U.$$

Avec du sable siliceux bien pur, présentant environ 38 0/0 de vide, Darcy a trouvé :

$$q = 0,0003 \frac{z}{e},$$

et comme, dans ce cas, $\mu = 0,38$, il en résulte :

$$\frac{z}{e} = \frac{0,38}{0,0003} U = 1,266 U.$$

Pour fixer les idées sur la grandeur de la vitesse, on prendra, par exemple, $e = 1$ mètre et $z = 1^m,50$, il vient :

$$U = \frac{1,50}{1,266} = 0,0012,$$

soit un peu plus de 1 millimètre par seconde. Avec du sable présentant seulement 30 0/0 de vide, comme la plupart des sables ordinaires, la vitesse ne dépasserait guère 0,0003.

Ces chiffres font ressortir la petitesse de la vitesse d'écoulement de l'eau à travers les filtres, et montrent avec quelle lenteur doit se faire son mouvement à l'intérieur d'un banc de sable fin disposé sur le flanc d'un coteau ou au fond d'une vallée, alors que la charge ne dépasse pas quelques mètres. Ils expliquent également ce fait plus d'une fois observé qu'il faut souvent plusieurs années de sécheresse intense pour appauvrir les grandes nappes d'eau des terrains perméables, et ensuite une période d'humidité aussi longue pour les remonter à leur niveau moyen.

224. Nappe aquifère sur un plan horizontal. — Comme application de la loi de Darcy, cherchons à déterminer la forme de la surface libre d'une nappe d'infiltration noyée dans un banc de sable superposé à une assise imperméable, et qui arrive à l'affleurement dans le fond de la vallée, le long des rives du cours d'eau. Soient AB une section du coteau normale au thalweg et AM la courbe piézométrique; l'écoulement souterrain se fait dans la direction MA, et tous les filets liquides sont parallèles en projection horizontale.



FIG. 507.

On supposera, pour simplifier, que l'assise imperméable est horizontale et qu'elle coïncide avec la ligne de fond ox de la rivière.

Désignons par :

z , l'ordonnée d'un point quelconque M de la courbe;

Q , le débit par mètre courant de thalweg;

h , la profondeur du cours d'eau;

μ , le coefficient de vide afférent au sable;

U , la vitesse moyenne dans la section MP .

Au droit de MP , le débit a pour expression :

$$Q = \mu z U. \quad (1)$$

Entre les points infiniment voisins M et M' , la perte de charge totale est $-dz$ et l'épaisseur de la couche de sable $-dx$, de sorte que la perte de charge par mètre égale $\frac{dz}{dx}$,

c'est-à-dire que l'on a, en appelant p le coefficient $\frac{k}{\mu}$ de Darcy,

$$U = p \frac{dz}{dx}. \quad (2)$$

L'élimination de U entre (1) et (2) conduit à l'équation :

$$Q = \mu p z \frac{dz}{dx},$$

que l'on peut écrire :

$$Q dx = \mu p z dz,$$

et qui donne par intégration, en désignant par C la constante arbitraire :

$$2Qx = \mu p z^2 + C.$$

Pour $x = 0$, on doit avoir d'après les données : $z = h$; par suite :

$$\mu p h^2 + C = 0,$$

d'où :

$$C = -\mu p h^2,$$

enfin :

$$2Qx = \mu p (z^2 - h^2). \quad (3)$$

Cette équation représente une parabole dont l'axe se confond avec ox , et que l'on pourrait tracer dans le plan si Q , μ et p étaient déterminés; deux forages d'essai, qui feraient connaître les coordonnées de deux points de la parabole, seraient suffisants pour effectuer cette détermination.

En différentiant l'équation (3) et considérant x comme constant et h comme variable, il vient, puisque $dx = 0$:

$$dz = \frac{h}{z} dh;$$

h étant plus petit que z , on a $dz < dh$; la variation de z est donc inférieure à celle de h , et la différence augmente avec z . Cette remarque confirme ce que l'on sait déjà par l'observation, que les variations du niveau de la rivière n'influencent que faiblement les parties hautes de la nappe d'infiltration.

1° Plus rigoureusement, on voit que le trajet élémentaire MM' d'une molécule d'eau est égal à ds et non à dx , en posant $MM' = ds$, de sorte que la perte de charge par mètre a pour expression $\frac{dz}{ds}$ au lieu de $\frac{dz}{dx}$. Dans ces conditions, l'équation différentielle de l'écoulement devient :

$$Qds = \mu p z dx;$$

on en déduit, en observant que $ds^2 = dx^2 + dz^2$;

$$Qdx = \sqrt{\mu^2 p^2 z^2 - Q^2} dz,$$

et par intégration :

$$2Qx = z \sqrt{\mu^2 p^2 z^2 - Q^2} - \frac{Q^2}{\mu p} \left(\log z + \sqrt{z^2 - \frac{Q^2}{\mu^2 p^2}} \right) + C.$$

Telle est l'équation exacte de la courbe piézométrique AM ; dans les cas ordinaires, cette courbe se confond sensiblement avec la parabole (3), elle a mêmes extrémités et se trouve placée au-dessus; elle en diffère d'autant moins que la hauteur h est plus grande.

Le maximum de $\frac{dz}{ds}$ est l'unité lorsque la courbe devient tangente à l'axe oz .

2° Si l'assise imperméable, au lieu d'être horizontale, avait une direction inclinée issue de O et définie par la relation $z_0 = ax$, a désignant une constante, on obtiendrait par une analyse identique pour l'équation de la courbe piézométrique :

$$x - \frac{z}{a} + \frac{Q}{\mu p a^2} = \left(\frac{Q}{\mu p a^2} - \frac{h}{a} \right) e^{\frac{\mu p a}{Q}(h-z)}.$$

Pour $a = 0$, on doit retrouver la formule (3).

3° Pour une assise imperméable parabolique définie par la relation $z_0 = ax + bx^2$, on aurait à intégrer l'équation :

$$\frac{Q}{\mu p} \frac{dx}{dz} = z - ax - bx^2.$$

On est ainsi ramené à une équation de Riccati que l'on intègre au moyen des fonctions de Bessel.

225. Puits ouvert dans une nappe horizontale. — Considérons une masse cylindrique de sable $ABCD$, entourée de liquide de toutes parts, supportée par un terrain imperméable horizontal, et au centre de laquelle on a perforé un puits jusqu'au niveau de ce terrain.

Tant que l'on ne retire pas d'eau du puits, la surface

libre s'y maintient au niveau de A'B', et aucun écoulement ne se produit dans le sable. Un puisage qui fait descendre le plan d'eau jusqu'en mn provoque un écoulement vers l'intérieur, et la surface libre du liquide en mouvement prend la forme d'une surface de révolution dont la méridienne est une certaine courbe En .

Le mouvement de chaque molécule d'eau est évidemment dirigé vers l'axe du puits, et les filets liquides sont représen-

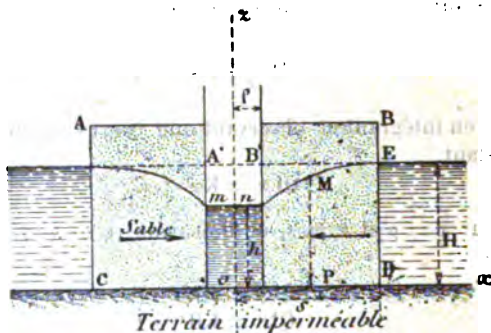


FIG. 508.

tés en projection horizontale par des rayons qui aboutissent au même point et font entre eux des angles égaux.

Étant données l'épaisseur H de la nappe d'eau, le rayon r du puits, l'épaisseur et la puissance d'absorption du massif filtrant, proposons-nous de déterminer la forme de la courbe En et la loi de variation du débit du massif.

Appelons :

x, z , les coordonnées d'un point quelconque M de En ;

Q , le débit du puits, c'est-à-dire le volume d'eau extrait pendant une seconde ;

h , la hauteur de l'eau dans le puits après le puisage ;

μ , le coefficient de vide afférent au sable ;

U , la vitesse d'écoulement dans la section MP ;

s , le rayon du massif filtrant.

Au droit du cylindre MP , le débit a pour expression :

$$Q = 2\mu\pi xU.$$

On a d'autre part :

$$U = p \frac{dz}{dx};$$

le produit de ces deux équations donne, après simplifications,

$$Q = 2p\mu x \frac{dz}{dx} = 2Kx \frac{dz}{dx},$$

en posant, pour abréger, $K = p\mu$.

Les variables se séparent immédiatement, on obtient :

$$Q \frac{dx}{x} = 2Kz dz,$$

puis, en intégrant et observant que Q est considéré comme constant,

$$Q \ln x = Kz^2 + C. \quad (\alpha)$$

Pour $x = \rho$ et $x = s$, on doit avoir : $z = h$ et $z = H$; par suite :

$$Q \ln \rho = Kh^2 + C, \quad (\beta)$$

$$Q \ln s = KH^2 + C. \quad (\gamma)$$

L'élimination de la constante C entre (α) et (β) et entre (β) et (γ) conduit aux équations :

$$Q \ln \frac{x}{\rho} = K(z^2 - h^2),$$

$$Q \ln \frac{s}{\rho} = K(H^2 - h^2),$$

d'où l'on déduit par division :

$$\frac{\ln \frac{x}{\rho}}{\ln \frac{s}{\rho}} = \frac{z^2 - h^2}{H^2 - h^2}, \quad (f)$$

et

$$Q = \frac{K(H^2 - h^2)}{\ln \frac{s}{\rho}}. \quad (2)$$

L'équation (1), indépendante de K et de Q , c'est-à-dire de la porosité du sable et du débit du puits, est celle de la courbe En ; elle définit une exponentielle.

L'équation (2) montre que le débit s'accroît avec la charge $H - h$, avec la porosité du filtre et le rayon ρ du puits, mais qu'il diminue avec le rayon s du massif. En réalité, comme ρ n'intervient que par son logarithme, ses variations ne se répercutent que fort peu sur le débit, surtout lorsque s est considérable par rapport à ρ , ce qui est le cas ordinaire.

Mais on peut faire ici la même observation qu'au précédent paragraphe sur la substitution de dx à ds dans l'expression de U .

En réalité, si l'on appelle α l'angle de la tangente à la courbe En au point M avec l'axe ox , on a pour l'expression du débit :

$$Q = 2K\alpha \sin \alpha.$$

A la paroi du puits on a de même, en appelant α' l'angle de la tangente avec ox :

$$Q = 2K\rho \sin \alpha';$$

on déduit de cette équation :

$$h = \frac{Q}{2K\rho \sin \alpha'}.$$

Comme le maximum de $\sin \alpha'$ est l'unité, on trouve pour le minimum de h correspondant à un débit Q et à un rayon ρ :

$$h = \frac{Q}{2K\rho}.$$

Ceci montre que le diamètre du puits a une influence sensible sur son débit, en ce qu'il permet, toutes choses égales d'ailleurs, d'augmenter considérablement la profondeur d'épuisement, c'est-à-dire la charge.

Enfin, on voit par l'équation α que les courbes de niveau de la nappe liquide, tout le long desquelles la hauteur z reste constante, sont des cercles concentriques ayant leurs centres sur l'axe du puits.

226. Cas où le puits n'est alimenté que par le fond. —

M. Thévenet, chargé d'établir un puits filtrant pour la ville de Saïgon, a repris expérimentalement l'étude de ces puits dans le cas où le forage ne descend pas jusqu'à la couche imperméable et que l'alimentation se fait uniquement par le fond. Le puits considéré au début était alimenté exclusivement par la paroi.

Les expériences de cet ingénieur ont montré que le débit était alors proportionnel à la charge et au diamètre beau-

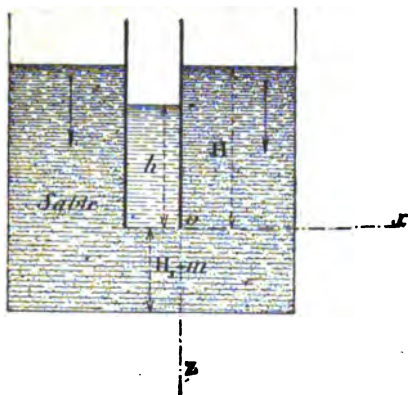


FIG. 509.

coup plus que ne l'indiquait la formule (2) de Dupuit. On peut se rendre compte de ces résultats de la façon suivante :

Si l'on prend les axes et les notations indiqués sur la figure 509, pour le filet liquide qui traverse oz au point m dont l'ordonnée est z le chemin parcouru est $H + 2z$ et la charge $H - h$; la loi de Darcy donne donc :

$$U = p \frac{H - h}{H + 2z} ;$$

le débit du cylindre élémentaire de hauteur dz , qui passe au même point m , a pour expression :

$$dQ = 2\pi r p (H - h) \mu \frac{dz}{H + 2z} = 2K\rho (H - h) \frac{dz}{H + 2z}.$$

L'intégration depuis $z = 0$, $Q = 0$, jusqu'à $z = H_1$, donne enfin :

$$Q = K\rho (H - h) L \left(1 + \frac{2H_1}{H}\right), \quad (3)$$

formule qui montre que Q est directement proportionnel à $H - h$ et à ρ .

Les conclusions de l'analyse précédente ne sont pas toujours rigoureusement vérifiées par la pratique en ce qui concerne l'influence du diamètre, car la vérité paraît exister entre les hypothèses extrêmes de Dupuit et de M. Thévenet. La plupart des puits sont alimentés à la fois par le fond et par la paroi, principalement par le fond. D'autre part, l'observation montre qu'il se forme presque toujours à la base des puits une poche ou excavation, plus ou moins grande suivant la vitesse de l'eau et le degré de fluidité du sable, et un calcul rigoureux du débit devrait porter sur l'enveloppe de cette poche.

227. Puits artésiens. — Dans le cas d'un puits artésien, lorsque le tube est coupé en un point b à une certaine distance de la surface piézométrique, cette dernière s'infléchit symétriquement autour du tube suivant une courbe mbd , et l'écoulement s'effectue sous la charge bo .

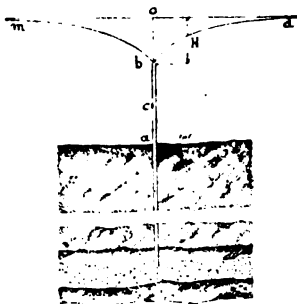


FIG. 510.

La formule (2) des puits ordinaires est applicable aux puits artésiens, car les circonstances de l'écoulement sont, au fond, analogues dans les deux cas.

La hauteur moyenne de la couche filtrante $\frac{H + h}{2}$ doit

être remplacée par l'épaisseur s de la couche perméable dans laquelle coule la nappe, et à la charge $H - h$ on doit substituer la hauteur $bo = H_1$; s et ρ conservent la même signification : s , largeur de la

nappe perméable qui entoure le puits, et ρ , rayon de ce dernier.

La formule du débit s'écrit dès lors :

$$Q = 2k_2 \frac{H}{L \frac{s}{\rho}} \quad (5)$$

Rigoureusement il faudrait retrancher de H la perte de charge qui résulte du frottement de l'eau contre la paroi intérieure du tube ; mais, comme cette perte est généralement très faible par rapport à la charge totale, il n'y a aucun inconvénient à ne pas en tenir compte. Au puits de Grenelle, dont le diamètre est de 0^m,17, Mary a calculé que la perte de charge produite par le tube n'était que de 1 mètre environ, alors que celle qui résulte du parcours de l'eau au travers des sables verts atteint 56 mètres.

La proportionnalité du débit à la charge se vérifie dans tous les puits artésiens ; mais l'observation montre que l'influence du diamètre est généralement supérieure à celle qu'indique la formulé (5). Le débit du puits de Passy, de 0^m,80 de diamètre, fut toujours de beaucoup supérieur à celui du puits de Grenelle, alimenté par la même nappe. Une autre raison, non moins déterminante, milite en faveur de l'adoption des grands diamètres, c'est la facilité qui en résulte pour les travaux de forage et l'installation et la réparation des tubes.

Désignons par Q' le débit en un autre point c , par H' la charge correspondante ; on doit avoir également :

$$Q' = 2k_2 \frac{H'}{L \frac{s}{\rho}}, \quad (\alpha)$$

et le quotient des relations (5) et (α) donne :

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{H}{H'}$$

proportion qui montre que, si l'on porte sur les horizontales des points b et c des ordonnées respectivement proportion-

nelles à Q et Q' , la droite fg doit théoriquement passer par le niveau piézométrique O .

Le plus souvent cependant le point obtenu par cette construction est inférieur au véritable niveau piézométrique, que l'on ne peut déterminer approximativement qu'en étudiant par la géologie la forme et l'étendue de la nappe artésienne. Le débit du puits se trouve toujours diminué dans une certaine proportion par les pertes qui se produisent en route aux joints, aux fissures et aux solutions de continuité du tube, qui n'est jamais absolument étanche. Une fraction du débit s'élève entre le tube et la paroi du trou de sonde jusqu'aux couches perméables supérieures, dans lesquelles elle disparaît.

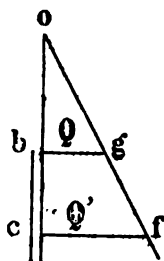


FIG. 511.

228. Deux puits ouverts dans une nappe horizontale. —
1° Dans le cas de deux puits voisins A et B alimentés par

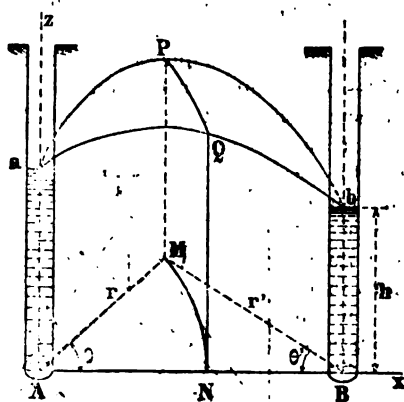


FIG. 512.

la même nappe, la surface libre $aPQb$ de cette dernière s'infléchit dans la direction des puits, et les filets liquides prennent des directions variables qui dépendent des débits respectifs des deux puits et de leur distance.

Soit Q le débit du puits A , le quotient $\frac{Q}{2\pi} = q$ représente son débit par unité d'angle, et pour un angle θ le débit s'exprime par le produit $q\theta$.

Prenons pour plan horizontal de comparaison celui qui supporte la nappe aquifère et dans lequel sont situés les points A et B ; soit M un point quelconque de ce plan, et MN une courbe quelconque.

Si l'on appelle q' le débit par unité d'angle du puits B , le volume d'eau qui traverse le cylindre $MNPQ$ en une seconde pour aller au puits A a pour expression $q\theta$; celui qui traverse le cylindre pour aller au puits B égale $q'\theta'$; de sorte que le débit du cylindre a pour valeur $q\theta - q'\theta'$.

Posons :

$$q\theta - q'\theta' = Nh, \quad (1)$$

en appelant h une constante et N un coefficient numérique. Pour chaque système de valeurs de q, q', N, h , l'équation (1) représente dans le plan de comparaison une courbe MN tout le long de laquelle le débit du cylindre reste constant; cette courbe n'est autre chose que la projection horizontale des filets liquides placés sur la surface du cylindre.

En donnant successivement au coefficient N les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, ..., on obtient une famille de courbes qui reproduisent le tracé des divers filets liquides sur le plan horizontal.

Dans le cas où l'on a $q = q'$, l'équation (1) devient :

$$\theta - \theta' = \frac{Nh}{q}; \quad (2)$$

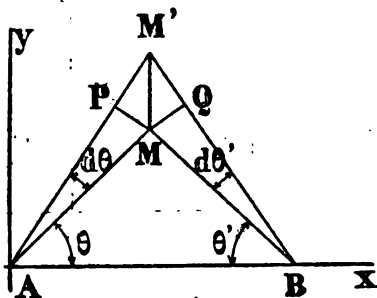


Fig. 513.

les courbes correspondantes sont des hyperboles équilatères passant par les centres A et B ; elles sont indiquées sur la figure 514.

2° Pour obtenir l'équation de la surface libre de la nappe,

prenons AB comme axe des x , une perpendiculaire pour axe des y , et la verticale Az dirigée de bas en haut.

Considérons le plan vertical dont la trace MM' est parallèle à Ay. Posons $MM' = dy$, et abaissons les perpendiculaires MP et MQ sur les rayons AM' et BM'; l'angle $MAM' = d\theta$, $MBM' = d\theta'$, $MP = r d\theta$, $MQ = r' d\theta'$.

Dans le plan MM', le débit a pour expression :

$$dQ = \mu z dy U;$$

mais on a aussi :

$$dQ = q d\theta - q' d\theta', \quad U = p \frac{dz}{dx};$$

de sorte que l'on peut écrire :

$$\mu p z dy \frac{dz}{dx} = q d\theta - q' d\theta'.$$

D'autre part, la figure donne, en projetant l'élément dx sur les directions des rayons AM et BM :

$$\begin{aligned} r d\theta &= dy \cos \theta, & dr &= dx \cos \theta \\ r' d\theta' &= dy \cos \theta', & dr' &= -dx \cos \theta'. \end{aligned}$$

Ces relations permettent d'éliminer dx , dy , $d\theta$, $d\theta'$ de l'équation précédente ; on obtient en fin de compte :

$$\mu p z dz = q \frac{dr}{r} + q' \frac{dr'}{r'},$$

et en intégrant :

$$\mu p z^2 = 2q L r + 2q' L r' + C.$$

Cette équation peut encore s'écrire :

$$\mu p z^2 = 2L r q r' q' + C; \quad (3)$$

elle représente la surface piézométrique de la nappe en coordonnées cylindriques.

Dans le cas où $q = q'$, l'équation devient :

$$\mu p z^2 = 2q L r r' + C. \quad (4)$$

On déterminera la constante C et les débits q et q' en

posant la condition que la nappe passe par trois points donnés ; ces points se réduiront à deux si $q = q'$.

D'après (3), les courbes de niveau de la nappe d'eau, tout le long desquelles z reste constante, ont pour équation dans le plan horizontal, en désignant par k^2 une constante :

$$rr'r'q' = k^2.$$

Lorsque $q = q'$, cette équation peut s'écrire, en désignant par b^2 une autre constante :

$$rr' = b^2;$$

les courbes de niveau sont alors des ovales de Cassini, dont quelques-uns sont représentés sur la figure 514. On démontre

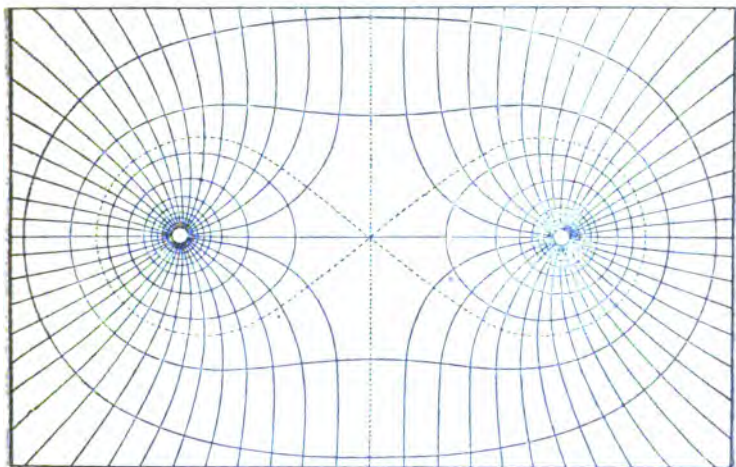


Fig. 514.

en analyse que ces ovales sont les trajectoires orthogonales des hyperboles définies par l'équation (2).

Dans le cas où la constante b devient égale à la moitié de la distance AB des deux puits, l'ovale se transforme en lem-niscate ; cette courbe est figurée en pointillé.

Enfin, lorsque b diffère notablement de cette demi-distance,

les courbes tendent à prendre une forme circulaire comme on le voit sur la figure.

Le volume d'eau qui traverse les ovales entourant les deux puits est $2\pi(q + q')$; ceux qui traversent les ovales entourant un seul puits sont respectivement $2\pi q$ et $2\pi q'$.

3° Pour obtenir l'expression du débit lorsque $q = q'$, supposons que les deux points par lesquels on fait passer la nappe d'eau soient situés dans le plan vertical qui contient

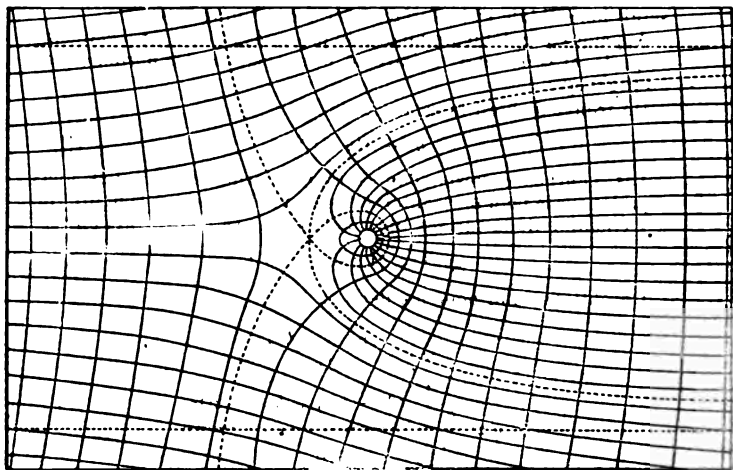


FIG. 515.

les axes des puits, de façon qu'en posant $AB = l$ on ait les conditions (225) :

$$\begin{array}{lll} r' = \rho, & r = l + \rho, & z = h, \\ r' = s, & r = l + s, & z = H. \end{array}$$

Substituant ces limites dans l'équation (4) pour éliminer la constante, on obtient, en observant que $up = \frac{k}{\pi}$:

$$q = \frac{k}{2\pi} \frac{H^2 - h^2}{L \frac{s}{\rho} + L \frac{l+s}{l+\rho}} \quad (5)$$

Cette formule fait ressortir l'influence que la distance des deux puits exerce sur le débit de chacun d'eux. On voit, en effet, que ce débit augmente avec la distance, et qu'il devient égal à celui du puits unique lorsque l tend vers l'infini; il est égal à la moitié de cette valeur quand $l = 0$, c'est-à-dire lorsque les axes des deux puits coïncident.

229. Puits ouvert dans une nappe parabolique. — En suivant une marche identique, on soumettrait au calcul le débit d'un puits unique ouvert dans une nappe d'infiltration dont la base serait horizontale et la surface libre parabolique (224).

Appelons q le débit angulaire du puits, h_0 la hauteur d'eau dans ce puits, et Q le débit linéaire de la nappe comptée normalement au thalweg.

On trouve d'abord la relation :

$$q_0 - Qy = Nh. \quad (1)$$

Les courbes correspondantes reproduisent le tracé des filets liquides sur le plan horizontal; elles sont indiquées sur la figure 515.

L'équation de la surface libre de la nappe se met sous la forme :

$$\mu p x^2 = q L r + Q x + C. \quad (3)$$

On obtient enfin pour les débits :

$$Q = \frac{\mu p (z^2 - h^2)}{2x},$$

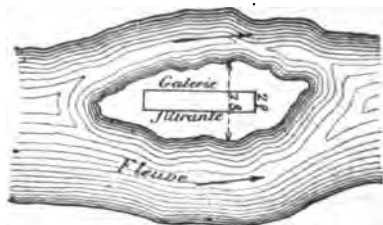
$$q = \frac{k}{2\pi} \frac{\frac{1}{2} (z^2 - h^2) - h_0^2 - 2Qp}{L \frac{x}{\rho}}.$$

Les lecteurs qui voudront approfondir cette question consultent avec intérêt le mémoire de M. Fossa-Mancini.

230. Galeries filtrantes. — Pour l'alimentation des villes, quelques ingénieurs ont eu l'idée, vers 1820, de substituer aux prises d'eau directes en rivière, qui ne fournissent la plupart du temps que des eaux louches chargées de matières en suspension, de longues galeries creusées au voisinage des cours d'eau et destinées à recueillir l'eau de ces cours d'eau par filtration au travers du terrain perméable intercalé entre la galerie et la rivière.

Le calcul de ces galeries est analogue à celui des puits ordinaires (225); mais la courbe d'inflexion de la nappe est

une parabole. Soit une galerie de largeur $2p$, creusée jusqu'au terrain imperméable dans une île de sable de largeur $2s$ placée au milieu d'un fleuve. En conservant les



notations du paragraphe 221, et appelant q le débit par mètre courant de galerie, l'expression de ce débit au droit de la section MP s'écrit :

$$\frac{q}{2} = \mu z U;$$

la section symétrique par rapport à oz donne le même débit, ce qui fait au total :

$$q = 2\mu z U,$$

ou encore, puisque $U = p \frac{dz}{dx}$,

$$q = 2\mu p z \frac{dz}{dx} = \frac{2k}{\pi} z \frac{dz}{dx}.$$

L'intégration est immédiate, il vient :

$$qx = \frac{k}{\pi} z^2 + C,$$

équation qui montre que la courbe En est une parabole (fig. 508).

Si l'on élimine la constante C par l'introduction des limites h et H , on obtient :

$$q = \frac{k}{\pi} \frac{H^2 - h^2}{s - p} = \frac{k}{\pi} \frac{(H - h)(H + h)}{s - p}. \quad (4)$$

Le débit est donc directement proportionnel à la chute $H - h$, à la hauteur moyenne de la couche filtrante $\frac{H + h}{2}$, et inversement proportionnel à son épaisseur $(s - \rho)$.

Si, pour comparer les puits aux galeries de même largeur, on prend le quotient des relations (2) et (4), il vient après simplifications :

$$\frac{Q}{q} = \frac{\pi(s - \rho)}{Ls - L\rho};$$

ρ est généralement petit par rapport à s , de sorte que l'on peut écrire approximativement :

$$\frac{Q}{q} = \frac{\pi s}{Ls}.$$

Si l'on fait, par exemple, $s = 100$ mètres, alors :

$$\frac{Q}{q} = \frac{3,1416 \times 100}{2 \times 2,303} = 68;$$

L représente un logarithme népérien, et le module de transformation des logarithmes vulgaires égale 2,303.

Avec un filtre de 100 mètres de largeur, le puits équivaut comme débit à 68 mètres de galerie environ; faisant successivement : $s = 10, 200, 500, 1.000$ mètres, le même rapport devient : 14, 118, 252, 454. Ces chiffres confirment théoriquement le fait déjà reconnu par les ingénieurs de la supériorité économique des puits filtrants sur les galeries.

(continued from page 6)

11/14/2011

• • • • •

TROISIÈME PARTIE

THERMODYNAMIQUE

CHAPITRE PREMIER

PRINCIPES FONDAMENTAUX

La *thermodynamique* a pour objet l'étude de la transformation du travail mécanique en chaleur, et réciproquement. Cette théorie ne fait aucune hypothèse sur la nature intime du calorique, elle repose uniquement sur des faits observés et des résultats d'expérience.

La thermodynamique est une science encore récente, mais déjà très avancée, grâce aux travaux de Clausius, Hirn et Zeuner.

1. Travail mécanique et chaleur. — Beaucoup d'expériences permettent de constater le phénomène de la transformation du travail mécanique en chaleur, et inversement.

L'ouvrier qui travaille le fer n'est pas longtemps à reconnaître que le travail du marteau et de la lime élève la température du métal.

Le frottement du moyeu d'une roue contre l'essieu, lorsque ce dernier n'est pas suffisamment enduit de corps gras, chauffe la roue jusqu'à la rendre brûlante.

Lorsqu'une balle de plomb sortant d'un fusil rencontre une cible en fonte, sa vitesse est presque entièrement annulée, et la balle tombe aplatie à une petite distance de la cible ; en la ramassant, on constate qu'elle s'est notablement échauffée. C'est le travail dépensé pour lui communiquer son mouvement que l'on retrouve sous forme de chaleur.

En 1798, Rumford, de Munich, compara la chaleur dégagée dans le forage d'un canon de bronze à la quantité de travail dépensé.

Inversement, l'observation montre que le charbon brûlé dans le foyer d'une machine à vapeur engendre de la chaleur, que cette chaleur sert à vaporiser l'eau, et que, enfin, la vapeur peut produire une certaine quantité de travail consistant, par exemple, dans l'élévation d'un poids à une hauteur déterminée.

En présence de ces faits, les physiciens n'ont pas tardé à se demander si, dans ces phénomènes, en apparence très différents, il n'existait pas une certaine relation entre la quantité de travail mécanique dépensé et la quantité de chaleur produite.

Les célèbres expériences de Mayer et de Joule, puis celles de Hirn, ont répondu à cette question et montré qu'il existait un rapport constant entre ces deux quantités; c'est ce résultat qui constitue le premier principe de la thermodynamique.

2. Principe de Mayer et de Joule. — *Toutes les fois qu'un corps produit ou subit un travail, il disparaît de la chaleur ou bien il en apparaît; et il existe un rapport unique et constant entre les quantités de travail et de chaleur qui dépendent l'une des autres. Autrement dit, il y a constamment équivalence entre une quantité déterminée de travail dépensé et la quantité de chaleur produite correspondante.*

Si donc on appelle Q la totalité de la chaleur, exprimée en calories, produite par un travail \mathfrak{E} , exprimé en kilogrammètres; ou encore \mathfrak{E} le travail résultant de la transformation de la chaleur Q , on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\mathfrak{E}}{Q} = J & \text{et} \quad \mathfrak{E} = JQ, \\ \frac{Q}{\mathfrak{E}} = A & \text{et} \quad Q = A\mathfrak{E}; \end{array} \right.$$

J et A étant des quantités constantes liées entre elles par la relation :

$$J = \frac{1}{A}.$$

Pour démontrer expérimentalement l'invariabilité du rapport $\frac{\mathcal{E}}{Q}$, et déterminer la valeur J de l'équivalent mécanique de la calorie, Joule a utilisé une quantité connue \mathcal{E} de travail pour produire, par le frottement réciproque de corps solides et liquides, une quantité Q de chaleur qu'il mesurait avec précision.

L'appareil de Joule se composait de deux poids F et E pouvant glisser le long de deux règles graduées H et G ; ces poids étaient réunis à un arbre vertical AB par des cordons pas-

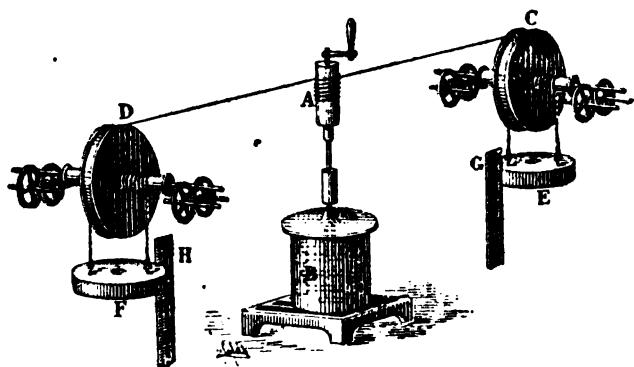


FIG. 317.

sant sur des poulies D et C ; la partie inférieure de l'arbre AB était garnie de palettes en métal et plongeait dans l'intérieur d'un calorimètre contenant de l'eau ou un autre liquide, et muni de thermomètres très sensibles.

La rotation du système étant provoquée par la chute des poids F et E , le frottement du liquide sur lui-même et sur les pièces solides du calorimètre ralentissait la rotation de l'arbre à palettes, et la quantité de force vive ou travail perdu se retrouvait sous forme de chaleur par une élévation de la température du liquide.

Le travail absorbé \mathcal{E} se déduisait de la hauteur de chute des poids; la quantité de chaleur correspondante Q s'obtenait

par le relevé des températures du liquide avant et après l'opération.

En répétant les mêmes expériences un très grand nombre de fois, et en s'entourant, dans chacune d'elles, des précautions minutieuses indispensables à de pareilles observations, Joule a trouvé avec l'eau $J = 424$; le mercure a donné $J = 425$.

Les expériences de Hirn à l'usine du Logelbach, près de Colmar, ont porté non sur la détermination de J , mais sur celle de son inverse A , équivalent calorifique du travail. Hirn mesurait la quantité de chaleur Q consommée pour produire un certain travail \mathcal{E} ; ces expériences, non moins célèbres que celles de Joule, ont donné pour A des valeurs variables oscillant entre $\frac{1}{420}$ et $\frac{1}{432}$.

La concordance remarquable de ces chiffres avec ceux de Joule a été corroborée par de nombreuses expériences exécutées depuis par divers ingénieurs.

Aussi admet-on aujourd'hui comme un résultat expérimental que *l'équivalent mécanique de la chaleur vaut 425*, c'est-à-dire que la quantité de chaleur correspondante à une calorie équivaut à un travail mécanique de 425 kilogrammètres, et, réciproquement, que 425 kilogrammètres peuvent donner, par transformation, une quantité de chaleur représentée par une calorie.

Expression analytique. — Le principe de Mayer est susceptible d'une traduction analytique importante que nous allons maintenant indiquer.

Quand l'on communique une certaine quantité de chaleur à un corps, une masse de gaz par exemple, sa température et son volume s'accroissent simultanément. Supposons d'abord que la quantité de chaleur communiquée soit infiniment petite et égale à dQ , alors une fraction du travail élémentaire correspondant $d\mathcal{E}$ est employée à l'intérieur du corps pour augmenter sa température et modifier la disposition des molécules; l'autre fraction est utilisée au dehors pour vaincre les forces extérieures telles que la pression du milieu ambiant, ou la pesanteur, ou encore pour faire varier la force vive du corps, s'il est en mouvement.

Désignons par dH le travail élémentaire intérieur, par dW le travail extérieur; on a ainsi :

$$d\mathcal{E} = dH + dW,$$

c'est-à-dire, puisque $Q = A\mathcal{E}$:

$$dQ = AdH + AdW,$$

et si l'on pose, avec Clausius, $AdH = dU$, on peut encore écrire :

$$dQ = dU + AdW.$$

Pour calculer dW , appelons : p , la pression en kilogrammes que le milieu ambiant exerce sur 1 mètre carré de la surface du corps; v , le volume de ce corps en mètrescubes; dv , la variation élémentaire du volume.

Le travail correspondant à l'accroissement dv est $p dv$; en effet, considérons d'abord un corps de pompe cylindrique ayant 1 mètre carré de base et dont le piston soit chargé d'un poids p ; l'élévation du piston pour une augmentation de volume dv est précisément dv , de sorte que le travail correspondant est bien $p dv$.

Pour un corps quelconque limité par une surface fermée S , prenons sur cette surface un élément d'aire dS ; la pression que supporte cet élément est $p dS$; mais lorsque, sous l'influence de la chaleur, le corps se dilate, la surface S passe en S' , et l'élément dS subit un déplacement normal $d\rho$; l'expression du travail est, par suite, $p dS \times d\rho = p d^2v$, d^2v représentant le volume infiniment petit du second ordre hachuré sur la figure; le volume infiniment petit du premier ordre dv est compris entre les surfaces S et S' . Pour avoir le travail $d\mathcal{E}$ qui correspond à la dilatation de tout le corps, il suffit d'étendre la différentielle précé-

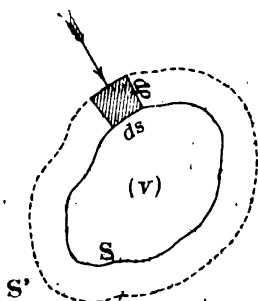


FIG. 518.

dente à tous les éléments dS compris dans la surface S ; on a donc encore :

$$d\bar{e}' = p \int dS \times dp = p \int d^2v = p dv.$$

Lorsque le corps est en mouvement, il faut, en outre, tenir compte de la variation de la force vive qui a pour expression :

$$d. \frac{1}{2} \Sigma m (u_1^2 - u_0^2),$$

u_0 et u_1 désignant les vitesses initiale et finale du point matériel de masse m , le signe Σ s'étendant à tous les points qui composent le volume v .

On peut donc écrire au total :

$$dW = p dv + d. \frac{1}{2} \Sigma m (u_1^2 - u_0^2).$$

Si, comme cela est assez fréquent, la seule force extérieure à considérer est la pression p , le second terme du second membre est nul, et il reste :

$$dW = p dv,$$

par suite :

$$dQ = dU + A p dv; \quad (1)$$

telle est l'équation différentielle du principe de Mayer. Cette équation donne par intégration pour une quantité finie Q de chaleur communiquée au corps :

$$Q = U_1 - U_0 + A \int p dv. \quad (2)$$

La fonction $U = AH$ est la *chaleur interne* de Clausius; elle représente la somme des quantités de chaleur absorbées pour élever la température du corps et pour modifier la disposition de ses molécules. Cette fonction dépend à la fois de p et de v ; U_1 et U_0 sont ses valeurs initiale et finale.

3. Relations déduites de l'équation de Mayer et Joule. — Il est facile de concevoir que l'état d'un corps est défini lors-

qu'on connaît sa température et la pression qu'il supporte, ou bien son volume et sa température, ou encore son volume et la pression.

Considérons, en effet, un corps du poids de 1 kilogramme dont tous les éléments sont à la même température t et qui supporte sur sa surface une pression uniforme p ; le volume v de ce corps dépend évidemment de p et de t , donc les trois variables v, p, t ne sont pas indépendantes et sont liées entre elles par une certaine relation :

$$f(v, p, t) = 0.$$

Ceci revient à dire que deux de ces variables suffisent, en général, pour déterminer la troisième, c'est-à-dire l'état du corps.

A vrai dire, et pour la plupart des corps, cette relation n'est pas encore connue; elle l'est cependant pour les gaz parfaits dans lesquels on a, d'après les lois de Mariotte et de Gay-Lussac,

$$\frac{pv}{1 + \alpha t} = C^{\text{te}}.$$

Pour les vapeurs, on a établi une relation analogue, mais cette relation est empirique et donnée sous forme de tables.

Reprenons la fonction U que nous avons dit dépendre de p et de v , mais que l'on peut aussi considérer comme fonction de v et de t , ou de p et de t .

1° Si l'on suppose d'abord que $U = \varphi_1(v, t)$, on a :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial v} dv + \frac{\partial U}{\partial t} dt,$$

et l'équation (1) devient :

$$dQ = \frac{\partial U}{\partial v} dv + \Lambda p dv + \frac{\partial U}{\partial t} dt,$$

ou encore :

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial v} + \Lambda p \right) dv + \frac{\partial U}{\partial t} dt.$$

Si l'on pose pour simplifier :

$$I = \frac{\partial U}{\partial v} + \Lambda p, \quad C' = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (a)$$

on a enfin :

$$dQ = l dv + C' dt. \quad (3)$$

En faisant $dt = 0$, d'où $t = C^*$, il vient $dQ = l dv$; ce qui montre, d'après ce que l'on a vu en physique, que l représente la *chaleur latente de dilatation* du corps.

Au contraire, si l'on fait $dv = 0$, d'où $v = C^*$, il reste $dQ = C' dt$; ce qui veut dire que C' n'est autre chose que la *chaleur spécifique du corps sous volume constant*.

2° Supposons maintenant que $U = \varphi_2(p, t)$, alors :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial p} dp + \frac{\partial U}{\partial t} dt,$$

par suite :

$$dQ = \frac{\partial U}{\partial p} dp + \frac{\partial U}{\partial t} dt + A p dv.$$

Mais, v dépendant de p et de t , on a d'autre part :

$$dv = \frac{\partial v}{\partial p} dp + \frac{\partial v}{\partial t} dt;$$

on peut donc écrire :

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial p} + A p \frac{\partial v}{\partial p} \right) dp + \left(\frac{\partial U}{\partial t} + A p \frac{\partial v}{\partial t} \right) dt.$$

Posons pour abréger :

$$\begin{aligned} h &= \frac{\partial U}{\partial p} + A p \frac{\partial v}{\partial p}, \\ C &= \frac{\partial U}{\partial t} + A p \frac{\partial v}{\partial t}; \end{aligned} \quad (c)$$

il vient :

$$dQ = h dp + C dt; \quad (4)$$

et l'on peut encore voir comme plus haut, en faisant successivement $dt = 0$ et $dp = 0$, que h est la *chaleur latente d'augmentation de pression*, C la *chaleur spécifique sous pression constante*.

Des relations (a) et (c) on déduit :

$$C = C' + A p \frac{dv}{dt},$$

mais on peut observer que $A p \frac{dv}{dt}$ représente la quantité de chaleur dépensée pour engendrer le travail extérieur correspondant à l'accroissement du volume dv . On voit par là que la *chaleur spécifique sous pression constante* égale la *chaleur spécifique sous volume constant* augmentée de la *chaleur en question*.

3° Prenons enfin la fonction U sous la forme $U = \varphi_3(v, p)$; dans ces cas :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial v} dv + \frac{\partial U}{\partial p} dp,$$

et, toujours d'après (1),

$$dQ = \frac{\partial U}{\partial p} dp + \left(\frac{\partial U}{\partial v} + Ap \right) dv;$$

mais d'un autre côté :

$$\frac{\partial U}{\partial p} = \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial p}, \quad \frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v};$$

combinant ces relations avec les valeurs de C' et C écrites plus haut, on obtient :

$$dQ = C' \frac{\partial t}{\partial p} dp + C \frac{\partial t}{\partial v} dv. \quad (5)$$

Il importe d'observer que toutes les formules précédentes se rapportent au kilogramme; par exemple, v représente le *volume spécifique* du corps, c'est-à-dire le volume en mètres cubes de 1 kilogramme de ce corps.

4. **Diagramme de Clapeyron.** — L'étude des transformations successives que l'on peut faire subir à un corps est facilitée par la méthode graphique imaginée par Clapeyron pour représenter à chaque instant l'état d'un corps dont le volume spécifique est v et qui supporte une pression p .

Soient deux axes rectangulaires ov et op , l'un relatif aux volumes, et l'autre pour les pressions. A chaque état du corps correspond un couple de valeurs simultanées de v et de p fournissant un point figu-

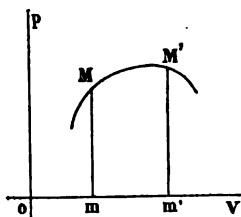


FIG. 519.

ratif M et un seul; et, lorsque ces quantités varient d'une manière continue, ce point se déplace en décrivant une certaine courbe MM' . Inversement, cette courbe étant tracée, la connaissance de l'une des coordonnées v d'un point M détermine la seconde p , et, par suite, la température t , puisque cette variable dépend de v et de p ; l'état du corps se trouve donc lui-même déterminé.

Lorsque dans la transformation que subit le corps la pression est maintenue constante, alors la ligne figurative devient

parallèle à ov ; au contraire, si c'est le volume qui ne varie pas, la ligne reste parallèle à op .

5. Adiabatiques et isothermiques. — Parmi les nombreuses transformations que peut subir un corps quelconque, deux surtout offrent de l'intérêt: ce sont les transformations sans variation de température, ou transformations isothermiques, et les transformations sans variation de chaleur, ou transformations adiabatiques. Les courbes isothermes et adiabatiques sont les lignes figuratives correspondantes.

Dans les gaz parfaits on a comme l'on sait :

$$\frac{p^n}{1 + \alpha t} = C^te,$$

et, lorsque la température t reste constante :

$$pv = K^2,$$

K^2 désignant également une constante; les lignes isothermes

sont donc des hyperboles équilatères AB rapportées à leurs asymptotes. Nous donnerons plus loin l'équation des lignes adiabatiques AD .

6. Mesure du travail extérieur. — Supposons que le corps en question éprouve une transformation élémentaire augmentant son volume de dv et la pression de dp ; alors le point figuratif M_1 du second état est très voisin de M , et l'on a $mm_1 = dv$, $M_1D = dp$. Le travail élémentaire extérieur correspondant $d\bar{w} = p dv$ est représenté par l'aire du trapèze Mmm_1M_1 , auquel on peut substituer le rectangle Mmm_1D .

Pour une transformation finie augmentant le volume de Δv et la pression de Δp , le

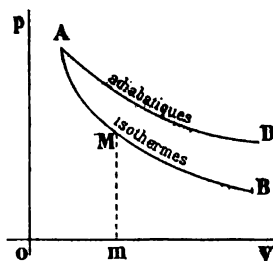


FIG. 520.

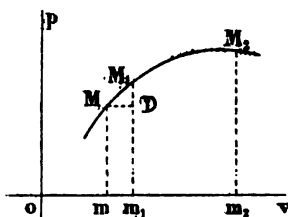


FIG. 521.

travail extérieur est représenté par l'aire du trapèze curviligne Mmm_2M_2 . On convient de regarder ce travail comme positif lorsque le point m se déplace dans le sens ov , c'est-à-dire lorsqu'il y a dilatation du corps; comme négatif, si le déplacement a lieu dans le sens mo , c'est-à-dire quand il y a contraction.

Dans le premier cas, on a donc :

$$\mathcal{C} = + \text{aire } Mmm_2M_2,$$

et dans le second :

$$\mathcal{C} = - \text{aire } M_2m_2mM.$$

7. Cycle. — Lorsque, après avoir subi une série de transformations successives, le corps repasse par le même état, c'est-à-dire reprend le même volume, la même pression et, par conséquent, la même température, on dit qu'il a parcouru un cycle. Il est évident, d'après ce qui précède, que la ligne figurative correspondante est une courbe fermée, puisque les valeurs initiale et finale de p et v sont les mêmes.

Supposons qu'une première série de transformations fasse passer le point figuratif de A en B et qu'une seconde série le ramène en A. Le travail extérieur est d'abord représenté par l'aire positive AabBMA, puis par l'aire négative $- BbaANB$; on a donc pour le travail total :

$$\mathcal{C} = \text{aire } AabBMA - \text{aire } BbaANB = \text{aire } AMBNA,$$

c'est-à-dire que le travail extérieur est précisément représenté par l'aire hachurée, limitée par la courbe représentative du cycle.

On dit qu'un cycle fermé est *réversible* quand il peut être parcouru indifféremment dans un sens ou dans l'autre; au-

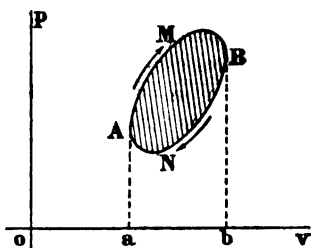


FIG. 522.

tremement dit, lorsque les transformations successives qui font décrire au point figuratif le cycle peuvent se suivre dans un certain ordre et aussi dans l'ordre inverse. Le cycle est direct quand il est parcouru dans le sens AMBN, qui correspond à un travail accompli; au contraire, il est inverse lorsque le point se déplace dans le sens ANBM, qui correspond à un travail reçu, lequel travail provient d'agents extérieurs.

Suivant que le cycle est direct ou inverse, l'appareil qui le produit constitue une machine thermique transformant la chaleur en travail, ou une machine transformant le travail en chaleur.

Ajoutons dès maintenant que dans tout moteur thermique le cycle des transformations qu'il est nécessaire de faire subir à un corps pour transformer de la chaleur en travail avec rendement maximum est un cycle réversible.

8. Températures absolues. — Pour la compréhension de ce qui va suivre, nous rappellerons ce qu'il faut entendre par températures absolues.

On sait par la physique que, si l'on appelle p_0 la pression d'une masse de gaz à 0 degré, p sa pression à la température t , α le coefficient de dilatation des gaz, on a :

$$p = p_0(1 + \alpha t);$$

mais l'expérience montre que $\alpha = \frac{1}{273}$; par suite :

$$p = \alpha p_0(273 + t);$$

si donc on pose :

$$273 + t = T,$$

il vient :

$$p = p_0 \alpha T;$$

T est ce que l'on nomme la température absolue du gaz; on voit que c'est sa température centigrade augmentée de 273°, ou encore sa température comptée à partir de 273° au-dessous de zéro. Cette nouvelle origine des températures, située à 273° au-dessous de celle de la glace fondante, est le *zéro absolu*.

Quelques physiciens, guidés par certaines considérations d'ordre spéculatif, ont cru pouvoir affirmer qu'à la température de zéro absolu toute chaleur disparaissait, ainsi que la force élastique du gaz ; il ne faut voir là qu'une hypothèse gratuite ne gênant d'ailleurs en rien nos définitions.

9. Machines thermiques. — Principe de Carnot. — On donne le nom de moteurs thermiques aux machines qui, comme celles à vapeur, ou bien celles à gaz, ou encore les machines à air chaud, produisent du travail par dépense de calorique.

Dans tout moteur à vapeur, on sait que la chaleur produite par le combustible du foyer dilate la vapeur d'eau de la chaudière en lui faisant acquérir une certaine tension qui provoque, à son tour, la marche en avant du piston mobile d'un cylindre ; cette course en avant est suivie d'une course en arrière égale, obtenue en diminuant la pression du fluide au contact d'un réfrigérant.

Soit Q_1 le nombre de calories cédées par le foyer, Q_2 le nombre repris par le réfrigérant ; la quantité de chaleur dépensée à la fin d'une évolution est représentée par $Q_1 - Q_2$, et c'est précisément ce calorique disparu que l'on retrouve sous forme de travail dans le mouvement du piston.

Dès 1824, Carnot, assimilant une machine à vapeur à une machine hydraulique et une différence de température entre deux corps à une différence de niveau entre deux biefs d'un canal, posa d'abord en principe que, *dans toute machine thermique, quelle qu'elle soit, il ne peut y avoir travail produit que s'il existe une différence de température entre deux des organes de la machine.*

Poursuivant ensuite ses recherches, Carnot évalua, aussi exactement qu'il le put, les quantités de travail \mathcal{E} fournies par différentes machines, ainsi que les quantités de chaleur correspondantes Q_1 cédées par le foyer ; il constata alors que le rapport $\frac{\mathcal{E}}{Q_1}$ restait sensiblement constant lorsque les moteurs fonctionnaient entre les mêmes limites de température..

Comme on a :

$$\mathcal{E} = 425(Q_1 - Q_2), \quad (\alpha)$$

il en résulte :

$$\frac{\tau}{423Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1};$$

ce dernier quotient est ce qu'on appelle le *rendement* de la machine, ou son *coefficient économique*. Les expériences de Carnot ont donc montré *que le coefficient économique est le même pour toutes les machines thermiques, quelles qu'elles soient, fonctionnant dans les mêmes limites de température.*

10. Cycle de Carnot. — Parmi tous les cycles que l'on peut faire décrire à un corps, la masse de vapeur contenue dans une chaudière par exemple, pour transformer de la chaleur en travail, celui de Carnot est particulièrement remarquable à cause de ses propriétés. Ce cycle est formé de deux segments AB et CD d'isothermes réunis par deux autres segments BC et DA d'adiabatiques; il est entièrement réversible et son rendement est maximum.

Le fluide prend d'abord de la chaleur au foyer à une température T_1 , puis se détend en conservant cette température un certain temps et en transformant une partie de sa chaleur en travail; à cette première phase correspond le segment d'isotherme AB.

La détente de la vapeur continuant sans prise ni perte de calorique, la température doit nécessairement s'abaisser et descendre, par exemple, jusqu'en T_2 ; cette seconde phase est figurée par le segment d'adiabatique BC.

Mais, la vapeur se contractant au contact du réfrigérant, la compression réduit son volume, tout en lui conservant un certain temps la température T_2 ; cette troisième phase est représentée par l'isotherme CD.

Enfin, la compression se poursuivant jusqu'à ce que la vapeur ait repris son volume initial, le travail correspondant à cette compression renaît sous forme de chaleur par une élévation de la température jusqu'en T_1 ; à cette dernière phase correspond la portion d'adiabatique DA qui ferme le cycle, après que le corps est revenu à son état primitif.

On voit que, dans le cycle de Carnot, la masse de vapeur évolue entre la température T_1 du foyer et celle T_2 du réfri-

gérant, en subissant alternativement deux détente et deux compressions. On pourrait établir la réversibilité de ce cycle en considérant la série des transformations inverses faisant

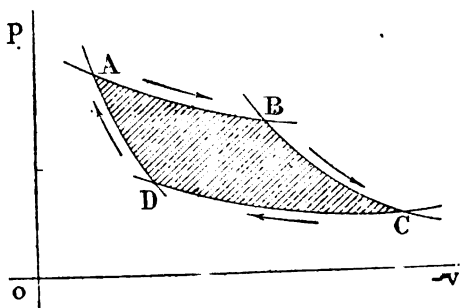


FIG. 523.

décrire au point figuratif le même contour, mais dans le sens ADCB; l'élévation de température serait remplacée par un abaissement, la transformation de chaleur en travail par une transformation de travail en chaleur. On a un exemple de machine thermique réversible dans la locomotive, qui décrit un cycle direct lors de la marche en avant, et un cycle inverse pendant la marche à contre-vapeur.

Rendement. — Le cycle de Carnot étant maintenant défini, il ne reste plus qu'à déterminer son rendement, c'est-à-dire la valeur du coefficient économique, que nous savons d'ailleurs être le même pour toutes les machines thermiques, quel que soit le fluide employé, pourvu que les températures extrêmes T_1 et T_2 restent les mêmes.

Pour effectuer cette détermination, on choisit ordinairement l'hydrogène, dont les variations suivent assez bien la formule (5) :

$$\frac{pv}{1 + \alpha t} = p_0 v_0.$$

On a d'abord :

$$\frac{pv}{p_0 v_0} = 1 + \alpha t = 1 + \frac{t}{273} = \frac{273 + t}{273} = \frac{T}{273};$$

d'où :

$$pv = \frac{p_0 v_0}{273} T,$$

ce que l'on peut écrire, en posant $R = \frac{p_0 v_0}{273}$,

$$pv = RT. \quad (m)$$

Cette dernière équation permet de calculer les dérivées partielles de T par rapport à p et à v , on obtient :

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v}{R}, \quad \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{p}{R},$$

et, si l'on introduit ces quantités dans l'équation (5) (3), elle devient :

$$dQ = C' \frac{v}{R} dp + C \frac{p}{R} dv,$$

ou encore, en tenant compte de (m),

$$\frac{dQ}{T} = C' \frac{dp}{p} + C \frac{dv}{v}.$$

Or l'expérience montre que, pour l'hydrogène, les quantités C' et C ne dépendent pas de p et de v ; ceci revient à dire que le second membre de l'équation est une différentielle totale exacte, qui donne dès lors par intégration :

$$\int \frac{dQ}{T} = C' Lp + CLv.$$

Le cycle des transformations étant fermé, les valeurs initiale et finale de p et de v sont les mêmes; donc l'intégrale $\int \frac{dQ}{T}$ étendue à tout le cycle ABCD est nulle, c'est-à-dire que l'on a :

$$\int_{ABCD} \frac{dQ}{T} = 0.$$

Décomposons cette intégrale en ses éléments ; on observe d'abord que :

$$\int_{BC} \frac{dQ}{T} = \int_{DA} \frac{dQ}{T} = 0,$$

puisque tout le long d'une adiabatique $dQ = 0$. On a ensuite :

$$\int_{AB} \frac{dQ}{T} = \frac{Q_1}{T_1}, \quad \int_{CD} \frac{dQ}{T} = -\frac{Q_2}{T_2},$$

car, le long de AB, la température absolue reste constante et égale à T_1 ; de même, le long de CD, elle égale T_2 .

On a donc au total :

$$\int_{ABCD} \frac{dQ}{T} = \int_{AB} \frac{dQ}{T} + \int_{CD} \frac{dQ}{T} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

La dernière de ces équations montre que les quantités de chaleur cédées par le foyer et reprises par le réfrigérant sont respectivement proportionnelles à leurs températures absolues. La même équation donne aussi :

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (\beta)$$

ce qui prouve que le coefficient économique d'une machine thermique, fonctionnant suivant le cycle de Carnot, a pour expression le quotient de la différence $T_1 - T_2$ des températures absolues du foyer et du réfrigérant par la température T_1 du foyer.

En désignant par ρ ce coefficient, on pourra écrire d'après la relation (α) :

$$\epsilon = 425\rho Q_1. \quad (\alpha')$$

Pour une machine à condensation fonctionnant à 6 atmosphères, entre les limites de température : $T_1 = 273^\circ + 160^\circ$ et $T_2 = 273^\circ + 40^\circ$, le coefficient ρ est voisin de 0,28.

La différence $1 - \rho$ exprime une perte obligée de chaleur,

perte qu'aucune combinaison ne saurait prévenir, et sans laquelle d'ailleurs le cycle ne pourrait exister.

Pour démontrer que le rendement du cycle est maximum, traçons en *abcd* un cycle quelconque tangent intérieurement à celui de Carnot. Dans les deux cycles, le corps évolue entre les mêmes limites de température T_1 et T_2 . Les lignes AB et CD sont les deux isothermes, BC et AD les deux adiabatiques.

En décomposant les deux cycles en cycles élémentaires par une série d'adiabatiques, au cycle élémentaire 1, 2, 3, 4 correspondra

le cycle 5, 6, 7, 8. La température diminue de *b* vers *c*, par suite la température t_1 en 5 est plus petite que T_1 , et la température t_2 en 8 est plus grande que T_2 . On a donc les inégalités :

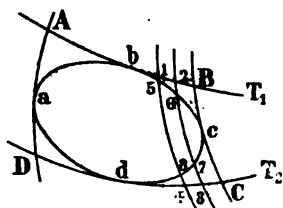


Fig. 524.

d'où

$$\frac{T_1}{T_2} > \frac{t_1}{t_2},$$

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} > \frac{t_1 - t_2}{t_1};$$

c'est-à-dire que le coefficient économique est plus grand pour le cycle élémentaire de Carnot que pour le cycle quelconque. Et, comme la même inégalité subsiste pour tous les cycles élémentaires inscrits, elle est encore vraie pour les deux cycles complets considérés.

11. Cycle des machines à vapeur. — Le cycle de Carnot se rapproche sensiblement du cycle réellement décrit par la vapeur dans les machines à détente et condensation. La vapeur est d'abord introduite dans le cylindre à la température constante de la chaudière et pendant une fraction de la course du piston; puis elle se détend jusqu'à la fin de la course. La détente serait complète si la vapeur humide était ainsi amenée à la température et à la pression du condenseur; elle serait adiabatique sans les pertes de chaleur par les parois du cylindre et les tuyaux de vapeur.

Lorsque le piston arrive au bout de sa course, la communication s'établit avec le condenseur, qui sert de réfrigérant; le piston, revenant ensuite en arrière, refoule le fluide à une température et à une pression constantes, lesquelles diffèrent très peu de celles du condenseur. Mais ici le fonctionnement du système ne comporte pas la quatrième phase du cycle de

Carnot. Toutefois il importe de tenir compte de la compression de la vapeur dans le cylindre à la fin de l'échappement, et du refoulement de la pompe, qui doit renvoyer à la chaudière un poids d'eau égal à celui du fluide qui a travaillé.

L'existence des espaces nuisibles, les rentrées d'air, les fuites, l'avance à l'évacuation, les chutes de pression à l'admission et à l'échappement, sont autant de causes qui altèrent le cycle effectif de la vapeur par rapport à celui de Carnot, sans toutefois que la différence des deux cycles soit considérable.

Le cycle de Carnot n'est pas le seul qui jouisse de la propriété du rendement maximum; le même résultat peut être obtenu par un grand nombre de cycles; il suffit, pour cela, qu'ils soient réversibles, que les échanges de chaleur des sources se fassent à la même température, et, en outre, que les opérations par lesquelles s'effectue le passage d'une source à l'autre se succèdent de façon que le calorique fourni par l'une soit suffisant pour l'accomplissement de la seconde.

On apprécie la valeur économique d'un cycle donné en comparant son rendement à celui du cycle de Carnot, entre les mêmes limites de température.

12. Rendement pratique. — Dans une machine thermique, le rendement théorique du cycle suivant lequel elle fonctionne n'est jamais intégralement obtenu; le générateur occasionne une perte plus ou moins forte, les résistances passives absorbent toujours une certaine portion du travail écarté transmis au piston, de sorte que le travail réellement utilisable sur l'arbre de couche n'est qu'une fraction du travail disponible sur le piston; le rapport de ces deux quantités est le rendement pratique du moteur.

On peut d'abord considérer le rapport ρ' du travail du piston mesuré à l'indicateur de Watt au travail théorique correspondant au cycle décrit. Ce rapport constitue le rendement spécifique du générateur; il est d'autant plus voisin de l'unité que le cycle décrit diffère moins de celui de Carnot et que les pertes ci-dessus rappelées se trouvent diminuées. En désignant par \mathcal{C}' et \mathcal{C} les travaux en question, on a :

$$\mathcal{C}' = \rho' \mathcal{C}.$$

Le rapport ρ' reste ordinairement compris entre 0,30 et 0,60; mais cette dernière valeur ne s'applique qu'aux générateurs perfectionnés de grande puissance.

La différence $\rho - \rho'$ représente une perte de chaleur que le perfectionnement complet de la machine, s'il était possible, ferait disparaître.

On peut ensuite considérer le rapport ρ' du travail disponible sur l'arbre de couche et mesuré au frein de Prony au travail développé sur le piston; ce rapport constitue le rendement pratique de la machine. En appelant \mathcal{C}' le premier travail, on a :

$$\mathcal{C}' = \rho' \mathcal{C},$$

d'où l'on déduit, en tenant compte de (α') et (γ) :

$$\mathcal{C}' = 425 \rho \rho' Q_1. \quad (\alpha')$$

Dans les machines très perfectionnées, le rendement ρ' peut atteindre 0,85 et même 0,90.

Enfin, au point de vue économique, l'élément caractéristique du moteur, celui que l'acquéreur a surtout intérêt à connaître, est la consommation de charbon par heure et par cheval disponible sur l'arbre de couche; c'est ce qu'on appelle le rendement industriel.

En appelant ρ_1 le rendement du fourneau, c'est-à-dire le rapport de la chaleur utilisée par la chaudière à la chaleur totale produite par le foyer, rendement qui peut atteindre 0,85, et désignant par C le pouvoir calorifique du combustible employé, par N le rendement industriel, on a la relation :

$$425 C N \rho_1 \rho \rho' = 75 \times 3600,$$

d'où l'on déduit :

$$N = \frac{75 \times 3600}{425 C \rho_1 \rho \rho'}.$$

Avec une bonne houille fournissant 7.000 calories par kilogramme, et en prenant pour les divers rendements les valeurs maxima :

$$\rho_1 = 0,85, \quad \rho = 0,28, \quad \rho' = 0,60, \quad \rho'' = 0,90,$$

on obtient :

$$N = \frac{75 \times 3600}{425 \times 7000 \times 0,85 \times 0,28 \times 0,60 \times 0,90},$$

soit environ 700 grammes de combustible par heure et par cheval sur l'arbre de couche. En réalité, dans les moteurs très perfectionnés, on arrive à 900 grammes et exceptionnellement à 800 grammes.

PROBLÈME. — *Supposons que la masse de vapeur contenue dans un générateur reçoive du foyer une quantité de chaleur représentée par 800 calories, et que les températures respectives du foyer et du réfrigérant soient de 160° et 40°.*

Proposons-nous de déterminer la quantité de chaleur reprise par le réfrigérant, ainsi que le travail extérieur développé.

Les données du problème sont :

$Q_1 = 800 \text{ cal.}$, $T_1 = 273 + 160 = 433^\circ$, $T_2 = 273 + 40 = 313^\circ$
et la formule (β) donne :

$$\frac{800 - Q_2}{800} = \frac{120}{433},$$

on en déduit pour la chaleur cédée au réfrigérant :

$$Q_2 = \frac{(433 - 120) 800}{433} = 579 \text{ calories.}$$

Le calorique absorbé par le travail extérieur est évidemment égal à :

$$800 - 579 = 221 \text{ calories;}$$

l'expression de ce travail en kilogrammètres est, par suite, d'après la formule (α) :

$$\mathcal{C} = 425 \times 221 = 93.925 \text{ kilogrammètres.}$$

CHAPITRE II

GAZ PARFAITS

13. Lois de Mariotte et de Gay-Lussac. — La loi qui régit les variations réciproques du volume et de la pression d'une masse gazeuse, lorsque la température reste constante, a été déduite de l'expérience par Mariotte; elle s'énonce :

Les volumes d'une masse gazeuse sont inversement proportionnels aux pressions qu'elle supporte, pourvu que la température reste constante.

Si donc on appelle v_0 et v les volumes de la masse de gaz considérée, à la même température, mais sous les pressions p_0 et p , on a :

$$\frac{v}{v_0} = \frac{p_0}{p}; \quad \text{d'où} \quad vp = v_0 p_0;$$

telle est l'expression de la loi de Mariotte.

En étudiant expérimentalement le problème des dilata-tions, Gay-Lussac a été conduit à admettre que *tous les gaz ont même coefficient de dilatation, quelle que soit la pression qu'ils supportent*. Ce coefficient est d'ailleurs égal à :

$$\frac{1}{273} = 0,00367.$$

A vrai dire, et comme l'ont prouvé les expériences plus récentes de Regnault, les lois de Mariotte et de Gay-Lussac ne s'appliquent qu'approximativement aux gaz naturels; l'écart, encore peu considérable pour l'hydrogène, l'oxygène, l'azote, l'air, augmente rapidement pour les gaz, tels que l'acide carbonique, plus rapprochés de leur point de liquéfaction.

Les lois précédentes permettent d'établir pour les *gaz parfaits*, c'est-à-dire obéissant exactement à ces lois, la forme

de la fonction $f(v, p, t) = 0$ liant entre elles les quantités v, p, t , qui déterminent l'état d'un corps quelconque.

Appelons en effet : v_0 , le volumespécifique de la masse de gaz à 0° ; v , ce volume à t° ; α , le coefficient de dilatation. En supposant d'abord que la température reste égale à 0° , lorsque la pression devient égale à p , le volume du gaz passe de v_0 à v_1 , et l'on doit avoir :

$$v_1 p = v_0 p_0.$$

Mais, la pression conservant la valeur p et la température devenant égale à t° , on a aussi :

$$v = v_1 (1 + \alpha t),$$

le coefficient α ayant toujours la même valeur, quel que soit p . Si l'on élimine v_1 entre ces deux équations, on obtient la relation cherchée :

$$\frac{pv}{1 + \alpha t} = p_0 v_0,$$

que l'on met souvent sous la forme :

$$pv = RT, \quad \left\{ \begin{array}{l} R = \frac{p_0 v_0}{273}, \\ T = 273 + t; \end{array} \right.$$

p est la pression exprimée en kilogrammes par mètre carré de surface, soit 10.334 kilogrammes par atmosphère; R , une quantité constante pour un même gaz, mais variable avec le gaz considéré.

NOMS DES GAZ	VOLUME SPÉCIFIQUE v	R	C'	POIDS du MÈTRE CUBE
	me. ht.			kg. g.
Air atmosphérique	0,781	29,5	0,168	1,293
Azote	0,796	30,1	0,173	1,256
Oxygène	0,699	26,5	0,155	1,430
Hydrogène	11,160	422,6	2,412	0,0896
Acide carbonique	0,506	19,1	0,112	1,977
Gaz d'éclairage (en moyenne).	1,887	71,4	0,418	0,530

Le tableau ci-dessus donne pour les gaz usuels, pris à la température de 0° et sous la pression de 760 millimètres de mercure, les valeurs du volume spécifique v , du coefficient R , et de la chaleur spécifique C sous volume constant, ainsi que les poids du mètre cube.

14. Formules relatives aux gaz. — Lorsqu'un corps solide ou liquide se dilate sous l'action de la chaleur, une fraction du calorique absorbé est employée à l'intérieur pour modifier la disposition de ses molécules; une autre fraction sert à élever sa température.

Dans les gaz parfaits, le travail intérieur est constamment nul et l'énergie interne U dépend uniquement de la température; c'est là un fait important entrevu déjà par Gay-Lussac, mais démontré depuis par les remarquables expériences de Joule et de sir W. Thomson.

Ainsi, pour les gaz parfaits, on peut poser simplement :

$$U = \varphi_1(t),$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial U}{\partial v} = 0;$$

mais, d'autre part :

$$v = \frac{RT}{p} = \frac{R(273 + t)}{p},$$

d'où, par différentiation,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{R}{p}, \quad \frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{RT}{p^2},$$

et par suite :

$$Ap \frac{\partial v}{\partial t} = AR;$$

donc [3-(a)] :

$$C = \frac{\partial U}{\partial t} + AR = C' + AR,$$

ou encore :

$$C = C' \left(1 + \frac{AR}{C'} \right).$$

Or on peut observer que B et C' varient tous deux avec

le gaz considéré en raison inverse de la densité; par conséquent, le rapport $\frac{R}{C'}$ reste le même pour tous les gaz, ainsi que la quantité $1 + \frac{AR}{C'} = k$; la chaleur spécifique sous pression constante s'exprime donc simplement par kC' .

L'expérience a donné pour k la valeur moyenne 1,41. On en déduit :

$$AR = C'(k - 1) = \frac{2}{5} C' \text{ environ.}$$

Calculons maintenant les quantités l et h . On trouve d'abord :

$$l = Ap,$$

puis :

$$h = Ap \frac{\partial v}{\partial p} = - \frac{ART}{p} = - Av,$$

et les équations (3) et (4) deviennent :

$$\begin{aligned} dQ &= Apdv + C'dt, \\ dQ &= - Avdp + Cdt; \end{aligned}$$

la première donne par intégration entre les températures t_0 et t :

$$Q = C'(t - t_0) + A \int_{v_0}^v p dv.$$

Lorsque l'échauffement a lieu sous volume constant, $dv = 0$, et il reste :

$$Q = C'(t - t_0). \quad (i)$$

La seconde des équations différentielles donne de même, par intégration, pour un échauffement sous pression constante, $dp = 0$,

$$Q = C(t - t_0).$$

Enfin, l'application de la formule (5) conduit à la relation différentielle :

$$dQ = C' \frac{v}{R} dp + C \frac{p}{R} dv, \quad (5')$$

déjà établie au paragraphe 3.

15. Entropie. — L'équation (5') s'écrit en chassant le dénominateur :

$$RdQ = Cp dv + C' v dp;$$

si on divise par $RT = pv$, il vient en posant $C = kC'$:

$$\frac{dQ}{T} = C' \left(\frac{dp}{p} + \frac{C}{C'} \frac{dv}{v} \right) = C' \left(\frac{dp}{p} + k \frac{dv}{v} \right).$$

L'intégration donne :

$$\int \frac{dQ}{T} = C' L pv^k.$$

Cette fonction $\int \frac{dQ}{T}$ des variables p et v , qui ne dépend que des valeurs extrêmes de l'évolution et nullement des états intermédiaires par lesquels a pu passer le corps, a été désignée par Clausius sous le nom d'entropie.

Intégrant entre les limites $p_0 v_0$ et pv , on obtient pour un cycle quelconque :

$$\int \frac{dQ}{T} = C' L \frac{pv^k}{p_0 v_0^k}.$$

Or, pour un cycle fermé, $p_0 v_0 = pv$; donc on a pour ce cycle :

$$\int \frac{dQ}{T} = C' L . 1 = 0.$$

Cette équation, indiquée par Clausius, démontre que, pour les gaz parfaits évoluant suivant un cycle fermé quelconque, l'entropie est nulle. Nous avons trouvé le même résultat en calculant le rendement du cycle de Carnot.

PROBLÈME. — *Considérons une masse d'oxygène pesant 3 kilogrammes à la température de 30° et sous la pression de 1,5 atmosphère ; proposons-nous de calculer ce que deviennent sa température et sa pression lorsqu'on lui enlève 50 calories, le volume demeurant constant.*

La température inconnue se détermine par la formule (i) ; mais il importe d'observer que cette formule se rapporte au kilogramme, et que, pour un poids P , on a :

$$Q = PC'(t - t_0).$$

Dans notre cas :

$$P = 3 \text{ kilogrammes, } t = 30^{\circ}, \quad Q = 50 \text{ calories;}$$

le tableau du numéro 13 montre que, pour l'oxygène, $C' = 0,155$; par suite :

$$50 = 3 \times 0,155 (30^{\circ} - t_0).$$

Cette équation donne pour t_0 :

$$t_0 = 30^{\circ} - \frac{50}{3 \times 0,155} = -77^{\circ}.$$

Pour déterminer la nouvelle pression p_0 , on part de l'équation :

$$\frac{p}{1 + \alpha t} = \frac{p_0}{1 + \alpha t_0},$$

qui devient avec les données du problème et la valeur trouvée pour t_0 :

$$p_0 = p \frac{1 + \alpha t_0}{1 + \alpha t} = 1^{m},5 \times \frac{273^{\circ} - 77^{\circ}}{273^{\circ} + 30^{\circ}};$$

effectuant les calculs, on obtient enfin :

$$p_0 = 0^{m},97.$$

16. Détente adiabatique. — L'équation des lignes adiabatiques se déduit très simplement de la formule (5') en y faisant $dQ = 0$, puisque dans cette transformation la chaleur Q reste constante. On trouve :

$$C'vdp + Cp dv = 0,$$

ce que l'on peut écrire, en séparant les variables,

$$\frac{dp}{p} + k \frac{dv}{v} = 0, \quad k = \frac{C}{C'} = 1,44;$$

l'intégration donne immédiatement :

$$Lp + Lv^k = L \cdot pv^k = C^{1k},$$

ou encore :

$$pv^k = C^{1k}.$$

Cette équation, indiquée déjà par Laplace, mais plus connue sous le nom d'équation de Poisson, représente une famille de courbes AD (fig. 520) à forme hyperbolique (5).

Au lieu de considérer le volume v du gaz, on peut introduire sa densité ρ ; comme à poids égal le volume varie en raison inverse de la densité, on a :

$$v = \frac{m}{\rho},$$

m désignant une constante. Si l'on remplace v par cette valeur dans l'équation précédente, on obtient, en appelant h la constante du second membre :

$$v \frac{m^k}{\rho^k} = h, \quad \text{d'où} \quad p = \frac{h}{m^k} \rho^k,$$

équation de la forme :

$$p = K \rho^k.$$

Toute détente adiabatique, sans perte ni gain de chaleur, est évidemment accompagnée d'un abaissement de température ; si la masse de gaz passe de l'état p_0, v_0 , à l'état p, v , ou a d'après la formule de Poisson :

$$p_0 v_0^k = p v^k,$$

et aussi, en appelant T_0 et T les températures absolues correspondantes :

$$p_0 v_0 = R T_0, \quad p v = R T ;$$

divisant ces dernières équations membre à membre et tenant compte de la précédente, on obtient :

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{v_0}{v} \right)^{k-1} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}}. \quad (\gamma)$$

Pour calculer le travail extérieur développé par la détente, on part de la relation :

$$\mathfrak{E} = \int_{v_0}^v p dv = p_0 v_0^k \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^k} ;$$

l'intégration donne :

$$\mathfrak{E} = \frac{p_0 v_0^k}{k-1} \left(\frac{1}{v_0^{k-1}} - \frac{1}{v^{k-1}} \right),$$

expression que l'on peut mettre sous la forme :

$$\mathcal{E} = \frac{p_0 v_0}{k-1} \left[1 - \left(\frac{v_0}{v} \right)^{k-1} \right] = \frac{RT_0}{k-1} \left[1 - \left(\frac{v_0}{v} \right)^{k-1} \right] \cdot (k-1=0,41).$$

Si l'on désire exprimer ce travail en fonction des pressions, il suffit d'utiliser la relation (γ) pour obtenir immédiatement :

$$\mathcal{E} = \frac{RT_0}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \cdot \left(\frac{k-1}{k} = 0,29. \right)$$

PROBLÈME. — Calculer le travail produit dans une détente adiabatique de 4 mètres cubes d'air, pris à la température de 23°, partant de 5 atmosphères et tombant à la pression atmosphérique.

Les formules précédentes se rapportant au kilogramme, il est nécessaire d'évaluer le poids de la masse d'air; or celui d'un volume V de gaz de densité d , à la température t et sous la pression H , est, d'après la physique,

$$P = V \times 1,293 \times d \times \frac{H}{760} \times \frac{1}{1 + \alpha t};$$

dans notre cas :

$$V = 4, \quad d = 1, \quad \frac{H}{760} = 5, \quad t = 25^\circ, \quad T_0 = 273 + 25^\circ;$$

par suite, le poids cherché a pour valeur en kilogrammes :

$$P = 4 \times 1,293 \times 5 \times \frac{273}{T_0}.$$

L'expression du travail produit par la détente étant :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{PRT_0}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \\ &= \frac{4 \times 1,293 \times 5 \times 273}{T} RT_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right], \end{aligned}$$

il ne reste plus qu'à évaluer RT_0 , car $\frac{p}{p_0} = \frac{1}{5}$ et $\frac{k-1}{k} = 0,29$.

On a $RT_0 = p_0 v_0$, p_0 et v_0 désignant la pression et le volume spécifique du kilogramme à 23°; mais :

$$p_0 = 5 \times 10,331 \text{ kilogrammes,}$$

et d'après la valeur de ϕ :

$$v_0 = \frac{T_0}{1,293 \times 273};$$

donc :

$$p_0 v_0 = \frac{5 \times 10334 \times T_0}{1,293 \times 273}.$$

On a enfin :

$$\mathcal{C} = \frac{4 \times 1,293 \times 5 \times 273}{T_0 \times 0,41} \times \frac{5 \times 10334 \times T_0}{1,293 \times 273} \left[1 - \left(\frac{1}{5} \right)^{0,29} \right]$$

ou, en simplifiant et effectuant les calculs à l'aide de la table XX,

$$\mathcal{C} = \frac{4 \times 5 \times 10334}{0,41} \times 0,374 = 189032 \text{ kilogrammètres.}$$

17. Détente isothermique. — Lorsqu'une pareille détente est réalisée, il y a nécessairement égalité entre le calorique reçu par la masse de gaz et celui qu'absorbe le travail extérieur. L'évaluation de ce travail se fait d'ailleurs comme pour la détente adiabatique.

On a d'abord :

$$pv = C^{\text{te}},$$

ce qui fournit par différentiation :

$$p dv + v dp = 0.$$

L'équation (5') donne ensuite avec cette relation :

$$dQ = (C - C') \frac{p dv}{R} = A p dv,$$

ou encore :

$$dQ = ART \frac{dv}{v},$$

puisque :

$$C - C' = AR, \quad pv = RT.$$

Intégrant entre les limites v_0 et v , on obtient :

$$Q = ART \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = ART \cdot L \cdot \frac{v}{v_0},$$

ou encore, en fonction des pressions p_0 et p ,

$$Q = \text{ART. L } \frac{p_0}{p}.$$

Comme $Q = A\mathfrak{E}$, on en déduit:

$$\mathfrak{E} = \text{RT. L } \frac{v}{v_0} = \text{RT. L } \frac{p_0}{p}.$$

Il importe d'observer que ces formules se rapportent au kilogramme de gaz ; pour un poids P , il faudrait affecter les seconds membres de ce facteur.

PROBLÈME. — *Calculer le travail disponible dans une détente isothermique de 1 mètre cube d'air à la température de 20°, partant de 10 atmosphères et tombant à un seul.*

On trouve, comme au problème précédent,

$$\mathfrak{E} = 10 \times 10334 \times \text{L}10 = 237928 \text{ kilogrammètres.}$$

La table XVIII donne pour le logarithme népérien de 10 : $2,292 + 0,010 = 2,302$.

CHAPITRE III

VAPEURS SATURÉES

18. On donne le nom de *vapeurs* aux fluides qui se dégagent d'une masse liquide que l'on chauffe. Ces vapeurs, placées d'ailleurs dans certaines conditions favorables, reprennent l'état liquide.

L'expérience montre qu'au point de vue des propriétés physiques des vapeurs, deux cas nettement distincts doivent être considérés :

Quand la vapeur n'est pas en présence du liquide qui lui a donné naissance, on dit qu'elle est *surchauffée* ; elle se comporte alors comme un gaz permanent, sauf cependant au voisinage du point de saturation.

Lorsque la vapeur est en présence du liquide générateur, on dit qu'elle est *saturée* ; dans ce dernier cas, la force élastique de la vapeur est indépendante de son volume et dépend uniquement de la température, c'est sa *tension maxima*.

Avant de poursuivre l'étude des vapeurs saturées, nous dirons deux mots de la vapeur d'eau surchauffée.

19. *Vapeur d'eau surchauffée.* — Cette vapeur suit sensiblement les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, mais son coefficient de dilatation se rapproche de la valeur $\frac{1}{250} = 0,004$; on a donc :

$$pv = p_0v_0 (1 + \alpha t) = \frac{p_0v_0}{250} (250 + t),$$

ou

$$pv = R (250 + t), \quad \text{avec} \quad R = \frac{p_0v_0}{250} = 46,5.$$

A une température très élevée, on pourrait écrire comme pour les gaz parfaits :

$$pv = RT, \quad \text{avec} \quad R = 47.$$

Au voisinage du point de saturation, il faudrait poser :

$$pv = 33,59 (T + 127).$$

D'ailleurs :

$$C = 0,48, \quad C' = 0,369, \quad k = 1,36.$$

20. Tension maxima des vapeurs saturées. — Puisque cette tension p ne dépend que de la température t de la vapeur, on doit avoir en général :

$$p = f(t);$$

mais il importe de préciser la forme de la fonction f .

Pour la vapeur d'eau, lorsque la température reste comprise entre 97° et 230° , on peut adopter la formule approchée de Duperray :

$$\varphi = \theta^4,$$

φ représentant la pression en kilogrammes par centimètre carré, θ la température en centaines de degrés centigrades.

Pour des calculs précis, il est nécessaire d'utiliser la formule de Regnault :

$$\log F = a + bx^t + c\beta^t,$$

très approchée entre -33° et $+232^\circ$; F désigne une hauteur de mercure en millimètres; t , la température centigrade; a, b, c, α, β , des quantités constantes. Comme le terme $c\beta^t$ est toujours très petit par rapport à bx^t , on peut encore, sans erreur appréciable, poser plus simplement :

$$\log F = a + bx^t. \quad (1)$$

D'ailleurs, connaissant F , rien n'est plus facile que d'évaluer la pression p en kilogrammes par mètre carré; on a en effet :

$$\frac{p}{10334^{kg}} = \frac{F}{760^{mm}}, \quad \text{d'où} \quad p = F \frac{10334}{760} = 13,6F. \quad (2)$$

On trouvera dans les traités de physique les différentes valeurs de F pour la vapeur d'eau, la température t variant de -30° à $+230^\circ$.

Par exemple, à la température de 200° centigrades, on trouve :

$$F = 11689 \text{ millimètres,}$$

par suite :

$$p = 13,6 \times 11689 = 158970 \text{ kilogrammes.}$$

Dans certaines questions, il est non seulement nécessaire de connaître p en fonction de t , mais la dérivée $\frac{dp}{dt}$ elle-même est utile à considérer; le calcul de cette dérivée ne présente aucune difficulté; on trouve avec la formule (1) :

$$\frac{dF}{dt} = F (2,3026)^2 b \log \alpha . \alpha^t.$$

Les tables publiées par Zeuner, et que nous reproduisons en partie à la page 738 donnent à la fois les valeurs simultanées de F et $\frac{dF}{dt}$. On a ensuite à cause de (2) :

$$\frac{dp}{dt} = 13,6 \frac{dF}{dt}.$$

Pour l'exemple précédent, le tableau de Zeuner donne :

$$\frac{dF}{dt} = 243,438;$$

par suite :

$$\frac{dp}{dt} = 243,438 \times 13,6 = 3310^{\text{re}}, 756.$$

21. Densité des vapeurs. — La détermination des densités des vapeurs surchauffées a fait l'objet de nombreuses expériences exécutées par Gay-Lussac et reprises par Regnault.

Le tableau ci-dessous donne, d'après ces physiciens, les densités de quelques vapeurs à des températures déterminées; d'ailleurs les lois de Mariotte et de Gay-Lussac étant applicables à ces vapeurs, au moins approximativement, on peut en déduire les densités à des températures et pressions différentes.

DENSITÉS DES VAPEURS PAR RAPPORT A L'AIR		
VAPEURS	DENSITÉ	TEMPÉRATURES
Eau.....	0,622	100°
Ether.....	2,586	35 ,5
Alcool.....	1,614	78
Chloroforme.....	4,200	60 ,8
Benzine.....	2,77	92
Sulfure de carbone.....	2,645	48 ,2

Pour les vapeurs saturées qui ne suivent plus les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, l'expérience montre que les densités croissent avec la température et sont constamment supérieures à celles que l'on déduirait de l'application de ces lois.

Fairbairn et Tait ont déterminé la densité de la vapeur d'eau saturée sous des pressions croissantes produites par une élévation progressive de la température.

Le tableau ci-dessous donne les densités relatives à l'air, ainsi que les poids spécifiques correspondants du mètre cube ; ces derniers, δ , ont été calculés par la formule de Zeuner :

$$\delta = ap^{\frac{1}{n}}, \quad a = 0,6061, \quad \frac{1}{n} = 0,9393 ;$$

p est exprimé en atmosphères.

PRESSION en ATMOSPHÈRES	DENSITÉ RELATIVE à l'air de la vapeur d'eau saturée	POIDS du mètre cube de la vapeur d'eau saturée
0,1	0,621	0,0687
0,5	0,633	0,3153
1	0,640	0,6059
2	0,648	1,1631
5	0,662	2,7500
10	0,676	5,2703

22. Chaleur de vaporisation. — La chaleur totale de vaporisation des liquides à différentes températures a été déterminée par Despretz et Regnault; ce dernier a mesuré les quantités totales de chaleur L nécessaires pour transformer 1 kilogramme de liquide à 0° en vapeur à t° .

D'après Regnault, on aurait pour l'eau entre 0° et 200° :

$$L = 606,5 + 0,305t;$$

pour l'éther entre 0° et 120° :

$$L = 94 + 0,45t - 0,00035t^2.$$

Mais cette chaleur totale L égale la somme de la *chaleur du liquide* q , c'est-à-dire la chaleur nécessaire pour élever la température du liquide depuis 0° jusqu'à l'ébullition, et de la *chaleur latente de vaporisation* λ ; on a donc :

$$L = q + \lambda, \quad \text{d'où} \quad \lambda = L - q.$$

Les expériences de Regnault ont également porté sur la détermination de q , dont la connaissance avec L permet de calculer λ .

Pour l'eau, on aurait très sensiblement :

$$q = t + 0,00002t^2 + 0,0000003t^3,$$

d'où:

$$\lambda = 606,5 - 0,695t - 0,00002t^2 - 0,0000003t^3.$$

Pour l'éther, il faudrait poser :

$$q = 0,529t + 0,0002959t^2,$$

et :

$$\lambda = 94 - 0,079t - 0,000851t^2.$$

On voit que les chaleurs latentes de vaporisation vont en diminuant avec la température à laquelle les vapeurs se forment; la diminution est plus rapide dans chaque cas que l'augmentation correspondante de la chaleur totale L .

23. Formules relatives aux vapeurs saturées. — Puisque, pendant la durée de la vaporisation d'un liquide, la température et la pression restent invariables, on a évidemment

$dt = dp = 0$, de sorte que la première formule du numéro 3 se réduit à :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial v} dv,$$

ce qui donne pour la quantité de chaleur dépensée pendant la vaporisation :

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial v} + Ap \right) dv.$$

Si l'on intègre cette équation depuis le volume v' du liquide générateur jusqu'au volume v de la vapeur saturée produite, il vient, en observant que p reste constant et que la chaleur Q n'est autre chose que λ ,

$$\lambda = U_v - U_{v'} + Ap (v - v'),$$

ou :

$$\lambda = U + Apu \quad \left. \begin{array}{l} U = U_v - U_{v'}, \\ u = v - v'; \end{array} \right\}$$

U représente l'accroissement de la chaleur interne de la vapeur, c'est-à-dire la fraction de chaleur de vaporisation utilisée à augmenter sa chaleur intérieure.

Apu est l'équivalent calorifique du travail extérieur qui accompagne le changement de volume; v dépend de la température t ; v' , toujours très petit par rapport à v , reste sensiblement constant (pour l'eau à 0° : $v = 210,661$, $v' = 0,001$).

Dans les calculs pratiques, on néglige souvent v' en posant simplement $u = v$.

Outre les variables précédentes, il est encore utile, dans certains cas, de considérer ce que l'on appelle la *chaleur de la vapeur* R , c'est-à-dire la différence entre les quantités de chaleur que renferment 1 kilogramme de vapeur à t° et 1 kilogramme du liquide à 0° ; d'après ce que l'on a vu plus haut, on a évidemment $R = q + U$.

En résumé, les différentes variables de la question sont liées entre elles par les relations :

$$\begin{aligned} L &= q + U + Apu, \\ \lambda &= U + Apu, \\ R &= q + U. \end{aligned}$$

Les expressions de L et de q en fonction de la température t permettent de calculer ces quantités ainsi que λ ; les relations ci-dessus donnent ensuite les valeurs correspondantes de u , U , R . On peut d'ailleurs, lorsqu'il s'agit de la vapeur d'eau, utiliser le tableau ci-dessous, extrait de l'ouvrage de Zeuner.

TABLES DE ZEUNER (extraits)

Vapeur d'eau saturée

t	F	$\frac{dF}{dt}$	L	q	λ	Apu	u
0.....	4,690	0,3289	606,500	0,000	606,500	31,071	210,66
5.....	6,534	0,4503	608,025	5,000	603,025	31,475	150,23
10.....	9,165	0,6088	609,550	10,002	599,548	31,892	108,51
15.....	12,699	0,8132	611,075	15,005	596,070	32,318	79,346
20.....	17,391	1,0738	612,600	20,010	592,590	32,755	58,720
25.....	23,550	1,4022	614,125	25,017	589,108	33,201	43,963
30.....	31,548	1,8117	615,650	30,020	585,624	33,656	33,266
35.....	41,827	2,3171	617,175	35,037	582,138	34,119	25,436
40.....	54,906	2,9347	618,700	40,051	578,649	34,588	19,644
45.....	71,390	3,6825	620,225	45,068	575,157	35,064	15,315
50.....	91,980	4,5800	621,753	50,087	571,663	35,544	12,049
55.....	117,475	5,6484	623,275	55,110	568,165	36,027	9,5613
60.....	148,786	6,9100	624,800	60,137	564,663	36,512	7,6513
65.....	186,938	8,3891	626,325	65,167	561,158	36,996	6,1711
70.....	233,082	10,111	627,850	70,201	557,649	37,478	5,0139
75.....	288,500	12,104	629,375	75,239	554,136	37,955	4,1024
80.....	354,616	14,395	630,900	80,282	550,618	38,425	3,3789
85.....	433,002	17,017	632,425	85,329	547,096	38,885	2,8003
90.....	525,392	20,002	633,950	90,381	543,569	39,332	2,3344
95.....	633,692	23,388	635,475	95,438	540,037	39,762	1,9566
100.....	760,000	27,189	637,000	100,500	536,500	40,205	1,6496
110.....	1075,370	36,212	640,050	110,641	529,409	41,048	1,1903
120.....	1491,280	47,348	643,100	120,806	522,294	41,858	0,8752
130.....	2030,280	60,873	646,150	130,997	515,153	42,634	0,6548
140.....	2717,630	77,060	649,200	141,215	507,985	43,377	0,4977
150.....	3581,230	96,171	652,250	151,462	500,788	44,086	0,3839
200.....	11588,960	243,438	667,500	203,200	464,300	47,133	0,1257

24. Mélange de vapeur et de liquide. — Les formules précédentes se rapportent à la vapeur sèche, c'est-à-dire ne contenant aucune parcelle du liquide générateur. Dans la pratique, il n'en est jamais ainsi, et une certaine fraction du liquide se trouve toujours entraînée, de sorte que l'on opère sur un mélange de vapeur et de liquide. Ajoutons que la

fraction en question peut quelquefois atteindre 30 0/0 du poids de la vapeur.

Les formules relatives aux vapeurs humides se déduisent encore des équations générales établies dans le premier chapitre.

Si l'on appelle x le poids de vapeur contenu dans 1 kilogramme du mélange, la variation élémentaire de la chaleur interne U_1 de ce kilogramme, pour un changement d'état infiniment petit, est :

$$dU_1 = dq + d(Ux) = Cdt + d(Ux).$$

Intégrant et tenant compte des relations du dernier paragraphe, il vient pour un changement d'état fini :

$$U_1 = Ct + (\lambda - Apu) x. \quad (3)$$

La quantité de chaleur dQ nécessaire pour opérer la transformation élémentaire du mélange a pour expression :

$$dQ = \left(C + x \frac{d\lambda}{dt} - x \frac{\lambda}{T} \right) dt + \lambda dx.$$

Enfin, la chaleur correspondante au travail extérieur est la différence des précédentes, ou :

$$dQ - dU_1 = \left(x \frac{d\lambda}{dt} - x \frac{\lambda}{T} \right) dt + \lambda dx - d(Ux).$$

Dans ces formules, C représente la chaleur spécifique du liquide considéré; λ , u , U sont les variables définies au paragraphe précédent. Les quantités C , $\frac{d\lambda}{dt}$, λ , sont connues en fonction de la température t (22); les inconnues peuvent être dQ , dt , dx , suivant la question que l'on se propose d'étudier. Comme application, nous chercherons l'équation de la détente adiabatique d'un mélange de vapeur et de liquide.

25. Détente adiabatique d'une vapeur humide. — La détente adiabatique du mélange est caractérisée par l'équation $Q = C^a$, d'où $dQ = 0$, c'est-à-dire :

$$\left(C + x \frac{d\lambda}{dt} - x \frac{\lambda}{T} \right) dt + \lambda dx = 0.$$

Si l'on écrit cette équation en indiquant simplement les différentielles, on a évidemment :

$$C dt + d(\lambda x) - \frac{\lambda x}{T} dt = 0,$$

ou encore, en divisant par T et observant que $dT = dt$,

$$C \frac{dT}{T} + \frac{d(\lambda x)}{T} - \frac{\lambda x}{T^2} dT = 0.$$

Appelons x_0 et x les proportions de la vapeur dans le mélange avant et après la détente; l'intégration entre les températures absolues correspondantes T_0 et T donne, après simplifications,

$$CL \cdot \frac{T}{T_0} + \frac{\lambda x}{T} - \frac{\lambda_0 x_0}{T_0} = 0.$$

C'est la forme donnée par Clausius à l'équation de la détente adiabatique; Zeuner lui en a donné une autre en posant :

$$\tau_0 = \int_0^{\tau_0} C \frac{dT}{T}, \quad \tau = \int_0^{\tau} C \frac{dT}{T};$$

alors :

$$\int_{\tau_0}^{\tau} C \frac{dT}{T} = \tau - \tau_0,$$

et l'on peut écrire :

$$\tau - \tau_0 + \frac{\lambda x}{T} - \frac{\lambda_0 x_0}{T_0} = 0,$$

ou enfin :

$$\tau + \frac{\lambda x}{T} = \tau_0 + \frac{\lambda_0 x_0}{T_0} = C^{\text{te}}.$$

Pour faciliter l'application de sa formule à la vapeur d'eau, Zeuner a dressé une table des valeurs respectives de τ et de $\frac{\lambda}{T}$ correspondantes à un certain nombre de pressions. Le tableau ci-dessous est extrait de cette table, les valeurs de τ y ont été calculées par la formule approchée :

$$\tau = 1,0562 L.T.$$

PRESSION p EN ATMOSPHERES	τ	$\frac{\lambda}{T}$
0,5.....	0,26273	1,54887
1.....	0,31356	1,43834
2.....	0,36811	1,32588
3.....	0,40105	1,25913
4.....	0,42711	1,21119
5.....	0,44693	1,17305
6.....	0,46392	1,14322
7.....	0,47840	1,11714
8.....	0,49120	1,09444
10.....	0,51297	1,05615
12.....	0,53150	1,02477
14.....	0,54744	0,99801

L'expression du travail extérieur produit par la détente est :

$$\mathcal{E} = \int_{v_0}^v p dv,$$

ou, puisque $dQ = 0$,

$$\mathcal{E} = \frac{U_0 - U_1}{A} = J(U_0 - U_1),$$

c'est-à-dire, d'après l'équation (3) (2') :

$$\mathcal{E} = J[C(t_0 - t) + (\lambda_0 - Ap_0u_0)x_0 - (\lambda - Apu)x].$$

D'après Zeuner, pour la vapeur d'eau des chaudières à vapeur, on aurait comme pour les gaz :

$$\mathcal{E} = \frac{p_0 v_0}{\mu - 1} \left[1 - \left(\frac{v_0}{v} \right)^{\mu - 1} \right], \quad \text{avec} \quad \mu = 1,035 + 0,1x.$$

26. PROBLÈMES. — 1° On évapore 1 kilogramme d'eau de 0° à 100°, sous la pression de l'atmosphère; combien faut-il lui fournir de calories et quelle portion de cette chaleur est dépensée en travail externe?

On a d'abord pour la chaleur totale communiquée :

$$L = 606,5 + 0,305 \times 100 = 637 \text{ calories,}$$

puis, pour le travail externe correspondant, d'après la table de Zeuner,

$$\mathcal{E} = Apu = 40^{\text{cal}}, 205.$$

2° Calculer l'excès de la chaleur interne de 1 kilogramme de vapeur d'eau saturée à 100° sur l'eau liquide à la même température.

De la formule :

$$\lambda = U + A_{pu},$$

on déduit :

$$U = \lambda - A_{pu};$$

c'est U qu'il s'agit de calculer.

Pour la température de 100°, la table de Zeuner indique :

$$\lambda = 536,500, \quad A_{pu} = 40,205;$$

par conséquent :

$$U = 496^{\text{cal}}, 295.$$

3° Calculer l'augmentation de la chaleur interne d'une vapeur d'eau humide, contenant 20 0/0 d'eau, entre 0° et 100°.

Si U_1 est l'accroissement demandé, on a d'après la formule (3),

$$U_1 = q + Ux = q + (\lambda - A_{pu}) x;$$

mais $x = 0,8$ et, d'après la table pour la température de 100°,

$$q = 100,500, \quad \lambda = 536,500, \quad A_{pu} = 40,205.$$

On a donc :

$$U_1 = 100,500 + 496,295 \times 0,8 = 497^{\text{cal}}, 536.$$

CHAPITRE IV

ÉCOULEMENT DES GAZ

27. Écoulement par un orifice. — La formule de l'écoulement d'un gaz par un orifice percé en mince paroi a été déduite par Saint-Venant des équations de l'hydrodynamique; Zeuner l'a établie plus tard d'après les principes de la thermodynamique; nous résumerons sa démonstration.

On suppose toujours, comme pour les liquides, la veine gazeuse continue et les filets parallèles lorsqu'ils traversent l'orifice.

Considérons une masse de gaz contenue dans un réservoir R_0 à une pression constante p_0 , et s'écoulant par l'orifice ω dans un second réservoir R_1 où la pression p_1 est également constante; désignons par v_0 et v_1 les volumes spécifiques du gaz dans les réservoirs, par u la vitesse moyenne d'écoulement.

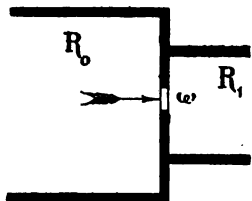


FIG. 525.

Lorsque le gaz passe par l'orifice ω , la pression est tombée de p_0 à p_1 , et le volume spécifique a augmenté de v_0 à v_1 ; chaque kilogramme de gaz a donc absorbé pour sa dilatation une quantité de travail représentée par $\int_{v_0}^{v_1} p dv$.

En second lieu, puisque les pressions ne varient pas, l'énergie du gaz s'est évidemment accrue de la différence $p_0 v_0 - p_1 v_1$. Enfin, la vitesse des filets passant de 0 à u , la force vive du gaz s'est augmentée du produit de la masse $\frac{1}{g}$

du kilogramme écoulé par $\frac{u^2}{2}$. L'équation des forces vives s'écrit donc :

$$\frac{u^2}{2g} = p_0 v_0 - p_1 v_1 + \int_{v_0}^{v_1} p dv;$$

c'est l'équation de Zeuner; on voit que, pour calculer l'intégrale du second membre, il est indispensable de préciser les conditions de l'écoulement, c'est-à-dire de savoir comment p varie en fonction de v .

Si, par exemple, l'écoulement se fait à température constante, alors, d'après la loi de Mariotte, on a $p_0 v_0 = p_1 v_1 = RT$, par suite :

$$\frac{u^2}{2g} = \int_{v_0}^{v_1} p dv = \int_{v_0}^{v_1} \frac{p_0 v_0}{v} dv = p_0 v_0 \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v},$$

et en intégrant :

$$\frac{u^2}{2g} = p_0 v_0 L \frac{v_1}{v_0} = p_0 v_0 L \frac{p_0}{p_1},$$

ou enfin :

$$u^2 = 2gRT_0 L \frac{p_0}{p_1}.$$

Cette formule, indiquée depuis longtemps par Navier, donne des résultats qui ne s'accordent guère avec ceux de l'expérience; il est d'ailleurs peu vraisemblable d'admettre que les réservoirs conservent rigoureusement la même température pendant toute la durée de l'écoulement.

L'hypothèse la plus vraisemblable pour les circonstances ordinaires de la pratique, surtout si l'on a égard à la faible conductibilité des gaz et à la rapidité du mouvement, est celle d'un écoulement adiabatique sans perte ni gain de chaleur; dans ce cas, on a, d'après les formules du paragraphe 16,

$$\begin{aligned} p_0 v_0 - p_1 v_1 &= R(T_0 - T_1) = RT_0 \left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right) \\ &= RT_0 \left[1 - \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{k-1}\right] = RT_0 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] \end{aligned}$$

puis :

$$\int_{v_0}^{v_1} p dv = \frac{RT_0}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right];$$

donc :

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{kRT_0}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]$$

et enfin :

$$u^2 = \frac{2gkRT_0}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right].$$

Cette formule permet de calculer u lorsqu'on connaît T_0 , p_0 , p_1 ; ce calcul est d'ailleurs facilité par l'emploi de la table XX.

La vitesse moyenne u peut également s'exprimer en fonction des températures extrêmes T_0 et T_1 ; il suffit pour cela d'éliminer le rapport $\frac{p_1}{p_0}$, ce qui ne présente aucune difficulté; on obtient :

$$u^2 = 2g \frac{kC'}{A} (T_0 - T_1), \quad A = \frac{1}{425}.$$

Lorsque l'écoulement s'effectue vers le vide, alors $p_1 = 0$, d'où :

$$u^2 = \frac{2gkRT_0}{k-1}.$$

Si le gaz considéré est de l'air, le calcul du second membre donne :

$$u^2 = 44,5T_0.$$

Quoi qu'il en soit de l'hypothèse faite sur les conditions de l'écoulement, les formules précédentes fournissent toujours pour u des valeurs sensiblement supérieures à la vitesse effective U ; on conçoit d'ailleurs qu'il doit se produire autour de l'orifice des frottements et des tourbillons se traduisant, en fin de compte, par une diminution de la vitesse d'écou-

lement. Si donc on appelle γ un coefficient moindre que l'unité, on a :

$$U = \gamma u ;$$

mais à ce coefficient de réduction γ il faut encore joindre, comme pour les liquides, un coefficient de contraction μ , de sorte que le débit a pour expression $\gamma\mu u = \varphi u$. On ne sait encore que fort peu de chose sur le coefficient φ , qui doit d'ailleurs varier avec le rapport $\frac{p_0}{p_1}$. D'après Weisbach :

pour les orifices en mince paroi de 10 à 24 millimètres de diamètre, lorsque la charge de mercure reste comprise entre 50 millimètres et 850 millimètres, varie de 0,555 à 0,787. Pour des orifices de même diamètre, garnis d'ajutages très courts, φ varie de 0,730 à 0,833.

Ces diverses valeurs de φ diffèrent peu de celles qu'on trouve pour l'écoulement de l'eau dans les mêmes circonstances, comme l'avait déjà fait remarquer Poncelet, à la suite de quelques expériences faites dans le cas de faibles charges.

Les mêmes formules s'appliquent à l'écoulement de la vapeur d'eau saturée sèche, en y faisant $k = 1,33$.

28. PROBLÈME. — Une masse d'air s'écoule dans l'atmosphère hors d'un réservoir dans lequel la température est de 40°, et la pression de 2 atmosphères. Calculer l'abaissement de la température et la vitesse d'écoulement.

Les données sont :

$$T_0 = 273 + 40 = 313^\circ, \quad \frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{2}, \quad \frac{k-1}{k} = 0,29, \quad k = 1,41.$$

On a d'abord pour la température finale T_1 :

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}, \quad \text{d'où} \quad T_1 = 313 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{0,29};$$

la table XX donne d'autre part :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{0,29} = 0,817;$$

par suite :

$$T_1 = 313^\circ \times 0,817 = 256^\circ,$$

et :

$$T_0 - T_1 = 313^\circ - 256^\circ = 57^\circ.$$

Le tableau du paragraphe 13 indique pour l'air :

$$C' = 0,168, \quad \text{d'où} \quad kC' = 0,238.$$

Enfin :

$$u = \sqrt{2g \frac{kC'}{A} (T_0 - T_1)} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,238 \times 425 \times 57} = 336^m.$$

29. Temps nécessaire au remplissage d'un réservoir. — Le problème de l'écoulement par un orifice en mince paroi, dans les conditions où nous venons de l'étudier, est le plus simple que l'on puisse considérer; dans la plupart des cas, ces conditions ne sont pas réalisées et le gaz sortant du réservoir alimentaire R_0 , où il est maintenu à une pression constante p_0 , s'écoule dans un second réservoir R_1 , où la pression, d'abord égale à p_1 , augmente progressivement jusqu'à p_0 , après quoi l'écoulement s'arrête.

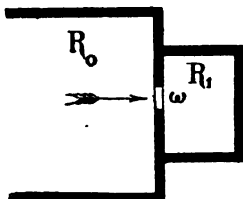


FIG. 526.

La formule générale qui donne le temps θ nécessaire au remplissage du réservoir R_1 a été indiquée par M. Haton de La Goupillière; elle se déduit de l'équation de Zeuner par des considérations analogues à celles du numéro 52 de l'hydraulique. Si φ désigne un coefficient de débit et V la capacité du réservoir R_1 , on a :

$$\theta = - \frac{V}{\varphi \omega \sqrt{2g}} \int_{v_1}^{v_0} \frac{dv}{v \sqrt{\int_{v_1}^{v_0} v dp}}.$$

Pour calculer l'intégrale du second membre, il est nécessaire de préciser les conditions thermiques de l'écoulement.

Pour un écoulement adiabatique caractérisé par l'équation $p_0 v_0^k = p_1 v_1^k$, l'intégration conduit à la formule :

$$\theta = \frac{V}{\varphi \omega} \sqrt{\frac{2}{gRT_0 k(k-1)}} L \left[\left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{2k}} + \sqrt{\left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{-1}{k}} - 1} \right].$$

• Avec un réservoir de 1 mètre cube de capacité et un ori-

lice circulaire de 0,10 de diamètre, la température étant de 20°, et le rapport $\frac{p_0}{p_1}$ égal à 2 :

$$V = 1^{\text{m}^3}, \quad \omega = \pi \times 0,05^2 = 0,785, \quad T_0 = 293^\circ, \quad \frac{p_0}{p_1} = 2.$$

M. de La Goupillière a trouvé :

$$\theta = 4^\circ,56.$$

A la même température, lorsque le rapport $\frac{p_0}{p_1}$ varie, on obtient les nombres du tableau ci-dessous. Ces valeurs pourraient même s'appliquer aux températures comprises entre 10° et 30° C.

$\frac{p_0}{p_1}$	θ
3	5°, 16
4	5°, 57
5	5°, 88
10	6°, 85
20	7°, 87
30	8°, 49

30. Écoulement par une conduite. — Cette question a surtout de l'intérêt au point de vue de la distribution du gaz de l'éclairage et du transport de la force motrice par l'air comprimé.

L'établissement d'une formule rigoureuse exigerait, comme précédemment, la connaissance des conditions thermiques de l'écoulement, et aussi la loi de variation de la pression.

On peut toujours, sans erreur appréciable, supposer l'écoulement isothermique ; mais pour la pression on n'a que des données fort imparfaites.

D'ailleurs, en supposant même que l'on fût complètement fixé à cet égard, la formule générale du mouvement serait tellement compliquée qu'elle n'aurait plus qu'un intérêt théorique.

Au point de vue pratique, on obtient des résultats suffisamment exacts en utilisant la formule relative aux liquides :

$$\frac{1}{4} DJ = \varphi (U),$$

$\varphi (U)$ représentant le frottement, rapporté à l'unité de surface, que les parois du tuyau exercent contre le fluide qui s'écoule.

D'après les expériences de M. Arson sur le gaz de l'éclairage et sur l'air atmosphérique s'écoulant à faible pression dans des tuyaux en fonte, on pourrait poser à l'exemple de Prony :

$$\varphi (U) = \rho g (aU + bU^2),$$

a et b étant des coefficients numériques variables avec le diamètre de la conduite et dont quelques valeurs sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

On peut observer que, pour le diamètre de 0^m,50 et au delà, ces coefficients sont relativement peu différents de ceux de Prony.

DIAMÈTRE D	a	b
0,05	0,000702	0,000595
0,081	0,000589	0,000489
0,103	0,000560	0,000480
0,254	0,000247	0,000159
0,325	0,000151	0,000126
0,500	0,000020	0,000246
0,600		0,000220
0,700		0,000200

Entre deux sections A_0B_0 et A_1B_1 , distantes d'une longueur l , la perte de charge $p_0 - p_1 = H$ serait donc :

$$p_0 - p_1 = \frac{4l}{D} \rho g (aU + bU^2);$$

ρg représente le poids spécifique du gaz, U la vitesse moyenne d'écoulement.

En joignant à cette équation celle qui exprime le débit Q dans l'unité de temps :

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} U,$$

la question de l'écoulement du gaz dans les conduites devient identique à celle du mouvement de l'eau.

Il importe d'observer pour l'application des formules, notamment pour le calcul de U , Q , ρg , que l'on doit toujours

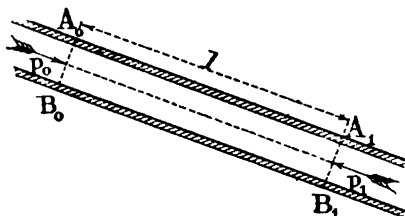


FIG. 527.

ramener ces quantités à la température et à la pression du gaz qui s'écoule. Si t est cette température Q_0 , le volume en mètres cubes, ramené à la pression de l'atmosphère et à 0°C . qui s'écoule par seconde; p , la pression totale du gaz dans la conduite en atmosphères ($10^m, 33$ d'eau), on devra calculer Q par la formule :

$$Q = \frac{Q_0 (1 + \alpha t)}{p},$$

α est le coefficient de dilatation des gaz ($\alpha = 0,00367$).

On aurait de même pour le poids spécifique, en appelant $(\rho g)_0$ ce poids à 0° sous la pression de l'atmosphère :

$$\rho g = \frac{(\rho g)_0 p}{1 + \alpha t}.$$

Pour le gaz de l'éclairage, $(\rho g)_0 = 0^m, 530$; pour l'air, $(\rho g)_0 = 1^m, 293$.

La table XVII est extraite de celles de M. Arson et a été établie d'après les formules précédentes; elle donne, pour le gaz de l'éclairage et pour l'air atmosphérique, les valeurs

en mètres d'eau de la perte de charge correspondant à une longueur de 1.000 mètres pour des débits déterminés et des conduites de différents diamètres depuis 0^m,05 à 0^m,70.

31. Conduites d'air comprimé. — Les tables de M. Arson fournissent des résultats suffisamment exacts pour le gaz de l'éclairage et pour l'air s'écoulant à une pression peu différente de l'atmosphère ; mais des expériences récentes démontrent qu'elles exagèrent les pertes de charge pour des pressions élevées, alors que la vitesse dépasse 2 à 3 mètres par seconde. Malgré cela, et faute de données expérimentales plus précises, il est encore bon de les utiliser, ne serait-ce qu'à titre d'indication.

En se basant sur les observations de M. Stockalper au tunnel du Saint-Gothard, M. Schmidt a proposé pour les longues conduites d'air comprimé en fonte, mesurant de 0^m,15 à 0^m,20 de diamètre, la formule :

$$p_0 - p_1 = \frac{785}{10^{10}} \frac{l}{D} \varepsilon g \left(5 + \frac{1}{D} \right) U^2 ;$$

la perte de charge $p_0 - p_1$ est exprimée en mètres d'eau.

De l'étude comparative des résultats de M. Arson à Paris et de M. Stockalper au Gothard avec ses expériences personnelles, M. Kraft, ingénieur en chef des usines de Seraing, a conclu que pour les conduites d'air comprimé on pouvait, avec assez d'exactitude, calculer les pertes de charge par la formule de Darcy relative aux tuyaux en fonte neuve, la vitesse U étant celle du fluide à l'origine de la conduite.

Pour terminer, nous reproduisons dans le tableau ci-dessous les résultats numériques de plusieurs expériences faites en 1890, à Paris, à l'usine d'air comprimé de Saint-Fargeau, par les ingénieurs de la Compagnie Popp.

La plupart des pertes de charge obtenues sont sensiblement inférieures à celles qu'auraient fournies les tables de M. Arson ; certaines d'entre elles se rapprochent quelque peu de celles qu'aurait données la formule de Darcy, et, pour ces dernières, les tables de M. Flamant paraissent fournir des résultats beaucoup plus approchés.

LONGUEUR de la CONDUITE de (0 ^m ,30 de diamètre	VOLUME ÉCOULE PAR HEURE		VITESSE moyenne de l'air	PRESSION DANS LA CONDUITE		PERTE DE CHARGE	
	à la pression atmo- sphérique	à la pression moyenne de la conduite		au commen- cement	à la fin	totale	par kilomètre
mètres	m. c.	m. c.	m.	atmos.	atmos.	atmos.	atmos.
16.502	13.788	2.206	8,67	6,25	4,25	2,0	0,12
16.502	13.833	2.100	8,24	6,78	4,36	2,42	0,14
16.502	11.112	1.485	5,83	7,125	5,84	1,285	0,07
16.502	8.500	1.060	4,1	6,9	6,28	0,62	0,03
16.502	6.476	865	3,4	6,78	6,4	0,38	0,02
4.403	10.055	1.297	5,09	6,9	6,6	0,3	0,07
4.403	6.567	967	2,8	7,125	6,95	0,175	0,04
4.403	13.833	1.859	7,3	6,78	6,17	0,61	0,14
4.403	11.142	1.408	5,53	7,125	6,7	0,475	0,09
3.340	11.142	1.610	6,32	6,0	5,84	0,16	0,048
8.759	8.058	1.071	4,2	6,65	6,39	0,26	0,029
3.340	8.058	1.102	4,32	6,33	6,29	0,04	0,012
4.403	8.588	1.126	4,42	6,75	6,5	0,25	0,056
4.403	9.099	1.249	4,9	6,37	6,2	0,17	0,038

Prenons, par exemple, les données numériques de la première expérience du tableau ci-dessus, et calculons la perte de charge par kilomètre d'après la table de Darcy et d'après celles de M. Flamant. L'étendue des tables de M. Arson ne permet pas de les utiliser pour ce cas.

Nous supposons que la température moyenne du fluide est de 15°.

On a :

$$(\rho g)_0 = 1^{\text{re}},293, \quad p = 1,00 + 6,25 = 7^{\text{me}},25.$$

$$Q = \frac{13788^{\text{me}}}{7,25 \times 3600} = 0^{\text{me}},528, \quad t = 15^{\circ};$$

d'où pour le poids spécifique à la température de 15° :

$$\rho g = \frac{1,293 \times 7,25}{1 + 15\alpha} = 8^{\text{me}},886.$$

Mais, pour une conduite de 0,30, la table de Darcy relative aux tuyaux neufs donne :

$$\frac{J}{Q^2} = \frac{1,468}{2} = 0,734;$$

on déduit de là :

$$J = 0,734 \times \overline{0,528^2} = 0^{\text{me}},2048.$$

La perte de charge en kilogrammes par mètre carré et par kilo-

mètre de longueur est donc :

$$J_{pg} \times 1000 = 0,2048 \times 8,886 \times 1000 = 1820 \text{ kilogrammes.}$$

Avec M. Flamant, les tables indiquent pour $D = 0,30$ et $Q = 0,528$:

$$\gamma = 0,43, \quad \frac{J}{\gamma} = 0,33;$$

par suite :

$$J_{pg} \times 1000 = 0,33 \times 0,43 \times 8,886 \times 1000 = 1262 \text{ kilogrammes.}$$

L'expérience ayant donné une perte totale de 2 atmosphères pour une longueur de 16502 mètres, la perte en kilogrammes et par kilomètre a été de :

$$\frac{2 \times 10334}{16,502} = 1252 \text{ kilogrammes.}$$

On voit qu'avec la table de Darcy l'écart est encore considérable, tandis qu'il est insignifiant avec celles de M. Flamant.

TABLE I
Vitesse V dues à une hauteur donnée h
 $V = \sqrt{2gh}$.

h	V	h	V	h	V	h	V
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
0,0001	0,044	0,007	0,370	0,045	0,940	0,26	2,26
0,0002	0,063	0,008	0,395	0,050	0,990	0,28	2,34
0,0003	0,077	0,009	0,420	0,055	1,039	0,30	2,43
0,0004	0,089	0,010	0,443	0,060	1,085	0,35	2,62
0,0005	0,099	0,011	0,464	0,065	1,129	0,40	2,80
0,0006	0,108	0,012	0,485	0,070	1,172	0,45	2,97
0,0007	0,117	0,013	0,505	0,075	1,213	0,50	3,13
0,0008	0,125	0,014	0,524	0,080	1,253	0,55	3,28
0,0009	0,133	0,015	0,542	0,090	1,329	0,60	3,43
0,0010	0,140	0,016	0,560	0,100	1,401	0,65	3,57
0,0012	0,153	0,018	0,594	0,11	1,468	0,70	3,71
0,0015	0,171	0,020	0,626	0,12	1,534	0,75	3,84
0,0020	0,198	0,022	0,657	0,13	1,597	0,80	3,96
0,0025	0,221	0,024	0,686	0,14	1,657	0,90	4,20
0,0030	0,243	0,026	0,714	0,15	1,715	1,00	4,43
0,0035	0,262	0,028	0,741	0,16	1,77	1,20	4,75
0,0040	0,280	0,030	0,767	0,18	1,88	1,50	5,42
0,0045	0,297	0,032	0,792	0,20	1,98	2,00	6,26
0,0050	0,313	0,035	0,820	0,22	2,08	3,00	7,67
0,0060	0,343	0,040	0,886	0,24	2,17	4,00	8,86

TABLE II
Hauteurs h correspondant aux vitesses V

$$h = \frac{V^2}{2g}$$

V	h	V	h	V	h	V	h
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
0,10	0,0005	2,10	0,225	4,10	0,86	6,10	1,90
0,20	0,002	2,20	0,247	4,20	0,90	6,20	1,96
0,30	0,005	2,30	0,270	4,30	0,94	6,30	2,02
0,40	0,008	2,40	0,294	4,40	0,99	6,40	2,09
0,50	0,013	2,50	0,319	4,50	1,03	6,50	2,15
0,60	0,018	2,60	0,345	4,60	1,08	6,60	2,22
0,70	0,025	2,70	0,372	4,70	1,13	6,70	2,29
0,80	0,033	2,80	0,400	4,80	1,17	6,80	2,36
0,90	0,041	2,90	0,429	4,90	1,22	6,90	2,43
1,00	0,051	3,00	0,459	5,00	1,27	7,00	2,50
1,10	0,062	3,10	0,490	5,10	1,33	7,10	2,57
1,20	0,073	3,20	0,522	5,20	1,38	7,20	2,64
1,30	0,086	3,30	0,555	5,30	1,43	7,30	2,72
1,40	0,100	3,40	0,589	5,40	1,49	7,40	2,79
1,50	0,115	3,50	0,624	5,50	1,54	7,50	2,87
1,60	0,130	3,60	0,661	5,60	1,60	7,60	2,94
1,70	0,147	3,70	0,698	5,70	1,65	7,70	3,02
1,80	0,165	3,80	0,736	5,80	1,71	7,80	3,10
1,90	0,184	3,90	0,775	5,90	1,77	7,90	3,18
2,00	0,204	4,00	0,816	6,00	1,83	8,00	3,26

TABLE III

Valeurs du coefficient b_1 et du rapport $\frac{J}{Q^2}$ d'après Darcy

pour les tuyaux en fonte avec dépôts

$$b_1 = \alpha + \frac{\beta}{D}, \quad \frac{J}{Q^2} = \frac{64b_1}{\pi^2 D^5}, \quad \alpha = 0,000507, \quad \beta = 0,0001294.$$

DIAMÈTRES D	VALEURS de b_1	VALEURS de $\frac{J}{Q^2}$	DIAMÈTRES D	VALEURS de b_1	VALEURS de $\frac{J}{Q^2}$
0,01	0,001801	116790000	0,29	0,000551	1,7420
0,02	0,001154	2338500	0,30	0,000550	1,4677
0,027	0,000986	445600	0,31	0,000548	1,2412
0,03	0,000938	250310	0,32	0,000547	1,0751
0,04	0,000830	52561	0,33	0,000546	0,90470
0,05	0,000765	15874	0,34	0,000545	0,77783
0,06	0,000722	6020,9	0,35	0,000543	0,67042
0,07	0,000691	2666,1	0,36	0,000542	0,58126
0,08	0,000668	1321,9	0,37	0,000541	0,50591
0,09	0,000650	713,81	0,38	0,000541	0,44275
0,10	0,000636	442,42	0,39	0,000540	0,38811
0,11	0,000624	251,25	0,40	0,000539	0,34134
0,12	0,000614	160,01	0,41	0,000538	0,30112
0,13	0,000606	105,84	0,42	0,000537	0,26645
0,14	0,000599	72,222	0,43	0,000537	0,23687
0,15	0,000593	50,639	0,44	0,000536	0,21076
0,16	0,000587	36,301	0,45	0,000535	0,18801
0,17	0,000583	26,626	0,46	0,000535	0,16844
0,18	0,000578	19,836	0,47	0,000534	0,15069
0,19	0,000575	15,059	0,48	0,000533	0,13565
0,20	0,000571	11,571	0,49	0,000533	0,12236
0,21	0,000568	9,0485	0,50	0,000532	0,11099
0,22	0,000565	7,1092	0,55	0,000530	0,068288
0,23	0,000563	5,6722	0,60	0,000528	0,044031
0,24	0,000560	4,5610	0,65	0,000526	0,029397
0,25	0,000558	3,7052	0,70	0,000525	0,020256
0,26	0,000556	3,0345	0,75	0,000524	0,014319
0,27	0,000554	2,5033	0,80	0,000523	0,010350
0,28	0,000553	2,0836	0,85	0,000522	0,0076289
			0,90	0,000521	0,0057215
			0,95	0,000520	0,0044615
			1,00	0,000519	0,0033055
			1,10	0,000518	0,0020900
			1,20	0,000517	0,0013500

Nota. — Pour les tuyaux neufs, les valeurs de b_1 et de $\frac{J}{Q^2}$ doivent être réduites de moitié.

TABLE IV

Tuyaux de conduite. — Comparaison des diverses formules

FORMULES		PERTE DE CHARGE PAR MÈTRE J						
		0,001	0,002	0,005	0,010	0,050	0,100	1,00
		LITRES PAR SECONDE						
D. 0 ^m ,050								
	Prony.....	0,33	0,48	0,79	1,13	2,58	3,67	11,76
	Dupuit.....	0,35	0,50	0,79	1,12	2,50	3,53	11,20
	Colombo.....	0,35	0,50	0,79	1,12	2,50	3,53	11,20
	Manning.....	0,29	0,42	0,66	0,93	2,08	2,94	9,30
DART	Tuyaux neufs.....	0,35	0,50	0,79	1,12	2,50	3,53	11,20
	Tuyaux incrustés.....	0,25	0,35	0,55	0,79	1,76	2,51	7,90
	Lévy.....	0,24	0,35	0,55	0,77	1,73	2,44	7,73
	Flamant.....	0,24	0,36	0,61	0,90	2,26	3,37	12,55
GESSLIN	Parois lisses.....	0,34	0,49	0,81	1,20	2,95	4,25	15,06
	Tuyaux neufs.....	0,27	0,40	0,65	0,93	2,30	3,35	11,20
GESSLIN	Légèrement incrustés.....	0,23	0,34	0,53	0,76	1,57	2,60	9,25
	Très incrustés.....	0,20	0,27	0,45	0,62	1,35	2,10	7,30
	Thrupp-Robinson.....	0,31	0,46	0,75	1,09	2,60	3,79	13,17
REYNOLDS	Parois très lisses.....	0,32	0,48	0,79	1,17	2,85	4,20	15,00
	Tuyaux neufs.....	0,31	0,46	0,75	1,09	2,61	3,79	13,70
REYNOLDS	Légèrement incrustés.....	0,30	0,44	0,71	1,02	2,39	3,44	11,57
	Incrustés.....	0,29	0,42	0,67	0,96	2,20	3,14	10,24
	Très incrustés.....	0,28	0,41	0,64	0,91	2,04	2,89	9,14
D. 0 ^m ,100								
	Prony.....	1,92	2,20	4,51	6,45	13,89	20,85	66,35
	Dupuit.....	2,00	2,83	4,48	6,32	14,14	20,00	63,24
	Colombo.....	2,00	2,82	4,47	6,32	14,14	20,00	63,24
	Manning.....	1,87	2,64	4,18	5,91	13,21	18,73	59,08
DART	Tuyaux neufs.....	2,20	3,11	4,92	6,96	15,56	22,00	69,62
	Tuyaux incrustés.....	1,56	2,20	3,48	4,92	11,00	15,56	49,22
	Lévy.....	1,48	2,08	3,29	4,65	10,41	14,75	46,54
	Flamant.....	1,59	2,36	3,99	5,92	14,87	22,10	82,37
GESSLIN	Parois lisses.....	2,20	3,15	5,05	7,50	18,00	26,50	95,00
	Tuyaux neufs.....	1,80	2,70	4,25	6,00	14,50	21,00	70,00
GESSLIN	Légèrement incrustés.....	1,55	2,15	3,60	5,00	12,00	17,00	55,00
	Très incrustés.....	1,25	1,95	3,00	4,25	10,00	13,00	43,00
	Thrupp-Robinson.....	2,20	2,90	4,78	6,95	16,60	24,14	83,80
REYNOLDS	Parois très lisses.....	2,06	3,03	5,04	7,21	18,10	26,60	95,75
	Tuyaux neufs.....	1,93	2,82	4,62	6,72	16,03	23,33	81,02
REYNOLDS	Légèrement incrustés.....	1,82	2,63	4,25	6,13	14,29	20,58	69,15
	Incrustés.....	1,72	2,83	3,93	5,61	12,81	18,27	59,52
	Très incrustés.....	1,63	2,31	2,65	5,16	11,55	16,34	51,67

TABLE IV (suite)

FORMULES		PERTE DE CHARGE PAR MÈTRE J						
		0,001	0,002	0,005	0,010	0,050	0,100	1,00
		LITRES PAR SECONDE						
		D. 0 ^m ,200						
Prony.....		11	18	26	37	83	117	376
Dupuit.....		11	16	25	36	80	113	358
Colombo.....		11	16	25	36	80	113	358
Manning.....		12	17	27	38	84	119	375
BACI	Tuyaux neufs.....	13	18	29	42	93	131	415
	Tuyaux incrustés.....	9	13	21	29	66	93	294
Lévy.....		9	13	20	28	64	90	284
Flamant.....		10	15	26	39	98	145	540
GUSLAIN	Parois lisses.....	14	19	33	47	117	175	600
	Tuyaux neufs.....	12	17	28	39	94	135	460
	Légèrement incrustés.....	10	15	24	34	80	112	370
	Très incrustés.....	9	14	21	29	66	93	300
Thrupp-Robinson.....		13	18	30	44	106	154	533
REYNOLDS	Parois très lisses.....	13	19	32	47	115	169	608
	Tuyaux neufs.....	12	17	28	41	99	144	499
	Légèrement incrustés.....	11	16	25	37	85	123	413
	Incrustés.....	10	14	23	33	74	106	346
	Très incrustés.....	9	13	21	29	65	92	292
		D. 0 ^m ,300						
Prony.....		31	45	72	102	230	336	1.306
Dupuit.....		31	44	70	99	221	313	990
Colombo.....		31	44	70	98	220	312	986
Manning.....		35	49	78	111	247	350	1.106
BACI	Tuyaux neufs.....	37	52	82	117	261	369	1.167
	Tuyaux incrustés.....	26	37	58	82	185	261	825
Lévy.....		26	37	58	83	184	261	825
Flamant.....		31	46	79	114	293	427	1.590
GUSLAIN	Parois lisses.....	39	57	95	140	340	490	1.750
	Tuyaux neufs.....	34	49	82	120	280	390	1.250
	Légèrement incrustés.....	31	43	70	100	240	330	1.100
	Très incrustés.....	28	39	62	88	200	280	900
Thrupp-Robinson.....		38	55	90	131	312	454	1.574
REYNOLDS	Parois très lisses.....	39	57	94	139	339	499	1.792
	Tuyaux neufs.....	34	50	82	120	286	416	1.444
	Légèrement incrustés.....	31	45	72	104	243	350	1.176
	Incrustés.....	28	39	64	91	208	297	968
	Très incrustés.....	25	36	57	80	180	255	805
		D. 0 ^m ,400						
Prony.....		64	92	148	209	473	671	2.127
Dupuit.....		64	90	143	202	452	639	2.020
Colombo.....		64	90	143	202	452	640	2.024
Manning.....		75	107	168	238	533	753	2.382

TABLE IV (suite)

FORMULES		PERTE DE CHARGE PAR MÈTRE J						
		0,001	0,002	0,005	0,010	0,030	0,100	1,00
		LITRES PAR SECONDE						
D. 0 ^m ,400								
BART	Tuyaux neufs.....	77	108	171	242	542	767	2.425
	Tuyaux incrustés.....	54	77	121	171	383	542	1.713
LÉVY	56	79	125	176	394	557	1.763
	Flamant.....	68	102	172	253	610	952	3.548
GÉSIAH	Parois lisses.....	85	125	205	295	725	1.050	3.725
	Tuyaux neufs.....	75	110	180	260	580	850	2.850
THRUPP-ROBINSON	Légèrement incrustés.....	67	95	160	225	500	725	2.400
	Tres incrustés.....	62	87	140	195	430	600	1.950
RÉYNOLDS	84	118	194	282	672	978	3.395
	Parois très lisses.....	83	122	203	299	731	1.074	3.860
BART	Tuyaux neufs.....	73	107	175	254	608	884	3.069
	Légèrement incrustés.....	65	94	172	219	510	735	2.469
RÉYNOLDS	Incrustés.....	58	82	133	190	432	618	2.013
	Tres incrustés.....	52	74	117	165	370	523	1.654
D. 0 ^m ,500								
PRONY	114	163	260	371	858	1.182	3.769
	Dupuit.....	112	158	251	354	792	1.119	3.540
COLOMBO	112	158	250	353	791	1.118	3.535
	Manning.....	137	193	306	432	966	1.366	4.319
BART	Tuyaux neufs.....	134	190	300	425	951	1.345	4.252
	Tuyaux incrustés.....	95	134	212	301	672	951	3.007
LÉVY	101	142	225	318	712	1.005	3.182
	Flamant.....	125	186	316	468	1.173	1.744	6.500
GÉSIAH	Parois lisses.....	155	225	370	530	1.350	1.900	6.750
	Tuyaux neufs.....	140	195	320	460	1.100	1.600	5.250
THRUPP-ROBINSON	Légèrement incrustés.....	125	175	280	400	930	1.350	4.500
	Tres incrustés.....	115	160	260	360	800	1.100	3.650
RÉYNOLDS	147	214	351	511	1.217	1.777	6.170
	Parois très lisses.....	151	222	369	542	1.325	1.948	7.000
BART	Tuyaux neufs.....	131	191	314	457	1.091	1.587	5.508
	Légèrement incrustés.....	116	167	270	389	907	1.306	4.360
RÉYNOLDS	Incrustés.....	102	144	234	334	762	1.087	3.540
	Tres incrustés.....	91	129	204	289	646	913	2.898
D. 0 ^m ,600								
PRONY	179	255	408	580	1.035	1.849	5.862
	Dupuit.....	176	250	395	558	1.248	1.765	5.580
COLOMBO	176	249	394	558	1.247	1.764	5.577
	Manning.....	232	314	496	702	1.569	2.220	7.019
BART	Tuyaux neufs.....	213	301	477	674	1.507	2.132	6.742
	Tuyaux incrustés.....	150	213	337	476	1.065	1.506	4.762
LÉVY	164	231	365	516	1.154	1.636	5.161

TABLE IV (suite)

FORMULES		PERTE DE CHARGE PAR MÈTRE J						
		0,001	0,002	0,005	0,010	0,050	0,100	1,00
		—	—	—	—	—	—	—
LITRES PAR SECONDE								
D. 0 ^m ,600								
GASLIN	Flament.....	206	306	516	767	1.925	2.866	10.663
	Parois lisses.....	215	310	580	860	2.150	3.000	10.650
	Tuyaux neufs.....	220	320	515	740	1.800	2.550	8.500
	Légèrement incrustés.....	200	285	460	650	1.500	2.200	7.150
	Très incrustés.....	185	260	420	570	1.340	1.750	5.250
REYNOLDS	Thrupp-Robinson.....	219	348	572	831	1.985	2.887	10.022
	Parois très lisses.....	245	360	600	881	2.155	3.167	11.382
	Tuyaux neufs.....	212	309	507	737	1.759	2.559	8.885
	Légèrement incrustés.....	185	267	432	622	1.451	2.090	7.024
	Incrustés.....	163	229	371	530	1.210	1.727	5.622
	Très incrustés.....	144	204	322	457	1.019	1.441	4.557
D. 0 ^m ,700								
GASLIN	Prony.....	263	376	600	853	1.911	2.721	8.623
	Dupuit.....	259	367	580	820	1.834	2.593	8.200
	Colombo.....	259	366	580	820	1.834	2.593	8.200
	Manning.....	335	474	749	1.059	2.369	3.351	10.594
	Tuyaux neufs.....	313	442	703	993	2.224	3.147	9.937
REYNOLDS	Tuyaux incrustés.....	222	314	496	702	1.569	2.219	7.018
	Lévy.....	247	348	550	777	1.739	2.459	7.776
	Flamant.....	313	465	785	1.166	2.925	4.347	16.204
	Parois lisses.....	370	540	900	1.300	3.200	4.600	16.360
	Tuyaux neufs.....	335	480	790	1.150	2.700	3.850	13.160
GASLIN	Légèrement incrustés.....	310	435	710	990	2.340	3.300	10.600
	Très incrustés.....	290	400	640	900	2.000	2.850	9.100
	Thrupp-Robinson.....	361	526	863	1.255	2.996	4.357	15.127
	Parois très lisses.....	370	544	904	1.329	3.250	4.778	17.170
	Tuyaux neufs.....	318	463	759	1.104	2.635	3.833	13.308
REYNOLDS	Légèrement incrustés.....	276	397	643	926	2.160	3.111	10.454
	Incrustés.....	241	339	549	784	1.789	2.553	8.315
	Très incrustés.....	212	300	474	670	1.464	2.118	6.700
D. 0 ^m ,800								
GASLIN	Prony.....	369	525	839	1.192	2.681	3.796	12.030
	Dupuit.....	362	512	810	1.444	2.558	3.618	11.440
	Colombo.....	362	512	810	1.445	2.560	3.620	11.449
	Manning.....	478	677	1.070	1.516	3.383	4.784	15.162
	Tuyaux neufs.....	442	625	988	1.398	3.126	4.420	13.979
REYNOLDS	Tuyaux incrustés.....	311	440	695	983	2.198	3.108	9.829
	Lévy.....	351	496	785	1.109	2.481	3.508	11.093
	Flamant.....	449	669	1.128	1.676	4.203	6.246	23.282
	Parois lisses.....	525	775	1.300	1.900	4.500	6.500	23.310
	Tuyaux neufs.....	475	685	1.150	1.600	3.855	5.500	18.820
GASLIN	Légèrement incrustés.....	410	620	1.010	1.450	3.350	4.750	15.830
	Très incrustés.....	410	570	925	1.350	2.850	4.150	12.910

TABLE IV (suite)

FORMULES		PERTE DE CHARGE PAR MÈTRE J						
		0,001	0,002	0,005	0,010	0,050	0,100	1,00
		—	—	—	—	—	—	—
LITRES PAR SECONDE								
D. 0 ^m ,800								
MIVOL	Thrupp-Robinson.....	516	751	1.232	1.792	4.278	6.238	21.606
	Parois très lisses.....	528	778	1.291	1.898	4.640	6.820	25.080
	Tuyaux neufs.....	451	657	1.077	1.567	3.741	5.441	18.890
	Légèrement incrustés.....	389	560	907	1.307	3.048	4.490	14.750
	Incrustés.....	338	476	771	1.100	2.511	3.583	11.671
	Très incrustés.....	296	418	661	935	2.092	2.958	9.355
D. 0 ^m ,900								
MIVOL	Prony.....	496	706	1.132	1.615	3.607	5.116	16.144
	Dupuit.....	486	687	1.087	1.536	3.435	4.857	15.860
	Colombo.....	484	687	1.087	1.537	3.437	4.860	15.869
	Manning.....	655	936	1.465	2.072	4.632	6.551	20.717
	Tuyaux neufs.....	591	835	1.321	1.868	4.177	5.908	18.683
MIVOL	Tuyaux incrustés.....	418	592	936	1.324	2.961	4.187	13.241
	Lévy.....	480	679	1.075	1.518	3.395	4.802	15.184
	Flamant.....	619	920	1.517	2.307	5.786	8.599	32.053
	Parois lisses.....	725	1.080	1.760	2.600	6.100	9.000	31.840
	Tuyaux neufs.....	650	950	1.510	2.250	5.200	7.700	26.330
MIVOL	Légèrement incrustés.....	600	870	1.400	2.000	4.600	6.500	21.780
	Très incrustés.....	560	800	1.300	1.800	4.100	5.700	17.840
	Thrupp-Robinson.....	709	1.031	1.692	2.461	5.874	8.543	29.660
	Parois très lisses.....	723	1.093	1.748	2.598	6.353	9.337	33.557
	Tuyaux neufs.....	615	894	1.467	2.134	5.093	7.402	25.720
MIVOL	Légèrement incrustés.....	527	759	1.229	1.770	4.130	5.949	19.988
	Incrustés.....	455	642	1.040	1.483	3.386	4.832	15.739
	Très incrustés.....	397	561	888	1.256	2.807	3.971	12.556
D. 1 ^m ,000								
MIVOL	Prony.....	649	992	1.441	2.086	4.889	6.643	20.941
	Dupuit.....	632	894	1.416	2.000	4.472	6.325	20.000
	Colombo.....	632	894	1.414	2.000	4.472	6.325	20.000
	Manning.....	867	1.226	1.939	2.742	6.131	8.671	27.420
	Tuyaux neufs.....	770	1.089	1.722	2.436	5.447	7.703	24.362
MIVOL	Tuyaux incrustés.....	545	770	1.218	1.723	3.852	5.447	17.227
	Lévy.....	636	900	1.424	2.011	4.498	6.361	20.114
	Flamant.....	824	1.224	2.065	3.078	7.703	11.446	42.665
	Parois lisses.....	950	1.400	2.340	3.400	8.250	11.600	42.100
	Tuyaux neufs.....	880	1.300	2.100	2.900	7.000	10.200	34.220
MIVOL	Légèrement incrustés.....	820	1.210	1.860	2.680	6.100	8.900	29.050
	Très incrustés.....	770	1.130	1.700	2.400	5.450	7.700	28.840
	Thrupp-Robinson.....	937	1.363	2.236	3.253	7.769	11.293	39.204

TABLE IV (suite)

FORMULES		PERTE DE CHARGE PAR MÈTRE J						
		0,001	0,002	0,005	0,010	0,050	0,100	1,00
		LITRES PAR SECONDE						
		D. 1 ^m ,000						
REYNOLDS	{ Parois très lisses.....	957	1.407	2.341	3.441	8.414	12.367	44.445
	{ Tuyaux neufs.....	810	1.178	1.934	2.812	6.713	9.764	33.898
	{ Légèrement incrustés.....	692	996	1.613	2.323	5.418	7.806	26.226
	{ Incrustés.....	595	836	1.358	1.938	4.425	6.313	20.563
	{ Très incrustés.....	517	731	1.155	1.634	3.654	5.168	16.343
		D. 1 ^m ,500						
D'ARCY	Prony.....	1.791	2.638	4.058	5.758	12.927	18.300	57.965
	Dupuit.....	1.743	2.465	3.902	5.511	12.324	17.428	55.114
	Colombo.....	1.743	2.464	3.868	5.511	12.324	17.430	55.114
	Manning.....	2.555	3.613	5.713	8.079	18.107	25.548	80.790
	{ Tuyaux neufs.....	2.131	3.014	4.765	6.739	15.070	21.313	67.397
LEVEY	{ Tuyaux incrustés.....	1.507	2.132	3.371	4.767	10.660	15.076	47.673
	Lévy.....	1.882	2.661	4.213	5.951	13.317	18.818	59.509
	Flamant.....	2.476	3.679	6.210	9.294	23.152	34.404	128.240
	{ Parois lisses.....	2.800	4.050	6.750	9.800	23.730	34.750	123.290
	{ Tuyaux neufs.....	2.640	3.750	6.000	8.700	20.730	29.940	101.450
THURPP-ROBINSON	{ Légèrement incrustés.....	2.500	3.500	5.500	8.000	18.600	26.610	87.520
	{ Très incrustés.....	2.370	3.260	5.100	7.400	16.260	22.990	72.710
	Thrapp-Robinson.....	2.766	4.023	6.600	9.603	22.920	33.340	115.740
	{ Parois très lisses.....	2.823	4.149	6.902	10.145	24.808	36.461	130.870
	{ Tuyaux neufs.....	2.346	3.412	5.599	8.143	19.437	28.270	98.140
STOKES	{ Légèrement incrustés.....	1.968	2.833	4.590	6.611	15.422	22.211	74.625
	{ Incrustés.....	1.666	2.377	3.803	5.426	12.386	17.672	57.560
	{ Très incrustés.....	1.290	1.805	2.883	4.078	9.118	12.896	40.779

TABLE V

Mouvement de l'eau dans les conduites, d'après M. Maurice Lévy
Table calculée par M. Henri Vallot

$$\mu = \frac{U}{\sqrt{J}}, \quad \beta = \frac{Q}{\sqrt{J}}$$

DIAMÈTRE D	μ	$\log \mu$	β	$\log \beta$
0,01	1,5959	0,20301	0,0001253	7,09810
0,013	1,8418	0,26524	0,0002445	4,38822
0,02	2,3373	0,36872	0,0007343	4,86587
0,027	2,7660	0,44185	0,0015837	3,19967
0,03	2,9359	0,46774	0,0020753	3,31708
0,04	3,4598	0,53906	0,0043478	3,63827
0,05	3,9357	0,59502	0,0077277	3,88805
0,06	4,3769	0,64117	0,012376	2,09256
0,07	4,7920	0,68052	0,018472	2,26581
0,08	5,1861	0,71484	0,026068	2,41611
0,09	5,5628	0,74529	0,035389	2,54887
0,10	5,9251	0,77270	0,046536	2,66779
0,15	7,5770	0,87950	0,13390	1,12678
0,20	9,0494	0,95082	0,28429	1,45377
0,25	10,404	1,01721	0,51071	1,70818
0,30	11,674	1,06721	0,82517	1,91854
0,35	12,878	1,10484	1,2330	0,09307
0,40	14,029	1,14702	1,7629	0,24623
0,45	15,136	1,18092	2,4073	0,38154
0,50	16,206	1,20969	3,1821	0,50272
0,55	17,245	1,23665	4,0971	0,61247
0,60	18,255	1,26137	5,1614	0,71276
0,65	19,240	1,28420	6,3844	0,80512
0,70	20,202	1,30550	7,7748	0,89069
0,75	21,145	1,32520	9,3414	0,97041
0,80	22,069	1,34378	11,093	1,04509
0,85	22,976	1,36128	13,038	1,11521
0,90	23,868	1,37782	15,184	1,18139
0,95	24,745	1,39349	17,540	1,24403
1,00	25,609	1,40840	20,114	1,30349
1,05	26,461	1,42261	22,913	1,36008
1,10	27,301	1,43618	25,946	1,41406
1,15	28,131	1,44918	29,215	1,46567
1,20	28,950	1,46164	32,741	1,51509
1,25	29,759	1,47361	36,519	1,56252
1,30	30,559	1,48513	40,562	1,60811
1,35	31,350	1,49624	44,874	1,65200
1,40	32,133	1,50695	49,465	1,69430
1,45	32,908	1,51703	54,341	1,73513
1,50	33,676	1,52701	59,509	1,77458
1,55	34,436	1,53701	64,977	1,81276
1,60	35,189	1,54641	70,752	1,84974
1,65	35,936	1,55553	76,840	1,88559
1,70	36,677	1,56439	83,249	1,92038
1,75	37,411	1,57300	89,984	1,95416

TABLE V (suite)

DIAMÈTRE D	μ	$\log \mu$	ρ	$\log \rho$
1,80	38,140	1,58138	97,054	1,98701
1,85	38,863	1,58954	104,465	2,01897
1,90	39,580	1,59748	112,22	2,05008
1,95	40,293	1,60522	120,33	2,08038
2,00	41,000	1,61278	128,80	2,10993
2,05	41,702	1,62016	137,64	2,13870
2,10	42,399	1,62736	146,85	2,16689
2,15	43,091	1,63440	156,45	2,19437
2,20	43,781	1,64128	166,43	2,22122
2,25	44,465	1,64802	176,80	2,24747
2,30	45,145	1,65461	187,57	2,27316
2,35	45,821	1,66106	198,74	2,29824
2,40	46,493	1,66738	210,33	2,32289
2,45	47,161	1,67358	222,33	2,34700
2,50	47,825	1,67965	234,76	2,37062
2,55	48,486	1,68561	247,62	2,39378
2,60	49,143	1,69146	260,91	2,41649
2,65	49,796	1,69720	274,65	2,43878
2,70	50,446	1,70283	288,83	2,46065
2,75	51,093	1,70837	303,48	2,48212
2,80	51,737	1,71381	318,58	2,50321
2,85	52,378	1,71915	334,14	2,52393
2,90	53,015	1,72440	350,17	2,54428
2,95	53,650	1,72957	366,68	2,56430
3,00	54,281	1,73465	383,69	2,58398

TABLE VI

*Valeurs du coefficient γ pour les tuyaux de conduite
d'après M. Flamant*

$$\gamma = 0,00092 \sqrt[4]{\left(\frac{4}{\pi}\right)^7} \frac{1}{\sqrt[4]{D^{19}}}$$

D	γ	D	γ	D	γ
m.		m.		m.	
0,01	4.427.000	0,22	1,86	0,45	0,062
0,015	645.000	0,23	1,51	0,46	0,056
0,02	164.500	0,24	1,23	0,47	0,051
0,025	57.100	0,25	1,01	0,48	0,046
0,03	24.000	0,26	0,84	0,49	0,041
0,04	6.100	0,27	0,70	0,50	0,0377
0,05	2.100	0,28	0,55	0,52	0,0313
0,06	840	0,29	0,50	0,55	0,0240
0,07	430	0,30	0,43	0,60	0,0158
0,08	227	0,31	0,36	0,65	0,0108
0,09	130	0,32	0,314	0,70	0,0076
0,10	79	0,33	0,271	0,75	0,0055
0,11	50	0,34	0,235	0,80	0,0040
0,12	33	0,35	0,205	0,85	0,0030
0,13	22,6	0,36	0,179	0,90	0,0023
0,14	15,6	0,37	0,157	0,95	0,0018
0,15	11,5	0,38	0,139	1,00	0,0014
0,16	8,44	0,39	0,123	1,05	0,00110
0,17	6,33	0,40	0,107	1,10	0,00089
0,18	4,83	0,41	0,097	1,20	0,00059
0,19	3,73	0,42	0,087	1,30	0,00040
0,20	2,93	0,43	0,077	1,40	0,00028
0,21	2,32	0,44	0,069		

TABLE VII

Valeurs du rapport $\frac{J}{Y}$ et de son inverse $\frac{Y}{J}$ pour le calcul
des tuyaux de conduite, d'après M. Flamant

$$\frac{J}{Y} = \sqrt[4]{Q^2}, \quad \frac{Y}{J} = \frac{1}{\sqrt[4]{Q^2}}.$$

Q	$\frac{J}{Y}$	$\frac{Y}{J}$	Q	$\frac{J}{Y}$	$\frac{Y}{J}$
m ³ lit.			m ³ lit.		
0,000.10	10.000.000	0.0000 0100	0,002.00	53.000	0,00001 89
11	8.464.000	0,0000 0118	2.10	49.000	0,00002 06
12	7.268.000	0,0000 0138	2.20	45.000	0,00002 24
13	6.318.000	0,0000 0158	2.30	41.000	0,00002 42
14	5.550.000	0,0000 0180	2.40	38.000	0,00002 61
15	4.919.000	0,0000 0203	2.50	36.000	0,00002 80
16	4.393.000	0,0000 0228	2.60	33.400	0,00002 99
17	3.951.000	0,0000 0253	2.80	29.300	0,00003 41
18	3.575.000	0,0000 0280	3.00	26.000	0,00003 85
19	3.252.000	0,0000 0308	3.50	19.800	0,00005 05
20	2.973.000	0,0000 0337	4.00	15.700	0,00006 37
21	2.730.000	0,0000 0367	4.50	12.800	0,00007 81
22	2.516.000	0,0000 0398	5.00	10.600	0,00009 48
23	2.328.000	0,0000 0429	5.50	9.000	0,00011 1
24	2.161.000	0,0000 0463	6.00	7.700	0,00012 9
25	2.012.000	0,0000 0497	6.50	6.700	0,00014 9
26	1.878.000	0,0000 0532	7.00	5.900	0,00017 0
28	1.650.000	0,0000 0606	7.50	5.230	0,00019 1
30	1.462.000	0,0000 0685	8.00	4.670	0,00021 4
35	1.117.000	0,0000 0900	9.00	3.810	0,00026 3
40	884.000	0,0000 0113	0,010.00	3.160	0,00031 6
45	719.000	0,0000 0139	11.00	2.680	0,00037 4
50	598.000	0,0000 0167	12.00	2.300	0,00043 5
55	506.000	0,0000 0197	13.00	2.000	0,00050 0
60	435.000	0,0000 0230	14.00	1.750	0,00057 0
65	378.000	0,0000 0265	15.00	1.560	0,00064 3
70	332.000	0,0000 0301	16.00	1.390	0,00072 0
75	294.000	0,0000 0340	17.00	1.250	0,00080 0
80	263.000	0,0000 0380	18.00	1.130	0,00088 5
90	214.000	0,0000 0469	19.00	1.030	0,00097 2
0,001.00	178.000	0,0000 0562	20.00	940	0,00106
1.10	151.000	0,0000 0665	21.00	860	0,00116
1.20	129.000	0,0000 0775	22.00	796	0,00126
1.30	112.000	0,0000 0892	23.00	736	0,00136
1.40	99.000	0,0000 01	24.00	683	0,00147
1.50	87.000	0,0000 014	25.00	636	0,00157
1.60	71.000	0,0000 028	26.00	594	0,00168
1.70	70.000	0,0000 042	28.00	522	0,00192
1.80	64.000	0,0000 057	30.00	462	0,00215
1.90	58.000	0,0000 073	35.00	353	0,00273

TABLE VII (suite et fin)

Q	I J	J I	Q	I J	J I
m ³ . lit.			m ³ . lit.		
0,040	280	0,00358	0,200	16,7	0,0599
45	227	0,00440	210	15,35	0,0652
50	189	0,00529	220	14,15	0,0707
55	160	0,00625	230	13,09	0,0763
60	137	0,00727	240	12,15	0,0822
65	120	0,00837	250	11,31	0,0884
70	105	0,00953	260	10,56	0,0947
75	93	0,0107	280	9,28	0,108
80	83	0,0120	300	8,22	0,122
90	68	0,0148	350	6,28	0,159
0,100	56	0,0178	400	4,97	0,201
110	48	0,0210	450	4,04	0,247
120	41	0,0245	500	3,36	0,297
130	36	0,0281	550	2,85	0,351
140	31	0,0320	600	2,44	0,409
150	28	0,0361	650	2,12	0,470
160	24,7	0,0405	700	1,87	0,535
170	22,2	0,0450	750	1,65	0,605
180	20,1	0,0497	800	1,48	0,677
190	18,3	0,0546	900	1,20	0,832
			1,000	1,00	1,000

TABLE VII

Perte de charge J par mètre de longueur dans les conduites
d'après M. Flamant

DÉBITS		VALEURS DE J POUR LES DIAMÈTRES DE					
		0 ^m ,06	0 ^m ,08	0 ^m ,10	0 ^m ,12	0 ^m ,15	0 ^m ,20
m ³ lit.							
0,000,004	0,0000179	0,0000045	0,0000016	0,0000007	0,0000002		
045	0,0000220	0,0000056	0,0000019	0,0000008	0,0000003	0,0000001	
050	0,0000264	0,0000067	0,0000023	0,0000010	0,0000003	0,0000001	
055	0,0000313	0,0000079	0,0000027	0,0000011	0,0000004	0,0000001	
060	0,0000364	0,0000092	0,0000032	0,0000013	0,0000005	0,0000001	
065	0,000042	0,0000106	0,0000037	0,0000015	0,0000005	0,0000001	
070	0,000048	0,0000122	0,0000042	0,0000018	0,0000006	0,0000001	
075	0,000054	0,0000137	0,0000048	0,0000020	0,0000007	0,0000002	
080	0,000060	0,0000154	0,0000054	0,0000022	0,0000008	0,0000002	
090	0,000074	0,0000189	0,0000066	0,0000027	0,0000009	0,0000002	
0,000,10	0,000089	0,0000227	0,0000079	0,0000033	0,0000011	0,0000003	
11	0,000105	0,0000268	0,0000094	0,0000039	0,0000014	0,0000003	
12	0,000123	0,0000313	0,0000109	0,0000045	0,0000016	0,0000004	
13	0,000141	0,0000359	0,0000124	0,0000052	0,0000019	0,0000005	
14	0,000160	0,0000409	0,0000142	0,0000059	0,0000021	0,0000005	
15	0,000181	0,000046	0,0000160	0,0000067	0,0000023	0,0000006	
16	0,000203	0,000052	0,0000179	0,0000075	0,0000026	0,0000007	
17	0,000225	0,000057	0,0000199	0,0000083	0,0000029	0,0000007	
18	0,000249	0,000064	0,0000220	0,0000092	0,0000032	0,0000008	
19	0,000274	0,000070	0,0000242	0,0000102	0,0000035	0,0000009	
20	0,000300	0,000077	0,0000265	0,0000111	0,0000038	0,0000009	
21	0,000327	0,000083	0,0000289	0,0000121	0,0000041	0,0000010	
22	0,000365	0,000090	0,0000313	0,0000131	0,0000045	0,0000011	
23	0,000382	0,000097	0,0000338	0,0000142	0,0000049	0,0000012	
24	0,000412	0,000105	0,0000364	0,0000153	0,0000053	0,0000013	
25	0,00044	0,000113	0,000039	0,0000164	0,0000057	0,0000014	
26	0,00047	0,000121	0,000042	0,0000176	0,0000061	0,0000015	
28	0,00054	0,000138	0,000048	0,0000201	0,0000069	0,0000017	
30	0,00061	0,000156	0,000054	0,0000227	0,0000079	0,0000020	
35	0,00080	0,000204	0,000071	0,0000298	0,0000103	0,0000026	
0,000,40	0,00100	0,000257	0,000087	0,000037	0,0000130	0,0000033	
45	0,00124	0,000316	0,000109	0,000046	0,0000160	0,0000041	
50	0,00149	0,000379	0,000131	0,000055	0,0000192	0,0000049	
55	0,00176	0,000447	0,000155	0,000065	0,0000226	0,0000058	
60	0,00205	0,000522	0,000181	0,000076	0,0000263	0,0000067	
65	0,00237	0,00060	0,000211	0,000088	0,000030	0,0000077	
70	0,00276	0,00068	0,000244	0,000099	0,000034	0,0000088	
75	0,00303	0,00077	0,000268	0,000112	0,000039	0,0000099	
80	0,00339	0,00086	0,000299	0,000125	0,000044	0,0000111	
90	0,00418	0,00107	0,000369	0,000155	0,000054	0,0000137	

TABLE VII (suite et fin)

Q	$\frac{I}{J}$	$\frac{J}{T}$	Q	$\frac{I}{J}$	$\frac{J}{T}$
m ³ , lit.			m ³ , lit.		
0,040	280	0,00358	0,200	16,7	0,0599
45	227	0,00440	210	15,35	0,0652
50	189	0,00529	220	14,15	0,0707
55	160	0,00625	230	13,09	0,0763
60	137	0,00727	240	12,15	0,0822
65	120	0,00837	250	11,31	0,0884
70	105	0,00953	260	10,56	0,0947
75	93	0,0107	280	9,28	0,108
80	83	0,0120	300	8,22	0,122
90	68	0,0148	350	6,28	0,159
0,100	56	0,0178	400	4,97	0,201
110	48	0,0210	450	4,04	0,247
120	41	0,0245	500	3,36	0,297
130	36	0,0281	550	2,85	0,351
140	31	0,0320	600	2,44	0,409
150	28	0,0361	650	2,12	0,470
160	24,7	0,0405	700	1,87	0,535
170	22,2	0,0450	750	1,65	0,603
180	20,1	0,0497	800	1,48	0,677
190	18,3	0,0546	900	1,20	0,832
			1,000	1,00	1,000

TABLE VII

*Perte de charge J par mètre de longueur dans les conduites
d'après M. Flamant*

DÉBITS	VALEURS DE J POUR LES DIAMÈTRES DE :					
	0 ^m ,06	0 ^m ,08	0 ^m ,10	0 ^m ,12	0 ^m ,15	0 ^m ,20
m ³ lit.						
0,000,004	0,0000179	0,0000045	0,0000016	0,0000007	0,0000002	"
045	0,0000220	0,0000056	0,0000019	0,0000008	0,0000003	0,0000001
050	0,0000264	0,0000067	0,0000023	0,0000010	0,0000003	0,0000001
055	0,0000313	0,0000079	0,0000027	0,0000011	0,0000004	0,0000001
060	0,0000364	0,0000092	0,0000032	0,0000013	0,0000005	0,0000001
065	0,000042	0,0000106	0,0000037	0,0000015	0,0000005	0,0000001
070	0,000048	0,0000122	0,0000042	0,0000018	0,0000006	0,0000001
075	0,000054	0,0000137	0,0000048	0,0000020	0,0000007	0,0000002
080	0,000060	0,0000154	0,0000054	0,0000022	0,0000008	0,0000002
090	0,000074	0,0000189	0,0000066	0,0000027	0,0000009	0,0000002
0,000,10	0,000089	0,0000227	0,0000079	0,0000033	0,0000011	0,0000003
11	0,000105	0,0000268	0,0000094	0,0000039	0,0000014	0,0000003
12	0,000123	0,0000313	0,0000109	0,0000045	0,0000016	0,0000004
13	0,000141	0,0000359	0,0000124	0,0000052	0,0000019	0,0000005
14	0,000160	0,0000409	0,0000142	0,0000059	0,0000021	0,0000005
15	0,000181	0,000046	0,0000160	0,0000067	0,0000023	0,0000006
16	0,000203	0,000052	0,0000179	0,0000075	0,0000026	0,0000007
17	0,000225	0,000057	0,0000199	0,0000083	0,0000029	0,0000007
18	0,000249	0,000064	0,0000220	0,0000092	0,0000032	0,0000008
19	0,000274	0,000070	0,0000242	0,0000102	0,0000035	0,0000009
20	0,000300	0,000077	0,0000265	0,0000111	0,0000038	0,0000009
21	0,000327	0,000083	0,0000289	0,0000121	0,0000041	0,0000010
22	0,000366	0,000090	0,0000313	0,0000131	0,0000045	0,0000011
23	0,000382	0,000097	0,0000338	0,0000142	0,0000049	0,0000012
24	0,000412	0,000105	0,0000364	0,0000153	0,0000053	0,0000013
25	0,00044	0,000113	0,000039	0,0000164	0,0000057	0,0000014
26	0,00047	0,000121	0,000042	0,0000176	0,0000061	0,0000015
28	0,00054	0,000138	0,000048	0,0000201	0,0000069	0,0000017
30	0,00061	0,000156	0,000054	0,0000227	0,0000079	0,0000020
35	0,00080	0,000204	0,000071	0,0000298	0,0000103	0,0000026
0,000,40	0,00100	0,000257	0,000087	0,000037	0,0000130	0,0000033
45	0,00124	0,000316	0,000109	0,000046	0,0000160	0,0000041
50	0,00149	0,000379	0,000131	0,000055	0,0000192	0,0000049
55	0,00176	0,000447	0,000155	0,000065	0,0000226	0,0000058
60	0,00205	0,000522	0,000181	0,000076	0,0000263	0,0000067
65	0,00237	0,00060	0,000211	0,000088	0,000030	0,0000077
70	0,00276	0,00068	0,000244	0,000099	0,000034	0,0000088
75	0,00303	0,00077	0,000268	0,000112	0,000039	0,0000099
80	0,00339	0,00086	0,000299	0,000125	0,000044	0,0000111
90	0,00418	0,00107	0,000369	0,000155	0,000054	0,0000137

TABLE VIII (suite)

DÉBITS	VALEURS DE J POUR LES DIAMÈTRES DE					
	0 ^m ,06	0 ^m ,08	0 ^m ,10	0 ^m ,12	0 ^m ,15	0 ^m ,20
m ³ lit.						
0,001,00	0,0050	0,00128	0,00044	0,000186	0,000064	0,0000164
1,10	0,0059	0,00151	0,00052	0,000221	0,000076	0,0000194
1,20	0,0069	0,00176	0,00061	0,000257	0,000089	0,0000227
1,30	0,0079	0,00203	0,00070	0,000295	0,000102	0,0000261
1,40	0,0090	0,00229	0,00079	0,000333	0,000116	0,0000295
1,50	0,0102	0,00259	0,00090	0,00038	0,000131	0,0000334
1,60	0,0114	0,00291	0,00101	0,00042	0,000147	0,0000375
1,70	0,0127	0,00322	0,00112	0,00047	0,000163	0,0000416
1,80	0,0140	0,00357	0,00124	0,00052	0,000180	0,0000460
1,90	0,0154	0,00393	0,00136	0,00057	0,000199	0,0000507
0,002,00	0,0168	0,0043	0,00149	0,00062	0,000217	0,000055
2,10	0,0184	0,0047	0,00162	0,00068	0,000236	0,000060
2,20	0,0199	0,0051	0,00176	0,00074	0,000256	0,000065
2,30	0,0215	0,0055	0,00190	0,00080	0,000277	0,000071
2,40	0,0232	0,0059	0,00205	0,00086	0,000299	0,000076
2,50	0,0249	0,0064	0,00220	0,00092	0,00032	0,000082
2,60	0,0266	0,0068	0,00235	0,00099	0,00034	0,000087
2,80	0,0304	0,0077	0,00268	0,00112	0,00039	0,000100
3,00	0,0342	0,0087	0,00303	0,00127	0,00044	0,000113
3,50	0,0450	0,0115	0,00397	0,00168	0,00058	0,000148
4,00	0,057	0,0145	0,0050	0,00211	0,00079	0,000186
4,50	0,070	0,0177	0,0061	0,00259	0,00090	0,000228
5,00	0,084	0,0214	0,0074	0,00312	0,00108	0,000276
5,50	0,099	0,0252	0,0087	0,00366	0,00128	0,000325
6,00	0,115	0,0293	0,0101	0,00426	0,00148	0,000378
6,50	0,126	0,0338	0,0117	0,0049	0,00171	0,00044
7,00	0,151	0,0386	0,0134	0,0056	0,00195	0,00050
7,50	0,170	0,0434	0,0150	0,0063	0,00219	0,00056
8,00	0,191	0,0486	0,0168	0,0071	0,00245	0,00063
9,00	"	0,0597	0,0207	0,0087	0,00301	0,00077
0,010	"	0,072	0,0249	0,0104	0,0036	0,00092
11	"	0,085	0,0294	0,0124	0,0043	0,00109
12	"	0,099	0,0342	0,0143	0,0050	0,00127
13	"	0,114	0,0394	0,0166	0,0057	0,00146
14	"	0,129	0,0449	0,0189	0,0065	0,00167
15	"	0,146	0,051	0,0213	0,0074	0,00188
16	"	"	0,057	0,0238	0,0083	0,00211
17	"	"	0,063	0,0265	0,0092	0,00234
18	"	"	0,070	0,0293	0,0102	0,00259
19	"	"	0,076	0,0322	0,0112	0,00284
20	"	"	0,083	0,0350	0,0122	0,00310
21	"	"	0,091	0,0383	0,0133	0,00340
22	"	"	0,099	0,0416	0,0145	0,00369
23	"	"	0,107	0,0449	0,0157	0,00398
24	"	"	"	0,0485	0,0169	0,00430

TABLE VIII (suite)

DÉBITS		VALEURS DE J POUR LES DIAMÈTRES DE					
		0 ^m ,00	0 ^m ,08	0 ^m ,10	0 ^m ,12	0 ^m ,15	0 ^m ,20
m ³ lit.							
0,025	"	"	"	"	0,052	0,0181	0,0046
26	"	"	"	"	0,056	0,0193	0,0049
28	"	"	"	"	0,063	0,0220	0,0056
30	"	"	"	"	0,071	0,0247	0,0063
35	"	"	"	"	"	0,0324	0,0083
0,040	"	"	"	"	"	0,041	0,0105
45	"	"	"	"	"	0,051	0,0129
50	"	"	"	"	"	0,061	0,0155
55	"	"	"	"	"	"	0,0183
60	"	"	"	"	"	"	0,0213
65	"	"	"	"	"	"	0,0245
70	"	"	"	"	"	"	0,0279
75	"	"	"	"	"	"	0,0313
80	"	"	"	"	"	"	0,0351
90	"	"	"	"	"	"	0,0433

DÉBITS		VALEURS DE J POUR LES DIAMÈTRES DE					
		0 ^m ,25	0 ^m ,30	0 ^m ,35	0 ^m ,40	0 ^m ,50	0 ^m ,60
m ³ lit.							
0,000,40	0,00000111	0,00000047	0,00000023	0,00000012	0,00000004	0,00000002	0,00000002
45	0,00000140	0,00000060	0,00000028	0,00000015	0,00000005	0,00000002	0,00000002
50	0,00000169	0,00000071	0,00000034	0,00000018	0,00000006	0,00000002	0,00000002
55	0,00000199	0,00000084	0,00000040	0,00000021	0,00000007	0,00000003	0,00000003
60	0,00000232	0,00000098	0,00000047	0,00000025	0,00000008	0,00000003	0,00000003
65	0,00000268	0,00000113	0,00000054	0,00000028	0,00000010	0,00000004	0,00000004
70	0,00000304	0,00000132	0,00000062	0,00000032	0,00000012	0,00000005	0,00000005
75	0,00000343	0,00000155	0,00000070	0,00000036	0,00000013	0,00000005	0,00000005
80	0,00000384	0,00000182	0,00000078	0,00000041	0,00000014	0,00000006	0,00000006
90	0,00000474	0,00000200	0,00000096	0,00000050	0,00000017	0,00000007	0,00000007
1,00	0,0000057	0,00000240	0,00000115	0,00000060	0,00000021	0,00000009	0,00000009
1,10	0,0000067	0,00000283	0,00000136	0,00000071	0,00000024	0,00000010	0,00000010
1,20	0,0000078	0,00000330	0,00000159	0,00000083	0,00000028	0,00000012	0,00000012
1,30	0,0000090	0,00000380	0,00000183	0,00000095	0,00000033	0,00000014	0,00000014
1,40	0,0000102	0,00000430	0,00000207	0,00000108	0,00000038	0,00000016	0,00000016
1,50	0,0000115	0,0000049	0,00000234	0,00000122	0,00000043	0,00000018	0,00000018
1,60	0,0000129	0,0000054	0,00000262	0,00000137	0,00000048	0,00000020	0,00000020
1,70	0,0000144	0,0000061	0,00000291	0,00000152	0,00000053	0,00000022	0,00000022
1,80	0,0000159	0,0000067	0,00000322	0,00000168	0,00000059	0,00000024	0,00000024
1,90	0,0000175	0,0000073	0,00000355	0,00000185	0,00000065	0,00000027	0,00000027
0,002,03	0,0000191	0,0000081	0,0000039	0,00000203	0,00000071	0,00000030	0,00000030
2,10	0,0000208	0,0000088	0,0000042	0,00000221	0,00000077	0,00000033	0,00000033
2,20	0,0000226	0,0000095	0,0000046	0,00000240	0,00000084	0,00000035	0,00000035
2,30	0,0000247	0,0000103	0,0000049	0,00000260	0,00000091	0,00000038	0,00000038
2,40	0,0000264	0,0000111	0,0000053	0,00000280	0,00000098	0,00000041	0,00000041

TABLE VIII (suite)

DÉBITS	VALEURS DE J POUR LES DIAMÈTRES DE					
	0 ^m ,25	0 ^m ,30	0 ^m ,35	0 ^m ,40	0 ^m ,50	0 ^m ,60
0 ^m HL						
0,00250	0,0000283	0,0000119	0,0000057	0,0000030	0,0000105	0,0000044
2,60	0,0000302	0,0000127	0,0000061	0,0000032	0,0000113	0,0000047
2,80	0,0000315	0,0000135	0,0000064	0,0000035	0,0000128	0,0000054
3,00	0,0000339	0,0000161	0,0000079	0,0000041	0,0000145	0,0000061
3,50	0,0000510	0,0000215	0,0000103	0,0000054	0,0000199	0,0000080
4,00	0,000064	0,0000272	0,0000131	0,0000068	0,0000224	0,0000101
4,50	0,000079	0,0000337	0,0000160	0,0000084	0,000029	0,0000123
5,00	0,000095	0,0000402	0,0000193	0,0000101	0,000035	0,0000149
5,50	0,000112	0,0000473	0,0000228	0,0000119	0,000042	0,0000175
6,00	0,000130	0,0000550	0,0000264	0,0000138	0,000049	0,0000204
6,50	0,000151	0,000063	0,000030	0,0000159	0,000056	0,0000236
7,00	0,000172	0,000072	0,000035	0,0000182	0,000064	0,0000268
7,50	0,000193	0,000081	0,000039	0,0000205	0,000072	0,0000303
8,00	0,000216	0,000091	0,000044	0,0000230	0,000081	0,0000339
9,00	0,000266	0,000112	0,000054	0,0000283	0,000099	0,0000416
0,010	0,00032	0,000135	0,000065	0,000034	0,0000119	0,0000050
11	0,00038	0,000159	0,000077	0,000040	0,0000141	0,0000059
12	0,00044	0,000185	0,000089	0,000047	0,0000164	0,0000069
13	0,00051	0,000213	0,000103	0,000054	0,0000188	0,0000079
14	0,00058	0,000243	0,000117	0,000061	0,0000214	0,0000090
15	0,00065	0,000274	0,000132	0,000069	0,0000242	0,0000102
16	0,00073	0,000307	0,000148	0,000077	0,0000271	0,0000114
17	0,00081	0,000341	0,000164	0,000086	0,0000301	0,0000127
18	0,00090	0,000377	0,000181	0,000095	0,0000333	0,0000140
19	0,00099	0,000414	0,000199	0,000104	0,0000366	0,0000154
20	0,00107	0,00045	0,000217	0,000113	0,000040	0,0000168
21	0,00117	0,00049	0,000238	0,000124	0,000044	0,0000184
22	0,00127	0,00054	0,000258	0,000135	0,000047	0,0000200
23	0,00138	0,00058	0,000279	0,000146	0,000051	0,0000216
24	0,00149	0,00063	0,000301	0,000157	0,000055	0,0000233
25	0,00159	0,00067	0,000322	0,000168	0,000059	0,0000249
26	0,00170	0,00072	0,000344	0,000179	0,000063	0,0000266
28	0,00195	0,00082	0,00039	0,000206	0,000072	0,0000314
30	0,00219	0,00092	0,00044	0,000232	0,000081	0,0000352
35	0,00267	0,00121	0,00058	0,000304	0,000106	0,0000448
0,040	0,0036	0,00153	0,00073	0,00038	0,000135	0,000057
45	0,0044	0,00188	0,00090	0,00047	0,000166	0,000070
50	0,0054	0,00226	0,00108	0,00057	0,000199	0,000084
55	0,0063	0,00266	0,00128	0,00067	0,000235	0,000099
60	0,0074	0,00310	0,00149	0,00078	0,000274	0,000115
65	0,0085	0,0036	0,00171	0,00090	0,00031	0,000133
70	0,0096	0,0041	0,00195	0,00102	0,00036	0,000151
75	0,0108	0,0046	0,00219	0,00115	0,00040	0,000169
80	0,0121	0,0051	0,00246	0,00128	0,00045	0,000190
90	0,0150	0,0063	0,00303	0,00158	0,00056	0,000234

TABLE VIII (suite)

DÉBITS	VALEURS DE J POUR LES DIAMÈTRES DE					
	0 ^m ,25	0 ^m ,30	0 ^m ,35	0 ^m ,40	0 ^m ,50	0 ^m ,60
m ³ lit.						
0,100	0,0180	0,0076	0,0026	0,00191	0,00067	0,000282
110	0,0213	0,0089	0,0043	0,00226	0,00079	0,000333
120	0,0248	0,0104	0,0050	0,00233	0,00092	0,000388
130	0,0284	0,0120	0,0058	0,00242	0,00105	0,000445
140	0,0324	0,0136	0,0066	0,00253	0,00120	0,000507
150	"	0,0154	0,0074	0,00269	0,00136	0,00057
160	"	0,0173	0,0083	0,00283	0,00153	0,00064
170	"	0,0192	0,0092	0,00298	0,00170	0,00071
180	"	0,0212	0,0102	0,00313	0,00187	0,00079
190	"	0,0233	0,0112	0,00328	0,00206	0,00086
200	"	0,0255	0,0123	0,00344	0,00226	0,00095
210	"	0,0278	0,0134	0,00360	0,00245	0,00103
220	"	"	0,0145	0,00376	0,00266	0,00112
230	"	"	0,0157	0,00392	0,00288	0,00121
240	"	"	0,0169	0,00408	0,00309	0,00130
250	"	"	0,0181	0,00425	0,00333	0,00140
260	"	"	0,0194	0,00442	0,00356	0,00150
280	"	"	0,0221	0,00475	0,00414	0,00171
300	"	"	"	0,0151	0,00466	0,00193
350	"	"	"	0,0170	0,0060	0,00252
400	"	"	"	"	0,0076	0,0032
450	"	"	"	"	0,0093	0,0041
500	"	"	"	"	0,0112	0,0051
550	"	"	"	"	0,0132	0,0066
600	"	"	"	"	"	0,0085
650	"	"	"	"	"	0,0107
700	"	"	"	"	"	0,0135
750	"	"	"	"	"	0,0166
800	"	"	"	"	"	0,0201
900	"	"	"	"	"	"

DÉBITS	VALEURS DE J POUR LES DIAMÈTRES DE					
	0 ^m ,70	0 ^m ,80	0 ^m ,90	1 ^m ,00	1 ^m ,10	1 ^m ,20
m ³ lit.						
0,002,000	0,00000014	0,00000008	0,00000000	0,00000003	0,00000002	0,00000001
2, 1	0,00000016	0,00000009	0,00000005	0,00000003	0,00000002	0,00000001
2, 2	0,00000017	0,00000009	0,00000005	0,00000003	0,00000002	0,00000001
2, 3	0,00000019	0,00000010	0,00000006	0,00000003	0,00000002	0,00000001
2, 4	0,00000020	0,00000011	0,00000006	0,00000004	0,00000002	0,00000001
2, 5	0,00000021	0,00000011	0,00000006	0,00000004	0,00000002	0,00000002
2, 6	0,00000023	0,00000012	0,00000007	0,00000004	0,00000003	0,00000002
2, 8	0,00000026	0,00000014	0,00000008	0,00000004	0,00000003	0,00000002
3, 0	0,00000029	0,00000015	0,00000009	0,00000005	0,00000003	0,00000002
3, 5	0,00000038	0,00000020	0,00000011	0,00000007	0,00000004	0,00000003

HYDRAULIQUE

Table VIII (cont.)

VALEURS DE ρ EN LES DIAMÈTRES DE					
	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20
0.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.01	0.000001	0.000001	0.000001	0.000001	0.000001
0.02	0.000004	0.000004	0.000004	0.000004	0.000004
0.03	0.000009	0.000009	0.000009	0.000009	0.000009
0.04	0.000016	0.000016	0.000016	0.000016	0.000016
0.05	0.000025	0.000025	0.000025	0.000025	0.000025
0.06	0.000036	0.000036	0.000036	0.000036	0.000036
0.07	0.000049	0.000049	0.000049	0.000049	0.000049
0.08	0.000064	0.000064	0.000064	0.000064	0.000064
0.09	0.000081	0.000081	0.000081	0.000081	0.000081
0.10	0.000100	0.000100	0.000100	0.000100	0.000100
0.11	0.000121	0.000121	0.000121	0.000121	0.000121
0.12	0.000144	0.000144	0.000144	0.000144	0.000144
0.13	0.000169	0.000169	0.000169	0.000169	0.000169
0.14	0.000196	0.000196	0.000196	0.000196	0.000196
0.15	0.000225	0.000225	0.000225	0.000225	0.000225
0.16	0.000256	0.000256	0.000256	0.000256	0.000256
0.17	0.000289	0.000289	0.000289	0.000289	0.000289
0.18	0.000324	0.000324	0.000324	0.000324	0.000324
0.19	0.000361	0.000361	0.000361	0.000361	0.000361
0.20	0.000400	0.000400	0.000400	0.000400	0.000400
0.21	0.000441	0.000441	0.000441	0.000441	0.000441
0.22	0.000484	0.000484	0.000484	0.000484	0.000484
0.23	0.000529	0.000529	0.000529	0.000529	0.000529
0.24	0.000576	0.000576	0.000576	0.000576	0.000576
0.25	0.000625	0.000625	0.000625	0.000625	0.000625
0.26	0.000676	0.000676	0.000676	0.000676	0.000676
0.27	0.000729	0.000729	0.000729	0.000729	0.000729
0.28	0.000784	0.000784	0.000784	0.000784	0.000784
0.29	0.000841	0.000841	0.000841	0.000841	0.000841
0.30	0.000900	0.000900	0.000900	0.000900	0.000900
0.31	0.000961	0.000961	0.000961	0.000961	0.000961
0.32	0.001024	0.001024	0.001024	0.001024	0.001024
0.33	0.001089	0.001089	0.001089	0.001089	0.001089
0.34	0.001156	0.001156	0.001156	0.001156	0.001156
0.35	0.001225	0.001225	0.001225	0.001225	0.001225
0.36	0.001296	0.001296	0.001296	0.001296	0.001296
0.37	0.001369	0.001369	0.001369	0.001369	0.001369
0.38	0.001444	0.001444	0.001444	0.001444	0.001444
0.39	0.001521	0.001521	0.001521	0.001521	0.001521
0.40	0.001600	0.001600	0.001600	0.001600	0.001600
0.41	0.001681	0.001681	0.001681	0.001681	0.001681
0.42	0.001764	0.001764	0.001764	0.001764	0.001764
0.43	0.001849	0.001849	0.001849	0.001849	0.001849
0.44	0.001936	0.001936	0.001936	0.001936	0.001936
0.45	0.002025	0.002025	0.002025	0.002025	0.002025
0.46	0.002116	0.002116	0.002116	0.002116	0.002116
0.47	0.002209	0.002209	0.002209	0.002209	0.002209
0.48	0.002304	0.002304	0.002304	0.002304	0.002304
0.49	0.002401	0.002401	0.002401	0.002401	0.002401
0.50	0.002500	0.002500			

TABLE VIII (suite et fin)

DÉBITS	VALEURS DE J POUR LES DIAMÈTRES DE					
	0 ^m ,70	0 ^m ,80	0 ^m ,90	1 ^m ,00	1 ^m ,10	1 ^m ,20
m ³ HL.						
0,150,000	0,000275	0,000116	0,000093	0,000051	0,0000321	0,0000213
160	0,000109	0,000164	0,000093	0,000057	0,0000360	0,0000238
170	0,000133	0,000182	0,000104	0,000063	0,0000400	0,0000265
180	0,000179	0,000201	0,000115	0,000070	0,0000442	0,0000292
190	0,000116	0,000220	0,000126	0,000076	0,0000486	0,0000322
200	0,00016	0,000242	0,000138	0,000081	0,000053	0,0000353
210	0,00050	0,000263	0,000150	0,000091	0,000058	0,0000384
220	0,00054	0,000285	0,000163	0,000099	0,000063	0,0000416
230	0,00058	0,000308	0,000176	0,000107	0,000068	0,0000450
240	0,00062	0,000331	0,000189	0,000115	0,000073	0,0000484
250	0,00067	0,00036	0,000201	0,000124	0,000079	0,000052
260	0,00072	0,00038	0,000219	0,000132	0,000084	0,000056
280	0,00082	0,00041	0,000249	0,000151	0,000096	0,000064
300	0,00093	0,00049	0,000281	0,000171	0,000108	0,000072
350	0,00121	0,00064	0,000367	0,000223	0,000141	0,000094
400	0,00153	0,00081	0,00046	0,00028	0,000179	0,000118
450	0,00188	0,00100	0,00057	0,00035	0,000220	0,000145
500	0,00226	0,00120	0,00060	0,00042	0,000264	0,000175
550	0,00267	0,00141	0,00081	0,00049	0,000312	0,000207
600	0,00312	0,00165	0,00094	0,00057	0,000364	0,000241
650	0,00358	0,00188	0,00108	0,00066	0,00042	0,000277
700	0,00408	0,00216	0,00124	0,00075	0,00048	0,000315
750	0,00461	0,00244	0,00140	0,00085	0,00054	0,000356
800	0,00515	0,00273	0,00156	0,00093	0,00060	0,000399
900	0,00633	0,00335	0,00192	0,00116	0,00074	0,000490
1,000,000	0,00762	0,00401	0,00231	0,00140	0,00089	0,00059
1,100	0,00899	0,00475	0,00256	0,00165	0,00105	0,00070
1,200	"	0,00557	0,00302	0,00193	0,00123	0,00081
1,300	"	0,00638	0,00348	0,00221	0,00141	0,00093
1,400	"	0,00727	0,00416	0,00252	0,00160	0,00106
1,500	"	0,00818	0,00469	0,00284	0,00181	0,00120
1,600	"	"	0,00510	0,00319	0,00203	0,00134
1,700	"	"	0,00578	0,00354	0,00225	0,00149
1,800	"	"	0,00647	0,00392	0,00249	0,00165
1,900	"	"	0,00711	0,00431	0,00274	0,00181
2,000	"	"	"	0,00472	0,00300	0,00199
2,100	"	"	"	0,00514	0,00327	0,00216
2,200	"	"	"	0,00557	0,00354	0,00234
2,300	"	"	"	0,00601	0,00382	0,00252
2,400	"	"	"	"	0,00412	0,00272
2,500	"	"	"	"	0,00442	0,00292
2,600	"	"	"	"	0,00473	0,00313
2,800	"	"	"	"	0,00539	0,00357
3,000	"	"	"	"	"	0,00403
3,500	"	"	"	"	"	"

TABLE IX

Débit d'une conduite en fonction de la vitesse et du diamètre

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} U.$$

VITESSES en mètres par SECONDE	DÉBITS EN LITRES PAR SECONDE DANS UNE CONDUITE D'UN DIAMÈTRE DE :					
	PETITS DIAMÈTRES					
	0 ^m ,06	0 ^m ,10	0 ^m ,15	0 ^m ,20	0 ^m ,25	0 ^m ,30
m.	lit.	lit.	lit.	lit.	lit.	lit.
0,10	0,2897	0,7854	1,7671	3,1416	4,909	7,069
0,20	0,555	1,5708	3,5343	6,2832	9,817	14,137
0,30	0,8482	2,3565	5,394	9,4248	14,726	21,206
0,40	1,1410	3,1416	7,0686	12,5664	19,635	28,274
0,50	1,4337	3,9270	8,8357	15,7080	24,544	35,343
0,60	1,695	4,7124	10,6029	18,8495	29,452	42,412
0,70	1,9592	5,4978	12,3700	21,9911	34,361	49,480
0,80	2,2230	6,2832	14,1372	25,1327	39,270	56,549
0,90	2,5447	7,0686	15,9053	28,2743	44,178	63,617
VITESSES en mètres par SECONDE	GRANDS DIAMÈTRES					
	0 ^m ,40	0 ^m ,50	0 ^m ,60	0 ^m ,80	1 ^m ,00	1 ^m ,10
	lit.	lit.	lit.	lit.	lit.	lit.
0,10	12,566	19,635	28,274	50,27	78,54	95,03
0,20	25,131	39,270	56,549	100,53	157,08	190,07
0,30	37,699	58,905	84,823	150,80	235,62	285,10
0,40	50,265	78,540	113,098	201,06	314,16	380,13
0,50	62,832	98,175	141,372	251,33	392,70	475,17
0,60	75,398	117,810	169,646	301,59	471,24	570,20
0,70	87,965	137,444	197,921	351,86	549,78	665,23
0,80	100,531	157,079	226,195	402,12	628,32	760,27
0,90	113,097	176,814	254,470	452,39	706,86	855,30

TABLE X

*Vitesse de l'eau dans une conduite en fonction du débit
et du diamètre*

$$U = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

DÉBITS en litres par SECONDE	VITESSES MOYENNES EN MÈTRES PAR SECONDE DANS UNE CONDUITE D'UN DIAMÈTRE DE :					
	PETITS DIAMÈTRES					
	0 ^m ,06	0 ^m ,08	0 ^m ,10	0 ^m ,12	0 ^m ,15	0 ^m ,20
lit.						
1	0,35368	0,19894	0,12732	0,08842	0,05659	0,03183
2	0,50745	0,27789	0,25565	0,17684	0,11318	0,06366
3	1,06103	0,59683	0,38197	0,26526	0,16176	0,09549
4	1,41471	0,79577	0,50933	0,34368	0,22635	0,12732
5	1,76838	0,99471	0,61632	0,44710	0,28294	0,15916
6	2,12206	1,19366	0,76494	0,53051	0,33953	0,19099
7	2,47574	1,39260	0,89127	0,61893	0,39612	0,22282
8	2,82942	1,59154	1,01859	0,70735	0,45270	0,25465
9	3,18309	1,79049	1,14592	0,79577	0,50929	0,28648
DÉBITS en litres par SECONDE	DIAMÈTRES MOYENS					
	0 ^m ,25	0 ^m ,30	0 ^m ,35	0 ^m ,40	0 ^m ,50	0 ^m ,60
lit.						
10	0,20372	0,14147	0,10394	0,07958	0,05093	0,03537
20	0,40744	0,28294	0,20788	0,15915	0,10186	0,07073
30	0,61115	0,42441	0,31181	0,23873	0,15279	0,10610
40	0,71487	0,56589	0,41575	0,31831	0,20362	0,14147
50	1,01859	0,70735	0,51969	0,39789	0,25475	0,17684
60	1,22231	0,84882	0,62363	0,47746	0,30558	0,21221
70	1,42603	0,99029	0,72757	0,55794	0,35651	0,24757
80	1,62974	1,13176	0,83150	0,63662	0,40744	0,28294
90	1,83346	1,27323	0,93544	0,71619	0,45836	0,31831

TABLE XI (A)

*Donnant la transformation des litres par seconde
en litres par minute; en mètres cubes par heure, en mètres cubes
par jour et réciproquement*

LITRES par seconde	LITRES par minute	mètres cubes par heure	mètres cubes par jour	LITRES par seconde	LITRES par minute	mètres cubes par heure	mètres cubes par jour
1	60	3,6	86,4	75	4.500	270,0	6480,0
2	120	7,2	172,8	80	4.800	288,0	6912,0
3	180	10,8	259,2	85	5.100	306,0	7344,0
4	240	14,4	345,6	90	5.400	324,0	7776,0
5	300	18,0	432,0	95	5.700	342,0	8208,0
6	360	21,6	518,4	100	6.000	360,0	8640,0
7	420	25,2	604,8	110	6.600	396,0	9504,0
8	480	28,8	691,2	120	7.200	432,0	10368,0
9	540	32,4	777,6	130	7.800	468,0	11232,0
10	600	36,0	864,0	140	8.400	504,0	12096,0
12	720	43,2	1036,8	150	9.000	540,0	12960,0
14	840	50,4	1209,6	160	9.600	576,0	13824,0
16	960	57,6	1382,4	170	10.200	612,0	14688,0
18	1.080	64,8	1555,2	180	10.800	648,0	15552,0
20	1.200	72,0	1728,0	190	11.400	684,0	16416,0
25	1.500	90,0	2160,0	200	12.000	720,0	17280,0
30	1.800	108,0	2592,0	300	18.000	1080,0	25920,0
35	2.100	126,0	3024,0	400	24.000	1440,0	34560,0
40	2.400	144,0	3456,0	500	30.000	1800,0	43200,0
45	2.700	162,0	3888,0	600	36.000	2160,0	51840,0
50	3.000	180,0	4320,0	700	42.000	2520,0	60480,0
55	3.300	198,0	4752,0	800	48.000	2880,0	69120,0
60	3.600	216,0	5184,0	900	54.000	3240,0	77760,0
65	3.900	234,0	5616,0	1.000	60.000	3600,0	86400,0
70	4.200	252,0	6048,0				

TABLE XI (B)

*Donnant la transformation des litres par seconde
en litres par minute ; en mètres cubes par heure, en mètres cubes
par jour et réciproquement*

LITRES par minute	MÈTRES CUBES par heure	MÈTRES CUBES par jour	LITRES par seconde	LITRES par minute	MÈTRES CUBES par heure	MÈTRES CUBES par jour	LITRES par seconde
1	0,060	1,440	0,0166	75	4,500	108,000	1,2500
2	0,120	2,880	0,0333	80	4,800	115,200	1,3333
3	0,180	4,320	0,0500	85	5,100	122,400	1,4166
4	0,240	5,760	0,0666	90	5,400	129,600	1,5000
5	0,300	7,200	0,0833	95	5,700	136,800	1,5833
6	0,360	8,640	0,1000	100	6,000	144,000	1,6666
7	0,420	10,080	0,1166	110	6,600	158,400	1,8333
8	0,480	11,520	0,1333	120	7,200	172,800	2,0000
9	0,540	12,960	0,1500	130	7,800	187,200	2,1666
10	0,600	14,400	0,1666	140	8,400	201,600	2,3333
12	0,720	17,280	0,2000	150	9,000	216,000	2,5000
14	0,840	20,160	0,2333	160	9,600	230,400	2,6666
16	0,960	23,040	0,2666	170	10,200	244,800	2,8333
18	1,080	25,920	0,3000	180	10,800	259,200	3,0000
20	1,200	28,800	0,3333	190	11,400	273,600	3,1666
25	1,500	36,000	0,4166	200	12,000	288,000	3,3333
30	1,800	43,200	0,5000	300	18,000	432,000	5,0000
35	2,100	50,400	0,5833	400	24,000	576,000	6,6666
40	2,400	57,600	0,6666	500	30,000	720,000	8,3333
45	2,700	64,800	0,7500	600	36,000	864,000	10,0000
50	3,000	72,000	0,8333	700	42,000	1008,000	11,6666
55	3,300	79,200	0,9166	800	48,000	1152,000	13,3333
60	3,600	86,400	1,0000	900	54,000	1296,000	15,0000
65	3,900	93,600	1,0833	1.000	60,000	1440,000	16,6666
70	4,200	100,800	1,1666				

TABLE VIII (suite)

DEBITS		VALEURS DE J POUR LES DIAMÈTRES DE					
		0 ^m ,70	0 ^m ,80	0 ^m ,90	1 ^m ,00	1 ^m ,10	1 ^m ,20
m ³ lit.							
0,001,000		0,00000048	0,00000025	0,00000014	0,00000009	0,00000006	0,00000004
4, 5	0,00000049	0,00000031	0,00000018	0,00000011	0,00000007	0,00000005	0,00000003
5, 0	0,00000072	0,00000038	0,00000021	0,00000013	0,00000008	0,00000005	0,00000003
5, 5	0,00000085	0,00000045	0,00000025	0,00000015	0,00000010	0,00000007	0,00000004
6, 0	0,00000098	0,00000052	0,00000030	0,00000018	0,00000012	0,00000008	0,00000005
6, 5	0,00000114	0,00000060	0,00000034	0,00000021	0,00000013	0,00000009	0,00000006
7, 0	0,00000129	0,00000068	0,00000039	0,00000024	0,00000015	0,00000010	0,00000007
7, 5	0,00000145	0,00000077	0,00000044	0,00000027	0,00000017	0,00000011	0,00000008
8, 0	0,00000163	0,00000086	0,00000049	0,00000030	0,00000019	0,00000013	0,00000009
9, 0	0,00000180	0,00000106	0,00000060	0,00000037	0,00000024	0,00000016	0,00000011
0,010,000		0,00000241	0,00000127	0,00000073	0,00000044	0,00000028	0,00000019
11	0,00000285	0,00000151	0,00000087	0,00000052	0,00000033	0,00000022	0,00000015
12	0,00000332	0,00000176	0,00000101	0,00000061	0,00000039	0,00000026	0,00000018
13	0,00000381	0,00000202	0,00000115	0,00000070	0,00000045	0,00000030	0,00000021
14	0,00000434	0,00000230	0,00000131	0,00000080	0,00000051	0,00000034	0,00000024
15	0,00000491	0,00000260	0,00000148	0,00000090	0,00000058	0,00000039	0,00000027
16	0,00000550	0,00000291	0,00000166	0,00000101	0,00000065	0,00000044	0,00000031
17	0,00000611	0,00000323	0,00000185	0,00000112	0,00000072	0,00000048	0,00000035
18	0,00000674	0,00000357	0,00000204	0,00000124	0,00000079	0,00000053	0,00000039
19	0,00000740	0,00000392	0,00000224	0,00000136	0,00000088	0,00000058	0,00000043
20	0,00000811	0,0000043	0,00000245	0,00000148	0,00000095	0,00000063	0,00000048
21	0,00000888	0,0000047	0,00000268	0,00000162	0,00000104	0,00000069	0,00000053
22	0,00000966	0,0000051	0,00000291	0,00000176	0,00000113	0,00000075	0,00000058
23	0,00001044	0,0000055	0,00000315	0,00000191	0,00000123	0,00000082	0,00000063
24	0,0000112	0,0000059	0,00000339	0,00000206	0,00000132	0,00000088	0,00000068
25	0,0000120	0,0000064	0,0000036	0,00000220	0,00000142	0,00000095	0,00000073
26	0,0000128	0,0000068	0,0000039	0,00000235	0,00000152	0,00000101	0,00000078
28	0,0000146	0,0000077	0,0000044	0,00000269	0,00000173	0,00000115	0,00000091
30	0,0000166	0,0000088	0,0000050	0,00000302	0,00000196	0,00000131	0,00000105
35	0,0000216	0,0000114	0,0000065	0,00000396	0,00000255	0,00000170	0,00000139
40	0,00027	0,0000144	0,0000083	0,0000050	0,0000032	0,00000211	0,00000170
45	0,00033	0,0000177	0,0000102	0,0000062	0,0000039	0,00000259	0,00000219
50	0,00040	0,0000214	0,0000122	0,0000074	0,0000047	0,00000312	0,00000271
55	0,00048	0,0000252	0,0000144	0,0000087	0,0000056	0,00000368	0,00000328
60	0,00055	0,0000293	0,0000168	0,0000102	0,0000065	0,00000428	0,00000389
65	0,00064	0,0000338	0,0000193	0,0000117	0,0000074	0,00000493	0,00000453
70	0,00073	0,0000385	0,0000220	0,0000133	0,0000085	0,00000561	0,00000521
75	0,00081	0,0000432	0,0000248	0,0000150	0,0000095	0,00000630	0,00000590
80	0,00091	0,0000485	0,0000277	0,0000168	0,0000107	0,00000707	0,00000663
90	0,000113	0,0000599	0,0000341	0,0000207	0,0000132	0,00000872	0,00000821
0,100		0,000136	0,000072	0,000041	0,0000249	0,0000159	0,0000103
110	0,000160	0,000082	0,000048	0,0000294	0,0000187	0,0000125	0,0000085
120	0,000186	0,000099	0,000057	0,0000343	0,0000218	0,0000144	0,0000103
130	0,000214	0,000113	0,000065	0,0000393	0,0000250	0,0000165	0,0000121
140	0,000244	0,000129	0,000074	0,0000448	0,0000285	0,0000188	0,0000143

TABLE VIII (suite et fin)

DÉBITS	VALEURS DE J POUR LES DIAMÈTRES DE					
	0 ^m ,70	0 ^m ,80	0 ^m ,90	1 ^m ,00	1 ^m ,10	1 ^m ,20
m ³ Hl.						
0,150,000	0,000275	0,000146	0,000083	0,000051	0,0000321	0,0000213
160	0,000309	0,000164	0,000093	0,000057	0,0000350	0,0000238
170	0,000343	0,000182	0,000104	0,000063	0,0000369	0,0000255
180	0,000379	0,000201	0,000115	0,000070	0,0000388	0,0000272
190	0,000416	0,000220	0,000126	0,000076	0,0000406	0,0000289
200	0,00046	0,000242	0,000138	0,000084	0,000053	0,0000353
210	0,00050	0,000263	0,000150	0,000091	0,000058	0,0000384
220	0,00054	0,000285	0,000163	0,000099	0,000063	0,0000416
230	0,00058	0,000308	0,000176	0,000107	0,000068	0,0000450
240	0,00062	0,000331	0,000189	0,000115	0,000073	0,0000484
250	0,00067	0,00036	0,000204	0,000124	0,000079	0,000052
260	0,00072	0,00038	0,000219	0,000132	0,000084	0,000056
280	0,00082	0,00044	0,000249	0,000151	0,000098	0,000064
300	0,00093	0,00049	0,000281	0,000171	0,000108	0,000072
350	0,00121	0,00064	0,000367	0,000223	0,000141	0,000094
400	0,00153	0,00081	0,00046	0,00028	0,000170	0,000118
450	0,00188	0,00100	0,00057	0,00035	0,000220	0,000145
500	0,00226	0,00120	0,00060	0,00042	0,000264	0,000175
550	0,00267	0,00141	0,00081	0,00049	0,000312	0,000207
600	0,00312	0,00165	0,00094	0,00057	0,000364	0,000241
650	0,00358	0,00188	0,00108	0,00066	0,00042	0,000277
700	0,00408	0,00216	0,00124	0,00075	0,00048	0,000315
750	0,00461	0,00244	0,00140	0,00085	0,00054	0,000356
800	0,00515	0,00273	0,00156	0,00095	0,00060	0,000399
900	0,00633	0,00335	0,00192	0,00116	0,00074	0,000490
1,000,000	0,00762	0,00404	0,00231	0,00140	0,00089	0,00059
1,100	0,00899	0,00475	0,00256	0,00165	0,00105	0,00070
1,200	"	0,00557	0,00302	0,00193	0,00123	0,00081
1,300	"	0,00638	0,00348	0,00221	0,00141	0,00093
1,400	"	0,00727	0,00416	0,00252	0,00160	0,00106
1,500	"	0,00818	0,00469	0,00284	0,00181	0,00120
1,600	"	"	0,00510	0,00319	0,00203	0,00134
1,700	"	"	0,00578	0,00354	0,00225	0,00149
1,800	"	"	0,00647	0,00392	0,00249	0,00165
1,900	"	"	0,00711	0,00431	0,00274	0,00181
2,000	"	"	"	0,00472	0,00300	0,00199
2,100	"	"	"	0,00514	0,00327	0,00216
2,200	"	"	"	0,00557	0,00354	0,00234
2,300	"	"	"	0,00601	0,00382	0,00252
2,400	"	"	"	"	0,00412	0,00272
2,500	"	"	"	"	0,00442	0,00292
2,600	"	"	"	"	0,00473	0,00313
2,800	"	"	"	"	0,00539	0,00357
3,000	"	"	"	"	"	0,00403
3,500	"	"	"	"	"	"

TABLE IX

Débit d'une conduite en fonction de la vitesse et du diamètre

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} U.$$

VITESSES en mètres par SECONDE	DÉBITS EN LITRES PAR SECONDE DANS UNE CONDUITE D'UN DIAMÈTRE DE :					
	PETITS DIAMÈTRES					
	0 ^m ,06	0 ^m ,10	0 ^m ,15	0 ^m ,20	0 ^m ,25	0 ^m ,30
m.	lit.	lit.	lit.	lit.	lit.	lit.
0,10	0,2827	0,7854	1,7671	3,1416	4,909	7,069
0,20	0,5655	1,5708	3,5343	6,2832	9,817	14,137
0,30	0,8482	2,3565	5,3014	9,4248	14,726	21,206
0,40	1,1310	3,1416	7,0686	12,5664	19,635	28,274
0,50	1,4137	3,9270	8,8357	15,7080	24,544	35,343
0,60	1,6965	4,7124	10,6029	18,8495	29,452	42,412
0,70	1,9792	5,4978	12,3700	21,9911	34,361	49,480
0,80	2,2620	6,2832	14,1372	25,1327	39,270	56,549
0,90	2,5447	7,0686	15,9053	28,2743	44,178	63,617
VITESSES en mètres par SECONDE	GRANDS DIAMÈTRES					
	0 ^m ,40	0 ^m ,50	0 ^m ,60	0 ^m ,80	1 ^m ,00	1 ^m ,10
	lit.	lit.	lit.	lit.	lit.	lit.
0,10	12,566	19,635	28,274	50,27	78,54	95,03
0,20	25,133	39,270	56,549	100,53	157,08	190,07
0,30	37,699	58,905	84,823	150,80	235,62	285,10
0,40	50,265	78,640	113,098	201,06	314,16	380,13
0,50	62,832	98,175	141,372	251,33	392,70	475,17
0,60	75,398	117,810	169,646	301,59	471,24	570,20
0,70	87,965	137,444	197,921	351,86	549,78	665,23
0,80	100,531	157,079	226,195	402,12	628,32	760,27
0,90	113,097	176,814	254,470	452,39	706,86	855,30

TABLE X

*Vitesse de l'eau dans une conduite en fonction du débit
et du diamètre*

$$U = \frac{4Q}{\pi D^3}$$

DÉBITS en litres par SECONDE	VITESSES MOYENNES EN MÈTRES PAR SECONDE DANS UNE CONDUITE D'UN DIAMÈTRE DE :					
	PETITS DIAMÈTRES					
	0 ^m ,06	0 ^m ,08	0 ^m ,10	0 ^m ,12	0 ^m ,15	0 ^m ,20
	lit.					
1	0,35238	0,19894	0,12732	0,08842	0,05659	0,03183
2	0,70475	0,39789	0,25465	0,17684	0,11318	0,06366
3	1,06103	0,59683	0,38197	0,26526	0,16476	0,09549
4	1,41471	0,79577	0,50930	0,3368	0,22635	0,12732
5	1,76838	0,99471	0,61632	0,44210	0,28294	0,15916
6	2,12206	1,19366	0,76344	0,53051	0,33953	0,19099
7	2,47574	1,39260	0,89127	0,61893	0,39612	0,22282
8	2,82942	1,59154	1,01859	0,70735	0,45270	0,25465
9	3,18309	1,79049	1,14592	0,79577	0,50929	0,28648

DÉBITS en litres par SECONDE	DIAMÈTRES MOYENS					
	0 ^m ,25	0 ^m ,30	0 ^m ,35	0 ^m ,40	0 ^m ,50	0 ^m ,60
lit.						
10	0,20372	0,14147	0,10394	0,07958	0,05093	0,02537
20	0,40744	0,28294	0,20788	0,15915	0,10186	0,05073
30	0,61115	0,42441	0,31181	0,23873	0,15279	0,10610
40	0,71487	0,56588	0,41575	0,31831	0,20362	0,14147
50	0,81859	0,70735	0,51969	0,39789	0,25475	0,17684
60	0,92231	0,84882	0,62353	0,47746	0,31558	0,21221
70	1,02603	0,99029	0,72757	0,55794	0,35651	0,24757
80	1,12974	1,13176	0,83150	0,63662	0,40744	0,28294
90	1,23346	1,27323	0,93544	0,71619	0,45836	0,31831

TABLE XI (A)

*Donnant la transformation des litres par seconde
en litres par minute; en mètres cubes par heure, en mètres cubes
par jour et réciproquement*

LITRES par seconde	LITRES par minute	MÈTRES CUBES par heure	MÈTRES CUBES par jour	LITRES par seconde	LITRES par minute	MÈTRES CUBES par heure	MÈTRES CUBES par jour
1	60	3,6	86,4	75	4.500	270,0	6480,0
2	120	7,2	172,8	80	4.800	288,0	6912,0
3	180	10,8	259,2	85	5.100	306,0	7344,0
4	240	14,4	345,6	90	5.400	324,0	7776,0
5	300	18,0	432,0	95	5.700	342,0	8208,0
6	360	21,6	518,4	100	6.000	360,0	8640,0
7	420	25,2	604,8	110	6.600	396,0	9504,0
8	480	28,8	691,2	120	7.200	432,0	10368,0
9	540	32,4	777,6	130	7.800	468,0	11232,0
10	600	36,0	864,0	140	8.400	504,0	12096,0
12	720	43,2	1036,8	150	9.000	540,0	12960,0
14	840	50,4	1209,6	160	9.600	576,0	13824,0
16	960	57,6	1382,4	170	10.200	612,0	14688,0
18	1.080	64,8	1555,2	180	10.800	648,0	15552,0
20	1.200	72,0	1728,0	190	11.400	684,0	16416,0
25	1.500	90,0	2160,0	200	12.000	720,0	17280,0
30	1.800	108,0	2592,0	300	18.000	1080,0	25920,0
35	2.100	126,0	3024,0	400	24.000	1440,0	34560,0
40	2.400	144,0	3456,0	500	30.000	1800,0	43200,0
45	2.700	162,0	3888,0	600	36.000	2160,0	51840,0
50	3.000	180,0	4320,0	700	42.000	2520,0	60480,0
55	3.300	198,0	4752,0	800	48.000	2880,0	69120,0
60	3.600	216,0	5184,0	900	54.000	3240,0	77760,0
65	3.900	234,0	5616,0	1.000	60.000	3600,0	86400,0
70	4.200	252,0	6048,0				

TABLE XI (B)

*Donnant la transformation des litres par seconde
en litres par minute ; en mètres cubes par heure, en mètres cubes
par jour et réciproquement*

LITRES par minute	MÈTRES CUBES par heure	MÈTRES CUBES par jour	LITRES par seconde	LITRES par minute	MÈTRES CUBES par heure	MÈTRES CUBES par jour	LITRES par seconde
1	0,060	1,440	0,0166	75	4,500	108,000	1,2500
2	0,120	2,880	0,0333	80	4,800	115,200	1,3333
3	0,180	4,320	0,0500	85	5,100	122,400	1,4166
4	0,240	5,760	0,0666	90	5,400	129,600	1,5000
5	0,300	7,200	0,0833	95	5,700	136,800	1,5833
6	0,360	8,640	0,1000	100	6,000	144,000	1,6666
7	0,420	10,080	0,1166	110	6,600	158,400	1,8333
8	0,480	11,520	0,1333	120	7,200	172,800	2,0000
9	0,540	12,960	0,1500	130	7,800	187,200	2,1666
10	0,600	14,400	0,1666	140	8,400	201,600	2,3333
12	0,720	17,280	0,2000	150	9,000	216,000	2,5000
14	0,840	20,160	0,2333	160	9,600	230,400	2,6666
16	0,960	23,040	0,2666	170	10,200	244,800	2,8333
18	1,080	25,920	0,3000	180	10,800	259,200	3,0000
20	1,200	28,800	0,3333	190	11,400	273,600	3,1666
25	1,500	36,000	0,4166	200	12,000	288,000	3,3333
30	1,800	43,200	0,5000	300	18,000	432,000	5,0000
35	2,100	50,400	0,5833	400	24,000	576,000	6,6666
40	2,400	57,600	0,6666	500	30,000	720,000	8,3333
45	2,700	64,800	0,7500	600	36,000	864,000	10,0000
50	3,000	72,000	0,8333	700	42,000	1008,000	11,6666
55	3,300	79,200	0,9166	800	48,000	1152,000	13,3333
60	3,600	86,400	1,0000	900	54,000	1297,000	15,0000
65	3,900	93,600	1,0833	1.000	60,000	1440,000	16,6666
70	4,200	100,800	1,1666				

TABLE XI (C)

*Donnant la transformation des litres par seconde
en litres par minute ; en mètres cubes par heure, en mètres cubes
par jour et réciproquement*

MÈTRES CUBES par heure	MÈTRES CUBES par jour	LITRES par seconde	LITRES par minute	MÈTRES CUBES par heure	MÈTRES CUBES par jour	LITRES par seconde	LITRES par minute
1	24	0,277	16,66	75	1,800	20,833	1250,00
2	48	0,555	33,33	80	1,920	22,222	1333,33
3	72	0,833	50,00	85	2,010	23,610	1416,66
4	96	1,111	66,66	90	2,160	25,000	1500,00
5	120	1,388	83,33	95	2,280	26,388	1583,33
6	144	1,666	100,00	100	2,400	27,777	1666,66
7	168	1,944	116,66	110	2,640	30,555	1833,33
8	192	2,222	133,33	120	2,880	33,333	2000,00
9	216	2,500	150,00	130	3,120	36,111	2166,66
10	240	2,777	166,66	140	3,360	38,888	2333,33
12	288	3,333	200,00	150	3,600	41,666	2500,00
14	336	3,888	233,33	160	3,840	44,444	2666,66
16	384	4,444	266,66	170	4,080	47,222	2833,33
18	432	5,000	300,00	180	4,320	50,000	3000,00
20	480	5,555	333,33	190	4,560	52,777	3166,66
25	600	6,944	416,66	200	4,800	55,555	3333,33
30	720	8,333	500,00	300	7,200	83,333	5000,00
35	840	9,722	583,33	400	9,600	111,111	6666,66
40	960	11,111	666,66	500	12,000	138,888	8333,33
45	1,080	12,500	750,00	600	14,400	166,666	10000,00
50	1,200	13,888	833,33	700	16,800	194,444	11666,66
55	1,320	15,277	916,66	800	19,200	222,222	13333,33
60	1,440	16,666	1000,00	900	21,600	250,000	15000,00
65	1,560	18,055	1083,33	1,000	24,000	277,777	16666,66
70	1,680	19,443	1266,66				

TABLE XI (D)

*Donnant la transformation des litres par seconde
en litres par minute ; en mètres cubes par heure, en mètres cubes
par jour et réciproquement*

MÈTRES CUBES par jour	LITRES par seconde	LITRES par minute	MÈTRES CUBES par heure	MÈTRES CUBES par jour	LITRES par seconde	LITRES par minute	MÈTRES CUBES par heure
1	0,0115	0,6944	0,0416	75	0,8680	52,0833	3,1250
2	0,0231	1,3888	0,0833	80	0,9259	55,5555	3,3333
3	0,0347	2,0833	0,1250	85	0,9837	59,0277	3,5416
4	0,0462	2,7777	0,1666	90	1,0416	62,5000	3,7500
5	0,0578	3,4722	0,2083	95	1,0995	65,9723	3,9583
6	0,0694	4,1666	0,2500	100	1,1574	69,4444	4,1666
7	0,0810	4,8611	0,2916	110	1,2731	73,3888	4,5833
8	0,0925	5,5555	0,3333	120	1,3888	83,3333	5,0000
9	0,1041	6,2500	0,3750	130	1,5045	91,2777	5,4166
10	0,1157	6,9444	0,4166	140	1,6203	97,2222	5,8333
12	0,1388	8,3333	0,5000	150	1,7360	104,1666	6,2500
14	0,1620	9,7222	0,5833	160	1,8518	111,1111	6,6666
16	0,1851	11,1111	0,6666	170	1,9675	118,0555	7,0833
18	0,2083	12,5000	0,7500	180	2,0833	125,0000	7,5000
20	0,2314	13,8888	0,8333	190	2,1990	131,9444	7,9166
25	0,2893	17,3611	1,0416	200	2,3148	138,8888	8,3333
30	0,3472	20,8333	1,2500	300	3,4722	208,3333	12,5000
35	0,4051	24,3055	1,4583	400	4,6296	287,7777	16,6666
40	0,4629	27,7777	1,6666	500	5,7870	347,2222	20,8333
45	0,5208	31,2500	1,8750	600	6,9444	416,6666	25,0000
50	0,5787	34,7222	2,0833	700	8,1018	486,1111	29,1666
55	0,6365	38,1944	2,2916	800	9,2592	555,5555	33,3333
60	0,6944	41,6666	2,5000	900	10,4166	625,0000	37,5000
65	0,7523	45,1388	2,7083	1.000	11,5740	694,4444	41,6666
70	0,8101	48,6111	2,9166				

TABLE XII
Fonctions usuelles du diamètre

D diamètre	\sqrt{D}	D ²	D ³	$\sqrt{D^5}$	$\frac{1}{D}$	$\frac{1}{D^5}$
0,010	0,100	0,0001	0,00000001	0,000010	100,00	10000000000
0,020	0,141	0,0004	0,00000008	0,000057	50,00	3125000000
0,027	0,167	0,0007	0,00000014	0,000120	37,03	70388636
0,030	0,173	0,0009	0,00000024	0,000155	33,33	41152270
0,040	0,200	0,0016	0,00000064	0,000320	25,00	9765625
0,050	0,224	0,0025	0,00000125	0,000559	20,00	3200000
0,055	0,232	0,0029	0,00000159	0,000678	18,52	2177866
0,060	0,245	0,0036	0,00000216	0,000822	16,67	1287009
0,070	0,265	0,0049	0,00000343	0,001236	14,29	594990
0,080	0,283	0,0064	0,00000512	0,001810	12,50	305175
0,081	0,285	0,0066	0,00000536	0,001867	12,35	284015
0,090	0,300	0,0081	0,00000729	0,002430	11,11	169351
0,100	0,316	0,0100	0,00001000	0,003162	10,00	100000
0,108	0,329	0,0117	0,00001328	0,003832	9,26	68105
0,110	0,332	0,0121	0,00001610	0,004013	9,09	62092
0,120	0,346	0,0144	0,00002160	0,004988	8,33	40187
0,130	0,361	0,0169	0,00002713	0,006033	7,69	26932
0,135	0,367	0,0182	0,00003066	0,006494	7,41	22313
0,140	0,374	0,0196	0,00003442	0,006934	7,14	18593
0,150	0,387	0,0225	0,00004095	0,008174	6,67	13168
0,160	0,400	0,0256	0,00004915	0,010240	6,25	9536
0,162	0,402	0,0262	0,00005154	0,010561	6,17	8965
0,170	0,412	0,0289	0,00005917	0,011916	5,88	7042
0,180	0,424	0,0324	0,00006856	0,013746	5,55	5292
0,190	0,436	0,0361	0,00007961	0,015735	5,26	3750
0,200	0,447	0,0400	0,00009200	0,017888	5,00	3125
0,210	0,458	0,0441	0,00010541	0,020209	4,76	2748
0,216	0,463	0,0467	0,00011160	0,021587	4,63	2171
0,220	0,469	0,0484	0,00011663	0,022702	4,55	1940
0,230	0,480	0,0529	0,00013634	0,025370	4,35	1553
0,24	0,490	0,0576	0,00015696	0,0282	4,17	1255
0,25	0,500	0,0625	0,00017677	0,0312	4,00	1024
0,26	0,510	0,0676	0,00019888	0,0345	3,85	842
0,27	0,520	0,0729	0,00022335	0,0379	3,70	697
0,28	0,529	0,0784	0,00025011	0,0415	3,57	581
0,29	0,538	0,0841	0,00027951	0,0453	3,45	488
0,30	0,547	0,0900	0,00031110	0,0495	3,33	418
0,31	0,556	0,0961	0,00034503	0,0535	3,23	349
0,32	0,565	0,1024	0,00038135	0,0579	3,13	298
0,325	0,570	0,106	0,00039626	0,0602	3,07	276
0,33	0,574	0,109	0,00041314	0,0626	3,03	256
0,34	0,583	0,116	0,00043144	0,0675	2,94	220
0,35	0,592	0,122	0,00045125	0,0725	2,86	190
0,36	0,600	0,130	0,00047267	0,0778	2,78	165
0,37	0,608	0,137	0,00049564	0,0833	2,70	144
0,38	0,616	0,144	0,00051924	0,0890	2,63	126
0,39	0,624	0,152	0,00054352	0,0950	2,57	111
0,40	0,632	0,160	0,00056840	0,101	2,50	98
0,41	0,640	0,168	0,00059389	0,108	2,44	86
0,42	0,648	0,176	0,00061999	0,114	2,38	77
0,43	0,656	0,185	0,00064671	0,121	2,33	68,02
0,44	0,663	0,194	0,00067402	0,128	2,27	60,64

TABLE XII (suite)

D diamètre	\sqrt{D}	D ²	D ³	$\sqrt{D^5}$	$\frac{1}{D}$	$\frac{1}{D^3}$
0,45	0,670	0,202	0,018453	0,136	2,22	54,19
0,46	0,678	0,212	0,020596	0,144	2,17	48,55
0,47	0,686	0,221	0,022935	0,151	2,13	43,60
0,48	0,693	0,230	0,025480	0,160	2,08	39,25
0,49	0,700	0,240	0,028248	0,168	2,04	35,40
0,50	0,707	0,250	0,031250	0,177	2,00	32,00
0,51	0,714	0,260	0,034503	0,186	1,96	28,98
0,52	0,721	0,270	0,038020	0,195	1,92	26,30
0,53	0,728	0,281	0,0418	0,204	1,89	23,91
0,54	0,735	0,292	0,0462	0,214	1,85	21,63
0,55	0,742	0,302	0,0503	0,224	1,82	19,87
0,56	0,748	0,314	0,0551	0,235	1,79	18,16
0,57	0,755	0,325	0,0602	0,245	1,75	16,62
0,58	0,762	0,336	0,0656	0,256	1,72	15,24
0,59	0,768	0,348	0,0715	0,267	1,69	13,99
0,60	0,775	0,360	0,0778	0,279	1,66	12,86
0,61	0,781	0,372	0,0845	0,291	1,64	11,84
0,62	0,787	0,384	0,0916	0,303	1,61	10,92
0,63	0,793	0,397	0,0992	0,315	1,59	10,08
0,64	0,800	0,410	0,1073	0,328	1,56	9,31
0,65	0,806	0,422	0,1160	0,341	1,54	8,61
0,66	0,812	0,436	0,1252	0,354	1,52	7,99
0,67	0,819	0,449	0,1350	0,367	1,49	7,41
0,68	0,825	0,462	0,1454	0,381	1,47	6,88
0,69	0,831	0,476	0,1564	0,395	1,45	6,39
0,70	0,837	0,490	0,1680	0,410	1,43	5,95
0,71	0,843	0,504	0,1804	0,425	1,41	5,54
0,72	0,849	0,518	0,1935	0,440	1,39	5,17
0,73	0,854	0,533	0,207	0,455	1,37	4,82
0,74	0,860	0,548	0,222	0,471	1,35	4,51
0,75	0,866	0,563	0,237	0,487	1,33	4,21
0,76	0,872	0,578	0,254	0,504	1,32	3,94
0,77	0,878	0,593	0,271	0,520	1,30	3,69
0,78	0,883	0,608	0,289	0,537	1,28	3,46
0,79	0,889	0,624	0,308	0,555	1,27	3,25
0,80	0,894	0,640	0,328	0,572	1,25	3,05
0,81	0,900	0,656	0,349	0,590	1,23	2,87
0,82	0,906	0,672	0,371	0,609	1,22	2,70
0,83	0,911	0,689	0,394	0,628	1,20	2,54
0,84	0,917	0,706	0,418	0,647	1,19	2,39
0,85	0,922	0,722	0,444	0,666	1,18	2,25
0,86	0,927	0,740	0,470	0,686	1,16	2,13
0,87	0,932	0,757	0,498	0,706	1,15	2,01
0,88	0,938	0,774	0,528	0,726	1,14	1,89
0,89	0,943	0,792	0,558	0,747	1,12	1,79
0,90	0,949	0,810	0,590	0,768	1,11	1,69
0,91	0,954	0,828	0,624	0,790	1,10	1,60
0,92	0,959	0,846	0,659	0,812	1,09	1,52
0,93	0,964	0,865	0,696	0,834	1,08	1,44
0,94	0,970	0,883	0,734	0,857	1,06	1,36
0,95	0,975	0,902	0,774	0,880	1,05	1,29
0,96	0,980	0,922	0,815	0,903	1,04	1,23
0,97	0,985	0,941	0,859	0,927	1,03	1,16
0,98	0,990	0,960	0,904	0,951	1,02	1,11
0,99	0,995	0,980	0,951	0,975	1,01	1,05
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,00	1,00

TABLE XIII

Valeurs de $\frac{\sqrt{H}}{U}$ et $\frac{U}{\sqrt{H}}$ calculées d'après la formule de Bazin : $U = \frac{87 \sqrt{H}}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$, pour les six catégories de parois

Catégorie n° 1. — $\gamma = 0,06$. — Parois très unies (ciment, bois raboté, etc...)
 Catégorie n° 2. — $\gamma = 0,16$. — Parois unies (planches, briques, pierre de taille, etc...)
 Catégorie n° 3. — $\gamma = 0,36$. — Parois en maçonnerie de moellons
 Catégorie n° 3 bis. — $\gamma = 0,85$. — Parois de nature mixte (sections en terre très régulières, rigoles revêtues de perrés, etc...)
 Catégorie n° 4. — $\gamma = 1,30$. — Canaux en terre dans des conditions ordinaires.
 Catégorie n° 5. — $\gamma = 1,75$. — Canaux en terre présentant une résistance exceptionnelle (fonds de galets, parois herbées, etc...).

RAYONS MOYENS R	VALEURS DE $\frac{\sqrt{H}}{U}$					VALEURS DE $\frac{U}{\sqrt{H}}$						
	Catég. n° 1	Catég. n° 2	Catég. n° 3	Catég. n° 3 bis	Catég. n° 4	Catég. n° 5	Catég. n° 1	Catég. n° 2	Catég. n° 3	Catég. n° 3 bis	Catég. n° 4	Catég. n° 5
0,05	0,0146	0,0197	0,0352	0,0552	0,0784	0,1015	68,5	50,7	28,4	18,1	12,8	9,9
0,06	0,0153	0,0200	0,0381	0,0574	0,0825	0,1087	69,8	52,6	30,2	19,4	13,2	10,7
0,07	0,0161	0,0215	0,0415	0,0644	0,0900	0,1206	70,9	54,2	31,7	20,8	14,7	11,6
0,08	0,0169	0,0230	0,0452	0,0704	0,0984	0,1327	71,8	55,6	33,1	21,7	15,5	12,1
0,09	0,0178	0,0246	0,0491	0,0774	0,1084	0,1458	72,5	56,7	34,4	22,7	16,3	12,7
0,10	0,0187	0,0263	0,0532	0,0854	0,1200	0,1600	73,1	57,7	35,5	23,6	17,0	13,3
0,11	0,0196	0,0281	0,0574	0,0944	0,1324	0,1756	73,6	58,7	36,5	24,4	17,7	13,9
0,12	0,0205	0,0300	0,0618	0,1044	0,1456	0,1928	74,1	59,5	37,4	25,2	18,3	14,4
0,13	0,0214	0,0319	0,0664	0,1154	0,1600	0,2116	74,6	60,2	38,2	25,9	18,9	14,9
0,14	0,0223	0,0338	0,0712	0,1274	0,1756	0,2320	75,0	60,9	39,0	26,7	19,4	15,3
0,15	0,0233	0,0357	0,0762	0,1404	0,1928	0,2544	75,5	61,5	39,7	27,2	19,9	15,8
0,16	0,0242	0,0377	0,0814	0,1544	0,2116	0,2788	75,9	62,1	40,5	27,8	20,4	16,2

0.17	0.0132	0.0160	0.0243	0.0352	0.0478	0.0603	75.9	62.7	41.2	28.4	21.9	16.6
0.18	0.0131	0.0158	0.0240	0.0345	0.0467	0.0589	76.2	63.2	41.8	29.0	21.4	17.0
0.19	0.0130	0.0157	0.0239	0.0343	0.0465	0.0587	76.5	63.6	42.4	29.5	21.8	17.3
0.20	0.0130	0.0156	0.0238	0.0342	0.0464	0.0586	76.7	64.1	42.9	30.0	22.3	17.7
0.21	0.0130	0.0155	0.0237	0.0341	0.0463	0.0585	76.9	64.5	43.5	30.5	22.7	18.1
0.22	0.0130	0.0154	0.0236	0.0340	0.0462	0.0584	77.1	64.9	44.0	31.0	23.1	18.5
0.23	0.0129	0.0153	0.0235	0.0339	0.0461	0.0583	77.3	65.2	44.4	31.4	23.4	18.7
0.24	0.0129	0.0152	0.0234	0.0338	0.0460	0.0582	77.5	65.5	44.8	31.8	23.8	19.0
0.25	0.0129	0.0151	0.0233	0.0337	0.0459	0.0581	77.6	65.9	45.3	32.2	24.2	19.3
0.26	0.0129	0.0151	0.0232	0.0336	0.0458	0.0580	77.8	66.2	45.7	32.6	24.5	19.6
0.27	0.0128	0.0150	0.0231	0.0335	0.0457	0.0579	78.0	66.5	46.1	33.0	24.8	19.9
0.28	0.0128	0.0150	0.0230	0.0334	0.0456	0.0578	78.1	66.8	46.5	33.4	25.2	20.2
0.29	0.0128	0.0149	0.0229	0.0333	0.0455	0.0577	78.3	67.0	46.9	33.7	25.5	20.5
0.30	0.0128	0.0149	0.0228	0.0332	0.0454	0.0576	78.4	67.3	47.3	34.1	25.8	20.7
0.31	0.0128	0.0148	0.0227	0.0331	0.0453	0.0575	78.5	67.6	47.6	34.4	26.1	21.0
0.32	0.0127	0.0148	0.0226	0.0330	0.0452	0.0574	78.6	67.8	47.9	34.7	26.4	21.2
0.33	0.0127	0.0147	0.0225	0.0329	0.0451	0.0573	78.8	68.0	48.2	35.1	26.7	21.5
0.34	0.0127	0.0147	0.0224	0.0328	0.0450	0.0572	78.9	68.2	48.5	35.4	26.9	21.7
0.35	0.0127	0.0146	0.0223	0.0327	0.0449	0.0571	79.0	68.4	48.8	35.7	27.2	22.0
0.36	0.0127	0.0146	0.0222	0.0326	0.0448	0.0570	79.1	68.6	49.1	36.0	27.5	22.2
0.37	0.0126	0.0145	0.0221	0.0325	0.0447	0.0569	79.2	68.8	49.3	36.3	27.7	22.4
0.38	0.0126	0.0145	0.0220	0.0324	0.0446	0.0568	79.3	69.0	49.6	36.6	28.0	22.7
0.39	0.0126	0.0144	0.0219	0.0323	0.0445	0.0567	79.4	69.2	49.9	36.9	28.2	22.9
0.40	0.0126	0.0144	0.0218	0.0322	0.0444	0.0566	79.5	69.4	50.1	37.1	28.5	23.1
0.41	0.0126	0.0143	0.0217	0.0321	0.0443	0.0565	79.6	69.6	50.4	37.4	28.7	23.3
0.42	0.0126	0.0143	0.0216	0.0320	0.0442	0.0564	79.7	69.9	50.6	37.6	28.9	23.5
0.43	0.0126	0.0142	0.0215	0.0319	0.0441	0.0563	79.8	70.1	51.1	37.9	29.2	23.7
0.44	0.0125	0.0142	0.0214	0.0318	0.0440	0.0562	79.9	70.4	51.4	38.4	29.4	23.9
0.45	0.0125	0.0142	0.0213	0.0317	0.0439	0.0561	80.0	70.5	51.6	38.6	29.6	24.1
0.46	0.0125	0.0141	0.0212	0.0316	0.0438	0.0560	80.1	70.7	51.8	38.8	29.8	24.3
0.47	0.0125	0.0141	0.0211	0.0315	0.0437	0.0559	80.2	70.8	52.0	39.1	30.0	24.5
0.48	0.0125	0.0141	0.0210	0.0314	0.0436	0.0558	80.3	70.9	52.3	39.3	30.2	24.7
0.49	0.0125	0.0141	0.0209	0.0313	0.0435	0.0557	80.4	71.0	52.5	39.5	30.4	24.8
0.50	0.0125	0.0141	0.0208	0.0312	0.0434	0.0556	80.5	71.1	52.7	39.6	30.6	25.0
0.55	0.0124	0.0140	0.0207	0.0311	0.0433	0.0555	80.6	71.5	53.7	40.5	31.6	25.9
0.60	0.0124	0.0139	0.0206	0.0310	0.0432	0.0554	80.7	72.1	54.6	41.4	32.5	26.7
0.65	0.0124	0.0138	0.0205	0.0309	0.0431	0.0553	80.9	72.6	55.4	42.3	33.3	27.1

TABLE XIII (suite et fin)

RAYONS MOYENS R	VALEURS DE $\frac{\sqrt{H}}{U}$					VALEURS DE $\frac{U}{\sqrt{H}}$				
	Catég. n° 1	Catég. n° 2	Catég. n° 3	Catég. n° 4	Catég. n° 5	Catég. n° 1	Catég. n° 2	Catég. n° 3	Catég. n° 4	Catég. n° 5
0,70	0,0123	0,0137	0,0178	0,0232	0,0356	81,1	73,0	56,1	43,1	28,1
0,75	0,0123	0,0136	0,0176	0,0228	0,0357	81,3	73,4	56,8	43,9	28,8
0,80	0,0123	0,0136	0,0174	0,0225	0,0350	81,5	73,8	57,4	44,6	29,4
0,85	0,0122	0,0135	0,0172	0,0221	0,0353	81,7	74,1	58,0	45,2	30,0
0,90	0,0122	0,0134	0,0171	0,0218	0,0357	81,8	74,4	58,6	45,9	30,6
0,95	0,0122	0,0134	0,0169	0,0215	0,0351	81,9	74,7	59,1	46,5	31,1
1,00	0,0122	0,0133	0,0168	0,0213	0,0346	82,0	75,0	59,6	47,0	31,6
1,10	0,0121	0,0132	0,0165	0,0208	0,0337	82,2	75,4	60,5	48,0	32,6
1,20	0,0121	0,0131	0,0163	0,0204	0,0330	82,4	75,9	61,3	48,9	33,5
1,30	0,0121	0,0131	0,0161	0,0201	0,0324	82,6	76,3	62,0	49,8	34,3
1,40	0,0121	0,0131	0,0160	0,0198	0,0318	82,8	76,6	62,6	50,6	35,1
1,50	0,0121	0,0130	0,0158	0,0195	0,0315	82,9	76,9	63,2	51,3	35,8
1,60	0,0120	0,0130	0,0157	0,0192	0,0313	83,0	77,2	63,8	52,0	36,5
1,70	0,0120	0,0129	0,0156	0,0190	0,0309	83,1	77,5	64,3	52,7	37,1
1,80	0,0120	0,0129	0,0154	0,0188	0,0305	83,2	77,7	64,8	53,2	37,7
1,90	0,0120	0,0128	0,0153	0,0186	0,0301	83,3	77,9	65,2	53,8	38,3
2,00	0,0120	0,0128	0,0152	0,0184	0,0297	83,4	78,1	65,6	54,3	38,9
2,30	0,0120	0,0127	0,0151	0,0181	0,0291	83,6	78,5	66,4	55,3	39,9
2,40	0,0119	0,0127	0,0149	0,0178	0,0285	83,7	78,8	67,1	56,2	40,8
2,60	0,0119	0,0126	0,0148	0,0175	0,0280	83,8	79,1	67,7	57,0	41,7
2,80	0,0119	0,0126	0,0147	0,0173	0,0274	83,9	79,4	68,2	57,7	42,5
3,00	0,0119	0,0125	0,0146	0,0171	0,0269	84,0	79,6	68,7	58,3	43,3
3,20	0,0119	0,0125	0,0145	0,0170	0,0264	84,1	79,8	69,2	58,9	44,0
3,40	0,0119	0,0125	0,0144	0,0168	0,0259	84,2	80,0	69,6	59,5	44,6
3,60	0,0119	0,0125	0,0143	0,0167	0,0254	84,3	80,2	70,0	60,1	45,2

TABLES NUMÉRIQUES

783

3,80	0,0119	0,0124	0,0142	0,0165	0,0192	0,0218	84,4	80,4	70,4	60,6	52,2	45,8
4,00	0,0118	0,0124	0,0141	0,0164	0,0190	0,0216	84,4	80,5	70,7	61,0	52,7	46,4
4,50	0,0118	0,0124	0,0140	0,0161	0,0186	0,0210	84,6	80,9	71,5	62,1	53,9	47,6
5,00	0,0118	0,0123	0,0139	0,0159	0,0182	0,0205	84,7	81,2	72,1	63,0	55,0	48,8
5,50	0,0118	0,0123	0,0138	0,0157	0,0179	0,0201	84,8	81,4	72,7	63,8	56,0	49,8
6,00	0,0118	0,0123	0,0137	0,0155	0,0176	0,0197	84,9	81,6	73,2	64,6	56,8	50,7
6,50	0,0118	0,0122	0,0136	0,0153	0,0174	0,0194	85,0	81,8	73,7	65,2	57,0	51,6
7,00	0,0118	0,0122	0,0135	0,0152	0,0172	0,0191	85,0	82,0	74,1	65,8	58,3	52,3
7,50	0,0117	0,0122	0,0134	0,0151	0,0170	0,0189	85,1	82,2	74,5	66,4	59,5	53,0
8,00	0,0117	0,0121	0,0133	0,0149	0,0168	0,0186	85,2	82,3	74,8	66,9	59,9	53,7
8,50	0,0117	0,0121	0,0133	0,0148	0,0166	0,0184	85,2	82,4	75,1	67,4	60,1	54,3
9,00	0,0117	0,0121	0,0133	0,0147	0,0165	0,0182	85,3	82,6	75,4	67,8	60,7	54,9
9,50	0,0117	0,0121	0,0132	0,0147	0,0163	0,0180	85,3	82,7	75,7	68,2	61,2	55,6
10,00	0,0117	0,0121	0,0132	0,0146	0,0162	0,0179	85,3	82,8	75,9	68,5	61,6	56,0
11,00	0,0117	0,0121	0,0131	0,0144	0,0160	0,0176	85,4	83,0	76,4	69,2	62,5	57,0
12,00	0,0117	0,0120	0,0130	0,0143	0,0158	0,0173	85,5	83,1	76,8	69,9	63,3	57,8
13,00	0,0117	0,0120	0,0130	0,0142	0,0156	0,0171	85,5	83,3	77,1	70,4	63,9	58,6
14,00	0,0117	0,0120	0,0130	0,0141	0,0155	0,0169	85,6	83,4	77,4	70,9	64,5	59,3
15,00	0,0117	0,0120	0,0130	0,0140	0,0154	0,0167	85,6	83,5	77,7	71,3	65,1	59,9
16,00	0,0117	0,0120	0,0130	0,0139	0,0152	0,0165	85,7	83,6	78,0	71,7	65,6	60,5
17,00	0,0117	0,0119	0,0128	0,0139	0,0151	0,0164	85,7	83,7	78,3	72,1	66,1	61,6
18,00	0,0117	0,0119	0,0127	0,0138	0,0150	0,0162	85,7	83,8	78,5	72,5	66,6	62,1
19,00	0,0117	0,0119	0,0127	0,0137	0,0149	0,0161	85,8	83,9	78,7	72,8	67,0	62,5
20,00	0,0117	0,0119	0,0127	0,0137	0,0148	0,0161	85,8	84,0	78,8	73,0	67,3	62,5

TABLE XIV

Valeurs du coefficient C de la formule $U = C\sqrt{RI}$
d'après Ganguillet et Kutter

	RAYON moyen	PENTES $I =$						
		0,000025	0,00005	0,0001	0,0002	0,0005	0,0010	0,010
Parois très unies	0,05	38	44	51	54	56	57	58
	0 10	49	56	61	65	68	70	71
	0 20	63	70	74	77	78	79	80
	0 30	72	77	81	84	85	86	86
	0 50	83	86	88	90	91	91	91
	1 00	100	100	100	100	100	100	100
	2 00	115	111	109	107	106	105	105
	3 00	124	117	113	111	110	109	108
	5 00	134	123	118	115	113	112	111
	15 00	151	135	125	121	118	117	116
Parois unies	0,05	28	31	35	38	40	41	42
	0 10	36	40	44	47	49	50	51
	0 20	46	50	53	56	58	59	59
	0 30	53	57	60	63	64	64	65
	0 50	62	65	67	69	69	70	70
	1 00	77	77	77	77	77	77	77
	2 00	90	87	85	84	83	82	82
	3 00	99	94	89	88	87	86	85
	5 00	108	100	93	91	90	89	88
	15 00	125	114	102	98	96	94	92
Parois peu unies	0,05	19	22	24	26	28	29	29
	0 10	25	29	32	34	35	36	36
	0 20	34	37	39	41	42	42	43
	0 30	40	43	45	46	47	47	48
	0 50	47	49	50	51	51	52	52
	1 00	58	58	58	58	58	58	58
	2 00	71	69	67	66	65	64	64
	3 00	78	74	71	70	69	68	68
	5 00	87	79	75	73	72	71	70
	15 00	105	90	83	79	77	76	75
Parois rugueuses	0,05	15	18	20	21	23	23	24
	0 10	21	23	25	28	29	29	30
	0 20	28	30	32	34	35	36	36
	0 30	33	35	37	38	39	40	40
	0 50	40	41	42	43	43	44	44
	1 00	50	50	50	50	50	50	50
	2 00	61	59	57	56	56	55	55
	3 00	69	64	61	59	59	58	58
	5 00	76	70	66	63	62	61	61
	15 00	94	81	74	70	68	67	66

TABLE XIV (suite)

	RAYON moyen	PENTES I =						
		0,000025	0,00005	0,0001	0,0002	0,0004	0,0010	0,0100
Parois en terre n = 0,025	0 ^m ,05	12	13	15	16	17	18	18
	0 10	17	18	19	20	21	22	22
	0 20	22	23	24	25	26	27	27
	0 30	26	28	29	30	30	31	31
	0 50	31	32	33	34	34	35	35
	1 00	40	40	40	40	40	40	40
	2 00	50	48	48	46	45	45	45
	3 00	58	53	53	49	48	47	47
	5 00	64	59	59	53	52	50	50
	15 00	81	71	71	59	57	55	55
Parois en gravier n = 0,030	0 ^m ,05	10	11	12	13	13	14	14
	0 10	13	14	15	16	17	18	18
	0 20	18	19	19	20	21	22	22
	0 30	21	22	23	24	24	25	25
	0 50	25	26	27	27	28	29	29
	1 00	33	33	33	33	33	33	33
	2 00	42	41	40	40	39	38	38
	3 00	48	45	43	42	42	41	41
	5 00	56	51	47	45	44	43	43
	15 00	72	62	55	52	51	49	48
Parois irrégulières n = 0,035	0 ^m ,05	8	9	9	10	10	11	11
	0 10	11	12	12	13	13	14	14
	0 20	15	16	16	17	17	18	18
	0 30	18	19	19	20	20	21	21
	0 50	22	23	23	23	24	24	24
	1 00	29	29	29	29	29	29	29
	2 00	36	35	34	34	33	33	33
	3 00	42	40	38	37	36	36	36
	5 00	49	45	43	42	41	40	39
	15 00	65	56	51	47	45	44	43
Parois très irrégulières n = 0,040	0 ^m ,05	6	7	7	8	8	9	9
	0 10	9	10	11	11	12	12	12
	0 20	13	14	14	15	15	16	16
	0 30	15	16	17	18	18	18	18
	0 50	19	19	20	20	21	21	21
	1 00	25	25	25	25	25	25	25
	2 00	32	31	31	30	30	29	29
	3 00	37	35	34	33	33	32	32
	5 00	44	41	39	38	37	36	35
	15 00	59	52	46	43	42	41	40

TABLE XV

Valeurs du coefficient C de la formule $U = C \sqrt{RI}$
d'après M. Robert Manning

RAYON MOYEN	PAROIS TRÈS LIES	PAROIS UNIES	PAROIS PEU UNIES	PAROIS RUGUEUX	PAROIS EN TERRE	PAROIS EN GRAVIER	PAROIS IRRÉGULIERS	PAROIS TRÈS IRRÉGULIERS
0,05	61	47	36	30	24	20	17	15
0,10	68	52	40	34	27	23	19	17
0,20	76	59	45	38	31	25	22	19
0,30	82	63	48	41	33	27	23	20
0,50	89	69	52	45	36	30	25	22
1,00	100	77	59	50	40	33	29	25
2,00	112	86	66	56	45	37	32	28
3,00	120	92	71	60	48	40	34	30
5,00	131	104	77	65	52	44	37	33
15,00	157	121	92	79	63	52	45	39

TABLE XVI

*Valeurs de la fonction $\psi(x)$ de Bresse
pour les canaux découverts*

$\frac{1}{x}$	x	$\psi(x)$	$\frac{1}{x}$	x	$\psi(x)$
10,00	0,10	— 0,505	0,99	1,01	1,416
5,00	0,20	— 0,504	0,98	1,02	1,491
3,33	0,30	— 0,502	0,97	1,03	1,060
2,50	0,40	— 0,498	0,96	1,04	0,970
2,22	0,45	— 0,494	0,95	1,05	0,895
2,00	0,50	— 0,088	0,94	1,06	0,838
1,82	0,55	— 0,029	0,93	1,07	0,783
1,67	0,60	+ 0,032	0,92	1,08	0,749
1,54	0,65	0,099	0,92	1,09	0,712
1,43	0,70	0,171	0,91	1,10	0,676
1,39	0,72	0,202	0,90	1,11	0,651
1,35	0,74	0,235	0,89	1,12	0,626
1,33	0,75	0,252	0,88	1,13	0,602
1,32	0,76	0,270	0,88	1,14	0,580
1,30	0,77	0,288	0,87	1,15	0,561
1,28	0,78	0,306	0,86	1,16	0,541
1,27	0,79	0,326	0,85	1,17	0,525
1,25	0,80	0,346	0,85	1,18	0,509
1,23	0,81	0,367	0,84	1,19	0,493
1,22	0,82	0,387	0,83	1,20	0,479
1,20	0,83	0,411	0,82	1,22	0,454
1,19	0,84	0,435	0,80	1,25	0,420
1,18	0,85	0,460	0,77	1,30	0,373
1,16	0,86	0,487	0,74	1,35	0,335
1,15	0,87	0,516	0,71	1,40	0,304
1,14	0,88	0,546	0,69	1,45	0,277
1,12	0,89	0,578	0,67	1,50	0,257
1,11	0,90	0,614	0,62	1,60	0,218
1,10	0,91	0,652	0,59	1,70	0,190
1,09	0,92	0,695	0,56	1,80	0,166
1,08	0,93	0,743	0,53	1,90	0,146
1,06	0,94	0,798	0,50	2,00	0,132
1,05	0,95	0,862	0,44	2,25	0,102
1,04	0,96	0,940	0,40	2,50	0,082
1,03	0,97	1,040	0,33	3,00	0,055
1,02	0,98	1,178	0,29	3,50	0,041
1,01	0,99	1,412	0,25	4,00	0,031
1,00	1,00	∞	0,20	5,00	0,020

TABLE XVII

*Pertes de charge dues à l'écoulement des gaz dans les conduites
en fonte, d'après M. Arson*

VOLUMES ÉCOULÉS		PERTES DE CHARGE, EN MÈTRES D'EAU, POUR 1.000 MÈTRES DE LONGUEUR					
en litres par seconde	en mél. cubes par heure	Diamètre 0 ^m ,05		Diamètre 0 ^m ,081		Diamètre 0 ^m ,10	
		Air	Gaz	Air	Gaz	Air	Gaz
1 lit	3 ^m ,6	0,053	0,022	0,008	0,003	0,004	0,002
2	7 2	0,137	0,056	0,019	0,008	0,009	0,004
3	10 8	0,254	0,104	0,032	0,013	0,014	0,006
4	14 4	0,402	0,165	0,048	0,020	0,021	0,009
5	18 0	0,582	0,239	0,066	0,027	0,028	0,011
6	21 6	0,794	0,326	0,086	0,035	0,036	0,015
7	25 2	1,038	0,426	0,108	0,044	0,044	0,018
8	28 8	1,314	0,539	0,134	0,055	0,054	0,022
9	32 4	1,622	0,665	0,161	0,066	0,065	0,026
10	36 0	1,961	0,804	0,190	0,078	0,076	0,031
11	39 6	2,332	0,956	0,222	0,091	0,088	0,036
12	43 8	2,734	1,121	0,257	0,105	0,100	0,041
13	46 8	3,169	1,299	0,293	0,120	0,114	0,047
14	50 2	3,636	1,491	0,332	0,136	0,128	0,053
15	54 0	4,134	1,695	0,374	0,153	0,144	0,059
16	57 6	"	"	0,419	0,172	0,159	0,065
18	64 8	"	"	0,512	0,210	0,194	0,079
20	72 0	"	"	0,616	0,252	0,231	0,095
22	79 2	"	"	0,729	0,299	0,272	0,111
25	90 0	"	"	0,917	0,376	0,339	0,139
30	108	"	"	1,276	0,523	0,466	0,191
35	126	"	"	1,695	0,695	0,613	0,251
40	144	"	"	2,172	0,840	0,780	0,320
45	162	"	"	"	"	0,966	0,396
50	180	"	"	"	"	1,174	0,481

TABLE XVII (suite)

*Pertes de charge dues à l'écoulement des gaz dans les conduites
en fonte, d'après M. Arson*

VOLUMES ÉCOULÉS		PERTES DE CHARGE, EN MÈTRES D'EAU, POUR 1.000 MÈTRES DE LONGUEUR					
en litres par seconde	en mél. cubes par heure	Diamètre 0 ^m ,15		Diamètre 0 ^m ,20		Diamètre 0 ^m ,25	
		Air	Gaz	Air	Gaz	Air	Gaz
5 lit	18 ^m	0,005	0,002	0,0015	0,0006	0,0005	0,0002
10	36	0,013	0,005	0,0037	0,0015	0,0013	0,0005
15	54	0,023	0,010	0,0063	0,0026	0,0022	0,0009
20	72	0,036	0,015	0,0094	0,0038	0,0032	0,0013
25	90	0,051	0,021	0,0130	0,0053	0,0044	0,0018
30	108	0,068	0,028	0,0172	0,0076	0,0057	0,0023
35	126	0,080	0,033	0,022	0,009	0,0073	0,0030
40	144	0,111	0,045	0,027	0,011	0,0089	0,0036
45	162	0,135	0,056	0,033	0,013	0,0108	0,0044
50	180	0,162	0,066	0,039	0,016	0,0127	0,0052
60	216	0,224	0,092	0,053	0,022	0,0171	0,0070
70	252	0,295	0,121	0,068	0,028	0,022	0,009
80	288	0,375	0,154	0,086	0,035	0,028	0,011
90	324	0,466	0,191	0,106	0,044	0,034	0,014
100	360	0,565	0,232	0,128	0,053	0,041	0,017
110	396	0,674	0,276	0,152	0,062	0,048	0,020
120	432	0,793	0,325	0,179	0,073	0,056	0,023
130	468	0,922	0,378	0,206	0,085	0,065	0,027
140	504	"	"	0,236	0,097	0,074	0,031
150	540	"	"	0,268	0,110	0,085	0,035
160	576	"	"	0,303	0,124	0,095	0,039
180	648	"	"	0,377	0,155	0,118	0,048
200	720	"	"	0,459	0,188	0,143	0,059
220	792	"	"	0,550	0,225	0,171	0,070
250	900	"	"	0,701	0,287	0,217	0,089

TABLE XVII (suite)

Pertes de charge dues à l'écoulement des gaz dans les conduites en fonte, d'après M. Arson

VOLUMES ÉCOULÉS		PERTES DE CHARGE, EN MÈTRES D'EAU, POUR 1.000 MÈTRES DE LONGUEUR					
en litres par seconde	en mèt. cubes par heure	Diamètre 0 ^m .30		Diamètre 0 ^m .35		Diamètre 0 ^m .40	
		Air	Gaz	Air	Gaz	Air	Gaz
20 ^{lit}	72 ^{mc}	0,0013	0,0005	0,0015	0,0002	0,0002	0,0001
40	144	0,0036	0,0015	0,0015	0,0006	0,0007	0,0003
60	216	0,0067	0,0027	0,0029	0,0012	0,0013	0,0005
80	288	0,0108	0,0044	0,0046	0,0019	0,0020	0,0008
100	360	0,0157	0,0064	0,0068	0,0028	0,0030	0,0012
120	432	0,0216	0,0088	0,0094	0,0038	0,0042	0,0017
140	504	0,0285	0,0117	0,0123	0,0051	0,0055	0,0022
160	576	0,0362	0,0148	0,0157	0,0064	0,0069	0,0028
180	648	0,045	0,018	0,0194	0,0080	0,0086	0,0035
200	720	0,054	0,022	0,0235	0,0096	0,0104	0,0042
220	792	0,065	0,026	0,0281	0,0115	0,0124	0,0051
240	864	0,076	0,031	0,0330	0,0135	0,0148	0,0061
250	900	0,082	0,033	0,0357	0,0147	0,0159	0,0065
260	936	0,088	0,036	0,0384	0,0158	0,0171	0,0070
280	1008	0,102	0,042	0,044	0,0180	0,0198	0,0081
300	1080	0,116	0,047	0,050	0,021	0,0227	0,0093
320	1152	0,130	0,053	0,057	0,023	0,0257	0,0105
360	1296	0,164	0,067	0,071	0,029	0,0322	0,0132
400	1440	0,200	0,082	0,087	0,036	0,0391	0,0160
450	1620	0,250	0,102	0,109	0,045	0,0490	0,0202
500	1800	"	"	0,133	0,055	0,061	0,025
600	2160	"	"	0,189	0,078	0,087	0,035
700	2520	"	"	0,256	0,105	0,117	0,048
800	2880	"	"	"	"	0,152	0,062
900	3240	"	"	"	"	0,191	0,078

TABLE XVII (suite)

Pertes de charge dues à l'écoulement des gaz dans les conduites en fonte, d'après M. Arson

VOLUMES ÉCOULÉS		PERTES DE CHARGE, EN MÈTRES D'EAU, POUR 1.000 MÈTRES DE LONGUEUR					
en litres par seconde	en mèt. cubes par heure	Diamètre 0 ^m ,50		Diamètre 0 ^m ,60		Diamètre 0 ^m ,70	
		Air	Gaz	Air	Gaz	Air	Gaz
50 ^{lit}	180 ^{m³}	0,0002	0,0001	0,00006	0,00002	0,00002	0,00001
100	360	0,0007	0,0003	0,0002	0,0001	0,00009	0,00004
150	540	0,0016	0,0006	0,0005	0,0002	0,00022	0,00009
200	720	0,0028	0,0011	0,0009	0,0004	0,0004	0,00016
250	900	0,0043	0,0018	0,0014	0,0006	0,0006	0,00025
300	1080	0,0062	0,0025	0,0021	0,0009	0,0009	0,00036
350	1260	0,0084	0,0034	0,0029	0,0012	0,0012	0,0005
400	1440	0,0109	0,0045	0,0038	0,0015	0,0016	0,0006
450	1620	0,0138	0,0056	0,0048	0,0019	0,0020	0,0008
500	1800	0,0169	0,0069	0,0059	0,0024	0,0025	0,0010
600	2160	0,0243	0,0099	0,0085	0,0035	0,0035	0,0014
700	2520	0,0330	0,0135	0,0115	0,0047	0,0049	0,0020
800	2880	0,0429	0,0176	0,0151	0,0062	0,0063	0,0026
900	3240	0,054	0,022	0,0191	0,0078	0,0081	0,0033
1000	3600	0,067	0,027	0,0235	0,0096	0,0100	0,0041
1100	3960	0,081	0,033	0,028	0,0116	0,0120	0,0049
1200	4320	0,096	0,039	0,034	0,014	0,0143	0,0058
1300	4680	0,112	0,046	0,040	0,016	0,0168	0,0069
1400	5040	0,130	0,053	0,046	0,019	0,0194	0,0080
1500	5400	"	"	0,053	0,022	0,0222	0,0091
1600	5760	"	"	0,060	0,025	0,025	0,0104
1800	6480	"	"	0,076	0,031	0,032	0,0133
2000	7200	"	"	"	"	0,038	0,0163
2200	7920	"	"	"	"	0,040	0,020
2500	9000	"	"	"	"	0,062	0,025

TABLE XVIII

*Logarithmes népériens**1° de centième en centième, pour les nombres compris entre 1 et 3*

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
1,0	0,000	0,010	0,020	0,030	0,039	0,049	0,058	0,068	0,077	0,086	9
1,1	085	104	113	122	131	140	148	157	165	174	8
1,2	182	191	199	207	215	223	231	239	247	255	7
1,3	262	270	278	285	293	300	307	315	322	329	7
1,4	336	344	351	358	365	372	378	385	392	399	6
1,5	405	412	419	425	432	438	445	451	457	464	6
1,6	470	476	482	487	495	501	507	513	519	525	6
1,7	531	536	542	548	554	560	565	571	577	582	6
1,8	588	593	599	604	610	615	621	626	631	637	5
1,9	642	647	652	657	663	668	673	678	683	688	5
2,0	693	699	703	708	713	718	723	727	732	737	5
2,1	742	747	751	756	761	765	770	775	779	784	4
2,2	788	793	797	802	806	811	815	820	824	829	4
2,3	833	837	842	846	850	854	859	863	867	871	4
2,4	875	880	884	888	892	896	900	904	908	912	4
2,5	916	920	924	928	932	936	940	944	948	952	4
2,6	956	959	963	967	971	975	978	982	986	989	4
2,7	993	997	1,001	1,004	1,008	1,012	1,015	1,019	1,022	1,026	4
2,8	1,033	1,033	1,037	1,040	1,044	1,047	1,051	1,054	1,058	1,061	4
2,9	1,065	1,068	1,072	1,075	1,078	1,082	1,085	1,089	1,092	1,095	4

2° de dixième en dixième, pour les nombres compris entre 1 et 10

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
1,	0,000	0,095	0,182	0,262	0,336	0,405	0,470	0,531	0,588	0,642	51
2,	0,693	0,742	0,788	0,833	0,875	0,916	0,955	0,993	1,030	1,065	34
3,	1,079	1,131	1,163	1,194	1,224	1,253	1,281	1,308	1,335	1,361	25
4,	386	411	435	459	482	504	526	548	569	589	20
5,	609	629	649	668	686	705	723	740	758	775	17
6,	792	808	824	840	856	872	887	902	917	931	15
7,	946	960	974	988	2,001	2,015	2,028	2,041	2,054	2,067	12
8,	2,079	2,092	2,104	2,116	2,128	2,140	2,152	2,163	2,175	2,186	11
9,	2,197	2,208	2,219	2,230	241	251	262	272	282	292	10
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.

TABLE XIX

Inverses $\frac{1}{N}$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
10	10000	9901	9804	9709	9615	9524	9434	9346	9259	9174	83
11	9091	9009	8928	8849	8772	8696	8621	8547	8474	8403	70
12	8333	8264	8197	8130	8064	8000	7937	7874	7812	7752	60
13	7692	7633	7576	7519	7463	7407	7353	7299	7247	7194	51
14	7143	7092	7042	6993	6944	6897	6849	6803	6757	6711	44
15	6667	6622	6579	6536	6494	6452	6410	6369	6329	6289	39
16	6250	6211	6173	6135	6097	6061	6024	5988	5952	5917	35
17	5882	5848	5814	5780	5747	5714	5682	5650	5618	5586	30
18	5556	5525	5495	5465	5434	5405	5376	5347	5319	5291	28
19	5263	5235	5208	5181	5155	5128	5102	5076	5051	5025	25
20	5000	4975	4950	4926	4992	4978	4854	4831	4808	4784	22
21	4762	4739	4717	4695	4673	4651	4630	4608	4587	4566	21
22	4545	4524	4504	4484	4464	4444	4424	4405	4386	4367	19
23	4348	4329	4310	4292	4273	4255	4237	4219	4201	4184	17
24	4167	4149	4132	4115	4098	4081	4065	4048	4032	4016	16
25	4000	3984	3968	3952	3937	3921	3906	3891	3876	3861	15
26	3848	3831	3816	3802	3788	3774	3760	3746	3732	3718	14
27	3704	3690	3676	3662	3649	3636	3623	3610	3597	3584	13
28	3571	3558	3546	3533	3521	3509	3497	3484	3472	3460	12
29	3448	3436	3425	3413	3401	3389	3378	3367	3356	3344	11
30	3333	3322	3311	3300	3289	3278	3269	3257	3247	3236	10
31	3228	3215	3205	3195	3185	3175	3165	3155	3145	3135	10
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.

TABLE XX

Valeurs des puissances $\frac{k-1}{k} = 0,29... des nombres consécutifs$
 (k étant la constante spécifique des gaz, rapport des chaleurs
 spécifiques à pression constante et à volume constant)

1° de centième en centième, pour les nombres compris entre 0 et 1

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
0	0,000	0,262	0,321	0,361	0,392	0,418	0,441	0,462	0,480	0,497	15
0,1	512	526	540	553	565	577	587	597	607	617	9
0,2	626	636	645	653	660	668	675	683	691	698	6
0,3	704	711	718	724	731	737	743	749	755	761	6
0,4	766	772	777	782	788	793	798	803	808	813	4
0,5	817	822	826	831	836	840	845	850	854	858	4
0,6	862	866	870	874	878	882	886	890	894	898	4
0,7	902	906	909	913	917	920	924	928	931	934	3
0,8	937	941	944	948	951	954	958	961	964	967	3
0,9	970	973	976	979	982	985	988	991	994	997	3

2° de dixième en dixième, pour les nombres compris entre 0 et 10

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
0	0,000	0,512	0,621	0,704	0,766	0,817	0,862	0,902	0,937	0,970	39
1	1,000	1,028	1,054	1,076	1,103	1,125	1,146	1,166	1,186	1,205	18
2	1,223	1,241	1,257	1,274	1,291	1,306	1,321	1,335	1,349	1,363	13
3	1,377	1,390	1,403	1,415	1,427	1,438	1,449	1,459	1,469	1,478	11
4	1,487	1,497	1,508	1,518	1,528	1,538	1,548	1,558	1,567	1,577	9
5	1,586	1,596	1,605	1,614	1,623	1,632	1,641	1,650	1,659	1,668	8
6	1,677	1,686	1,695	1,704	1,713	1,722	1,731	1,739	1,748	1,757	7
7	1,766	1,775	1,783	1,792	1,800	1,809	1,817	1,825	1,834	1,843	6
8	1,851	1,859	1,867	1,875	1,883	1,891	1,899	1,907	1,915	1,923	6
9	1,931	1,939	1,946	1,954	1,962	1,970	1,978	1,986	1,994	2,002	6

3 d'unité en unité, pour les nombres compris entre 0 et 100

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
0	0,000	1,000	1,523	1,876	1,997	1,596	1,684	1,761	1,831	1,894	59
10	2,000	2,008	2,015	2,021	2,027	2,033	2,039	2,045	2,051	2,057	36
20	2,063	2,069	2,075	2,081	2,087	2,093	2,099	2,105	2,111	2,117	26
30	2,123	2,129	2,135	2,141	2,147	2,153	2,159	2,165	2,171	2,177	21
40	2,183	2,189	2,195	2,201	2,207	2,213	2,219	2,225	2,231	2,237	18
50	2,243	2,249	2,255	2,261	2,267	2,273	2,279	2,285	2,291	2,297	15
60	2,303	2,309	2,315	2,321	2,327	2,333	2,339	2,345	2,351	2,357	14
70	2,363	2,369	2,375	2,381	2,387	2,393	2,399	2,405	2,411	2,417	13
80	2,423	2,429	2,435	2,441	2,447	2,453	2,459	2,465	2,471	2,477	12
90	2,483	2,489	2,495	2,501	2,507	2,513	2,519	2,525	2,531	2,537	11

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

MÉCANIQUE

CHAPITRE PREMIER

Cinématique

	Pages.
1. — <i>Mouvement du point matériel.</i> — Objet et divisions de la mécanique. — Grandeur géométrique ou vecteur. — Trajectoire, loi du mouvement, courbe des espaces. — Vitesse moyenne, vitesse à un instant donné. — Mouvement uniforme. — Accélération, composantes normale et tangentielle. — Mouvement rectiligne uniformément varié. — Mouvement circulaire. — Mouvement curviligne varié. — Mouvement vibratoire simple. — Accélérations centrales. — Loi des aires. — Mouvement relatif d'un point. — Mouvement apparent. — Méthode de Roberval.....	31
2. — <i>Mouvement des systèmes matériels.</i> — Translation. — Rotation. — Mouvement général d'un corps solide libre, axe hélicoïdal. — Mouvement d'un corps solide qui a un point fixe. — Mouvement d'un corps solide qui reste parallèle à un plan fixe. — Mouvement d'une figure plane dans son plan. — Centre instantané de rotation. — Base. — Roulette. — Cercle des inflexions. — Mouvement épicycloïdal plan. — Rayon de courbure d'une roulette. — Enveloppe d'une courbe mobile. — Composition des translations. — Composition des rotations. — Couple de rotation. — Composition des accélérations, théorème de Coriolis.....	70
3. — <i>Mécanismes.</i> — Courroies. — Engrenages cylindriques et coniques. — Vis sans fin. — Crémaillère. — Joint universel. — Bielle et manivelle. — Excentriques. — Parallélogrammes de Watt. — Inverseur Peaucellier...	115

CHAPITRE II

Statique

	Pages.
§ 1. — <i>Principes fondamentaux de la mécanique.</i> — Principe de l'inertie. — Principe des mouvements relatifs. — Forces constantes. — Théorème sur la direction et l'intensité de la force variable agissant sur un point matériel en mouvement. — Mesure des forces. — Principe de la réaction.	125
§ 2. — <i>Equilibre du point matériel.</i> — Composition des forces. — Equilibre d'un point matériel libre. — Equilibre d'un point retenu sur une surface fixe. — Réaction normale de la surface. — Equilibre d'un point retenu sur une courbe fixe. — Moments des forces concourantes. — Théorème de Varignon.....	136
§ 3. — <i>Equilibre des systèmes matériels.</i> — Composition des forces parallèles. — Moments des forces parallèles par rapport à un point. — Moments des forces parallèles par rapport à un plan. — Equilibre d'un système de forces parallèles. — Moments par rapport à un axe. — Moments d'une force par rapport à trois axes rectangulaires. — Théorie des couples. — Calcul de la résultante générale et du couple résultant d'un système de forces appliquées à un corps solide. — Cas d'une résultante unique. — Cas d'un couple unique. — Equilibre d'un solide libre. — Solide gêné par un obstacle. — Equilibre d'un solide ayant un point fixe. — Equilibre d'un solide ayant un axe fixe. — Equilibre d'un solide s'appuyant sur un plan fixe...	164
§ 4. — <i>Centres de gravité.</i> — Définitions. — Coordonnées du centre de gravité. — Principes géométriques. — Centre de gravité des lignes. — Centre de gravité des surfaces. — Exemples. — Centre de gravité des volumes. — Emploi des coordonnées polaires. — Théorèmes de Guldin. — Applications.....	181
§ 5. — <i>Equilibre des systèmes déformables.</i> — Définitions. — Systèmes articulés. — Articulations sphériques. — Cordons. — Polygone funiculaire. — Ponts suspendus. — Equilibre des fils pesants. — Chaînette.....	197

CHAPITRE III

Dynamique

- § 1. — *Mouvement du point matériel.* — Equations générales du mouvement. — Mouvement vertical d'un point, pesant dans le vide. — Mouvement des projectiles dans

le vide. — Mouvement des projectiles dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la vitesse. — Théorème de l'impulsion. — Théorème des aires. — Théorème de la force vive. — Travail des forces. — Surfaces de niveau et potentiel. — Théorème de Dirichlet. — Forces centrales. — Mouvement des planètes. — Mouvement d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance. — Mouvement d'un point retenu sur une courbe fixe. — Pendule simple. — Pendule dans un milieu résistant. — Pendule cycloïdal. — Courbes tautochrones, courbes brachistochrones. — Mouvement d'un point sur une surface. — Pendule sphérique. — Mouvement relatif d'un point. — Equilibre relatif d'un point. — Mouvement relatif d'un point à la surface de la terre.....	213.
2. — <i>Mouvement des systèmes matériels.</i> — Définitions, équations générales. — Théorème sur les quantités de mouvement. — Théorème de l'impulsion. — Théorème des moments des quantités de mouvement. — Mouvement du centre de gravité. — Théorème des forces vives. — Principe de la conservation de l'énergie.....	237
3. — <i>Moments d'inertie.</i> — Définitions. — Calcul des moments d'inertie. — Théorème sur les moments d'inertie d'un corps par rapport à deux axes parallèles dont l'un passe par le centre de gravité du corps. — Ellipsoïde d'inertie. — Mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe. — Pendule composé.....	269
Problèmes résolus.....	285
Problèmes proposés.....	290.

DEUXIÈME PARTIE

HYDRAULIQUE

CHAPITRE PREMIER

Hydrostatique

Corps fluides. — Pression en un point. — Principes d'expérience. — Equation d'équilibre d'une masse liquide. — Surfaces de niveau. — Liquides pesants. — Principe de Pascal. — Equilibre relatif d'un liquide animé d'une rotation uniforme. — Pression sur une paroi plane. — Détermination du centre de pression. — Cas particuliers. —

	Pages.
Pression sur une surface courbe. — Principe d'Archimède.	
— Equilibre des corps immergés. — Corps flottants. —	
Stabilité de l'équilibre des corps flottants. — Stabilité des	
prismes flottants. — Mesure des hauteurs par le baromètre.	
— Problèmes	326

CHAPITRE II

Hydrodynamique

Equations fondamentales. — Equation de continuité. —	
Mouvement autour d'un axe. — Equation des forces vives.	
— Régime permanent. — Théorème de Bernoulli. — Cas	
du mouvement relatif. — Cas des liquides naturels. —	
Pression dans un liquide en mouvement. — Régime non	
permanent.....	355

CHAPITRE III

Orifices. — Ajutages. — Déversoirs

<i>Orifices.</i> — Mince paroi. — Théorème de Torricelli. — Cal-	
cul du débit. — Orifice de grande hauteur. — Orifice noyé.	
— Contraction incomplète. — Débit des vannes. —	
Vannes inclinées. — Vidange d'un réservoir par ori-	
fice inférieur. — Tourbillons	370
<i>Ajutages.</i> — Ajutage parfaitement évasé. — Ajutage de	
Borda. — Changement brusque de la section d'un courant.	
— Ajutage cylindrique extérieur. — Ajutages coniques. —	
Jet d'eau vertical.....	389
<i>Déversoirs.</i> — Mince paroi. — Formule de Bazin. — Influence	
de la vitesse d'amont. — Formes diverses des nappes dé-	
versantes. — Contraction latérale. — Déversoir incliné.	
— Déversoir noyé. — Déversoir à crête épaisse. — Déver-	
soir en triangle. — Vidange d'un bassin par un déversoir.	
— Jaugeage des sources et des ruisseaux. — Problèmes..	416

CHAPITRE IV

Tuyaux de conduite

<i>Diamètre constant.</i> — Equation de l'écoulement. — Conduite
sortant d'un réservoir. — Formules anciennes. — Formules
modernes. — Formules employées à l'étranger. — Tableau

des diverses formules. — Choix d'une formule. — Tables numériques. — Problèmes divers. — Vitesse moyenne maxima. — Conduites de refoulement. — Puissance du moteur élévatoire. — Conduites de dérivation. — Décharge des réservoirs. — Section horizontale variable. — Cas où le réservoir reçoit une dérivation. — Conduite faisant communiquer deux réservoirs. — Prise d'eau sur une conduite de refoulement. — Prise d'eau alimentée par deux réservoirs	461
<i>Abaques.</i> — Principes de construction. — Anamorphose. — Abaque d'Aubrives. — Abaque de M. Van Muyden. — Abaques à points cotés. — Abaques de M. Dariès. — Abaque de M. Geslain. — Abaque de M. Bertrand. — Applications. — Répartition des vitesses	484
<i>Diamètre variable.</i> — Equation de l'écoulement. — Conduites mixtes. — Conduites multiples. — Service en route. — Prix de revient des conduites. — Problème des trois conduites. — Calcul d'un réseau de conduites. — Calcul des jets d'eau inclinés	514
<i>Questions pratiques.</i> — Perte de charge au passage des robinets. — Perte de charge produite par les coudes. — Section d'ouverture partielle d'un robinet-vanne. — Buttée des plaques pleines et des coudes. — Siphons pour la traversée des vallées. — Plan et profil en long des conduites. — Etude d'un réseau. — Tracé des conduites. — Réseau ramifié et réseau maillé. — Calcul des diamètres et des pertes de charge. — Pression qu'il convient de réaliser. — Mesure du débit des conduites	536

CHAPITRE V

Canaux et Rivières

<i>Régime uniforme.</i> — Résistance des parois. — Formule fondamentale. — Formules anciennes. — Formule de M. Bazin. — Autres formules. — Répartition des vitesses. — Formules de Prony. — Limites de la vitesse moyenne. — Inclinaison des berges. — Problèmes divers. — Trapèze de débit maximum. — Pente d'un canal de dérivation. — Abaques pour le calcul des canaux. — Influence des herbes	566
<i>Calcul des aqueducs.</i> — Section rectangle. — Section circulaire. — Cercle et rectangle équivalents. — Abaque de l'équation du 3 ^e degré. — Section ovoïde. — Débit maximum. — Vitesse maximum	581
<i>Calcul des égouts.</i> — Section demi-circulaire. — Section elliptique. — Section cycloïdale. — Section en anse de panier. — Conduite forcée équivalente. Applications. — Procédé graphique. — Egouts de Paris	594

	Pages.
<i>Régime varié.</i> — Equation de l'écoulement. — Formule différentielle. — Canal rectangulaire de largeur et de pente constantes. — Remous. — Remous d'exhaussement. — Formule de Rühlmann. — Usines hydrauliques. — Tracé de la courbe du remous. — Remous d'abaissement. — Ressaut. — Canal de grande largeur. — Cas où la pente est nulle. — Changement de la section d'un canal. — Rétrécissement de faible longueur. — Rétrécissement brusque et de faible longueur.....	620
<i>Jaugeage des cours d'eau.</i> — Levé des profils en travers. — Flotteurs. — Calcul de la vitesse moyenne. — Bâtons lestés. — Tube de Pitot. — Tube de Darcy. — Moulinet de Woltmann. — Moulinets perfectionnés. — Régime varié. — Formules de jaugeage. — Mouvement non permanent.....	644

CHAPITRE VI

Résistance des liquides

<i>Pression d'une veine liquide contre un plan fixe.</i> — Pression sur un solide de révolution au repos. — Cas où les corps sont en mouvement. — Pression sur des corps fixes immergés. — Pression sur une plaque mince. — Pression sur une demi-sphère. — Pression sur un corps placé dans un tuyau de conduite. — Pression sur un prisme de faible longueur. — Cas d'un prisme allongé. — Influence des proues et des poupes. — Résistance éprouvée par un solide qui se déplace dans un liquide au repos.....	656
---	-----

CHAPITRE VII

Mouvements ondulatoires

<i>Ondes de translation.</i> — Expériences de M. Bazin. — Onde solitaire. — Houle. — Surfaces de niveau. — Relation entre la longueur et la vitesse d'une onde. — Condition de continuité. — Mouvement effectif. — Énergie de la houle. — Clapotis. — Marées. — Mascaret. — Oscillation de l'eau dans les tubes.....	680
--	-----

CHAPITRE VIII

Écoulement souterrain

<i>Écoulement de l'eau à travers le sable.</i> — Nappe aquifère sur un plan horizontal. — Puits ouvert dans une nappe	
---	--

horizontale. — Cas où le puits n'est alimenté que par le fond. — Puits artésiens. — Deux puits ouverts dans une nappe horizontale. — Puits ouvert dans une nappe parabolique. — Galeries filtrantes.....	699
--	-----

TROISIÈME PARTIE

THERMODYNAMIQUE

CHAPITRE PREMIER

Principes fondamentaux

Travail mécanique et chaleur. — Principe de Mayer et de Joule. — Chaleur interne. — Relations déduites de l'équation de Mayer et Joule. — Représentation graphique de Clapeyron. — Transformations adiabatiques et isothermiques. — Cycle fermé, cycle réversible. — Températures absolues. — Machines thermiques. — Principe de Carnot. — Cycle de Carnot, calcul du coefficient économique. — Cycle des machines à vapeur. — Rendement pratique. — Application.....	721
---	-----

CHAPITRE II

Gaz parfaits

Lois de Mariotte et de Gay-Lussac. — Equation de Clapeyron. — Formules relatives aux gaz. — Application. — Détente adiabatique. — Equation de Poisson. — Calcul du travail extérieur développé par la détente. — Entropie. — Détente isothermique	731
---	-----

CHAPITRE III

Vapeurs saturées

Définitions. — Vapeur d'eau surchauffée. — Tension maxima des vapeurs saturées. — Formules de Duperray et de Regnault. — Densité des vapeurs, formule de Zeuner pour la vapeur d'eau. — Chaleurs de vaporisation. — Formules
--

	Pages.
relatives aux vapeurs saturées. — Mélange de vapeur et de liquide. — Détente adiabatique d'une vapeur humide. — Equation de Clausius. — Equation de Zeuner. — Applications numériques.....	742

CHAPITRE IV

Ecoulement des gaz

Ecoulement par un orifice, formule de Zeuner. — Temps nécessaire au remplissage d'un réservoir, formule de M. Haton de La Goupillière. — Ecoulement par une conduite, tables de M. Arson. — Conduites d'air comprimé. — Formule de M. Schmidt. — Applications.....	753
TABLES NUMÉRIQUES.....	796

